Espaces vectoriels normés : normes et suites

- Rappels sur les bornes supérieures et inférieures (manipulations, techniques pour les déterminer)
- Définitions et propriétés des normes (exemples sur $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, sur $\mathbb{K}[X]$ et $M_n(\mathbb{K})$).
- Norme induite, norme sur un produit d'espaces vectoriels, norme associée à un produit scalaire.
- Distance associée à une norme, distance à une partie (elle est 1-lipschitzienne).
- Boules ouvertes et fermées, parties bornées.
- Normes équivalentes. En dimension finie les normes sont équivalentes (admis pour le moment).
- Convergence et divergence des suites, propriétés des limites. Limites par coordonnées en dimension finie.
- Lien normes équivalentes et convergence des suites.
- Suites extraites et valeurs d'adhérences.
- Rappels sur les suites de réels (propriétés liées à la relation d'ordre). Suites définies par une relation de récurrence, exemples de suites définies implicitement.

Révisions - Intégration sur un segment

- Fonctions continues par morceaux. Propriétés de l'intégrale sur un segment (la construction n'a pas été refaite), formule de Cauchy-Schwarz (et cas d'égalité).
- Sommes de Riemann (subdivision régulière avec points au bord ou avec un point à l'intérieur).
- Primitives d'une fonction continue sur un intervalle, théorème d'existence. Utilisation pour l'étude d'intégrales dépendantes de leurs bornes. Quelques extensions aux fonctions continues par morceaux.
- Calcul des intégrales : IPP et formule de changement de variable sous la forme

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\,du$$

  avec φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et f continue sur un intervalle contenant $\varphi([\alpha,\beta])$- écriture lorsque φ est bijective.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- quelques méthodes usuelles : fractions rationnelles simples, polynômes et fractions en sin et cos (seulement $\tan(t/2)$ au programme mais on peut utiliser d'autres règles), polynôme-exponentielle, fractions $F(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$.
- Approximation uniforme (à ε) d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier. Exemple d'utilisation : lemme de Lebesgue cas $\mathscr{C}^1$ puis cas continue par morceaux.

Questions de cours

1/ Définition d'une norme. Montrer que la norme associée à un produit scalaire est bien une norme.

2/ Distance à une partie non vide. Montrer que $\left|d(x,A)-d(y,A)\right| \leqslant \|x-y\|$

3/ Normes 1, 2 et ∞ sur $E=\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Comparaison de ces normes.

4/ La norme N_2 est dominée par N_1 si et seulement si toute suite de limite nulle pour N_1 est une suite de limite nulle pour N_2.

5/ Limite de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ dans le cas où la fonction est continue sur $[0,1]$

6/ Théorème fondamental : si f est continue sur I, alors $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a (avec $a\in I$) - on peut limiter à un point intérieur à I pour alléger la rédaction.

7/ Formule de Taylor avec reste intégral. Application : écriture de $\sin x$ sous forme de somme d'une série.