Intégration sur un intervalle

La présentation et la plupart des démonstrations ont été faites sur un intervalle $[a, +\infty[$ puis étendu rapidement aux autres intervalles.

- Intégrales convergentes d'une fonction continue par morceaux (sur les différents types d'intervalles). Propriétés (linéarité, positivité, caractère défini, relation de Chasles)
- Intégrales absolument convergentes, intégrabilité d'une fonction.
- Critères de comparaison, fonctions de référence (fonctions $x \mapsto 1/x^\alpha$ et exponentielles). Les intégrales de Bertrand ont été traitées mais hors.prog : elles peuvent être utilisées mais il faut savoir redémontrer les différents cas. Règles de Riemann $x^\alpha f(x)$ (en dernier recours - à reformuler avec les critères de comparaison)
- Liens divers entre intégrabilité, convergence et limite.
- Changement de variable pour les intégrales convergentes, pour les fonctions intégrables (et intégration par parties). Cas de la translation.
- Intégrales semi-convergentes : exemple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$ (convergence et non-intégrabilité). Étude plus générale de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$. Méthode par développement asymptotique.

Semaine précédente : intégration sur un segment

- Fonctions continues par morceaux. Propriétés de l'intégrale sur un segment (la construction n'a pas été refaite), formule de Cauchy-Schwarz (et cas d'égalité).
- Sommes de Riemann (subdivision régulière avec points au bord ou avec un point à l'intérieur).
- Primitives d'une fonction continue sur un intervalle, théorème d'existence. Utilisation pour l'étude d'intégrales dépendantes de leurs bornes. Quelques extensions aux fonctions continues par morceaux. Formule de Taylor avec reste intégral.
- Calcul des intégrales : IPP et formule de changement de variable sous la forme

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)\,du$$

  avec φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ et f continue sur un intervalle contenant $\varphi([\alpha, \beta])$- écriture lorsque φ est bijective.
- quelques méthodes usuelles : fractions rationnelles simples, polynômes et fractions en sin et cos (seulement $\tan(t/2)$ au programme mais on peut utiliser d'autres règles), polynôme-exponentielle, fractions $F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$.
- Approximation uniforme (à ε près) d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier. Exemple d'utilisation : lemme de Lebesgue cas $\mathscr{C}^1$ puis cas continue par morceaux.

Questions de cours

1/ Limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ dans le cas où la fonction est continue sur $[0, 1]$

2/ Théorème fondamental : si f est continue sur I, alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a (avec $a \in I$) - on peut limiter à un point intérieur à I pour alléger la rédaction.

3/ Formule de Taylor avec reste intégral. Application : écriture de $\sin x$ sous forme de somme d'une série.

4/ Lien entre convergence et convergence absolue (et démonstration)

5/ Démonstration des critères de comparaison pour les fonctions positives (majoration, o, O et équivalent)

6/ Démonstration du théorème de changement de variable généralisé : si f est continue par morceaux sur I d'extrémités a et b, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\varphi : J \to I$ est bijective de J sur I et $\mathscr{C}^1$ sur J alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\lim_{u\to a}\varphi^{-1}(u)}^{\lim_{u\to b}\varphi^{-1}(u)} f\circ\varphi(u).\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

avec convergence de la nouvelle intégrale.

7/ Intégrabilité (ou non) de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ sur $[2, +\infty[$.

8/ Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$: convergence et non absolue convergence.