groupes, anneaux, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Groupes, sous-groupes, groupes monogènes et cycliques.
- Opérations sur les groupes et sous-groupes : produit, intersection, sous-groupe engendré par une partie.
- Morphismes de groupes, images directes, réciproques, image et noyau (qui sont des sous-groupes)
- Idem avec les anneaux
- Groupes monogènes et isomorphisme avec $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (description de $< x >$). Ordre d'un élément.
- Théorème de Lagrange (**au programme :** l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe - démo dans le cas commutatif, **hors programme :** l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe).
- Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$
- Éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/nZ$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier. Indicatrice d'Euler, théorème chinois et calcul de $\varphi(n)$. Relation $a^{\varphi(n)}=1$ si a est un inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et cas particulier $a^{p-1}=1$ pour a non nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lorsque p est premier.

Semaine précédente : Intégration sur un intervalle

La présentation et la plupart des démonstrations ont été faites sur un intervalle $[a,+\infty[$ puis étendu rapidement aux autres intervalles.

- Intégrales convergentes d'une fonction continue par morceaux (sur les différents types d'intervalles). Propriétés (linéarité, positivité, caractère défini, relation de Chasles)
- Intégrales absolument convergentes, intégrabilité d'une fonction.
- Critères de comparaison, fonctions de référence (fonctions $x \mapsto 1/x^{\alpha}$ et exponentielles). Les intégrales de Bertrand ont été traitées mais hors.prog : elles peuvent être utilisées mais il faut savoir redémontrer les différents cas. Règles de Riemann $x^{\alpha} f(x)$ (en dernier recours - à reformuler avec les critères de comparaison)
- Liens divers entre intégrabilité, convergence et limite.
- Changement de variable pour les intégrales convergentes, pour les fonctions intégrables (et intégration par parties). Cas de la translation.
- Intégrales semi-convergentes : exemple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$ (convergence et non-intégrabilité). Étude plus générale de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^{\alpha}}$. Méthode par développement asymptotique.

Questions de cours

1/ Morphisme de groupes. L'image directe ou réciproque d'un sous-groupe est un sous-groupe.

2/ Théorème de Lagrange (sur l'ordre d'un élément). Démonstration dans le cas commutatif.

3/ Description d'un groupe monogène et isomorphisme avec $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/nZ$.

4/ lorsque $m \wedge n = 1$, isomorphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.

5/ $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$ si $m \wedge n = 1$ (en admettant la question précédente) et détermination de $\varphi(n)$ si $n \geqslant 2$.

6/ Lien entre convergence et convergence absolue (et démonstration)

7/ Intégrabilité (ou non) de $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha}\ln^{\beta} x}$ sur $[2,+\infty[$.

8/ Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$: convergence et non absolue convergence.