Séries numériques : révisions et compléments

- définitions, propriétés générales, séries télescopiques, lien suites-séries.
- Séries à termes positifs :
  - critères de comparaison (majoration, domination, équivalent)
  - séries géométriques, séries de Riemann, règles de Riemann. Séries de Bertrand (hors programme).
  - Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert.
  - Comparaison série-intégrale. Diverses utilisations pour trouver des encadrements/équivalents de restes/sommes partielles
  - Série harmonique : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
- Séries quelconques : absolue convergence, théorème des séries alternées (avec majoration et signe du reste). Développement asymptotique du terme général.
- Produit de Cauchy et exponentielle complexe.
- Sommation des relations de comparaison (o, O, ~ entre deux séries dont la seconde est à termes positifs) pour les sommes partielles/restes. Utilisations pour déterminer des dév. asymptotiques de suites.
- *Compléments hors programme :* critère de Raabe-Duhamel, comparaison série-intégrale sous la forme « $\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \right)$ converge » (avec f décroissante minorée), transformation d'Abel et utilisation.

Semaine précédente : groupes, anneaux, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Groupes, sous-groupes, groupes monogènes et cycliques.
- Opérations sur les groupes et sous-groupes : produit, intersection, sous-groupe engendré par une partie.
- Morphismes de groupes, images directes, réciproques, image et noyau (qui sont des sous-groupes)
- Idem avec les anneaux
- Groupes monogènes et isomorphisme avec $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (description de $< x >$). Ordre d'un élément.
- Théorème de Lagrange (**au programme :** l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe - démo dans le cas commutatif, **hors programme :** l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe).
- Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
- Éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/nZ$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier. Indicatrice d'Euler, théorème chinois et calcul de $\varphi(n)$. Relation $a^{\varphi(n)} = 1$ si a est un inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et cas particulier $a^{p-1} = 1$ pour a non nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lorsque p est premier.

Questions de cours

1/ Critère de d'Alembert.

2/ Démonstration de la sommation des o : cas d'une comparaison à une série convergente.

3/ Démonstration de la sommation des o : cas d'une comparaison à une série divergente.

4/ Théorème des séries alternées. Majoration et signe du reste.

5/ Morphisme de groupes. L'image directe ou réciproque d'un sous-groupe est un sous-groupe.

6/ Théorème de Lagrange (sur l'ordre d'un élément). Démonstration dans le cas commutatif.

7/ Description d'un groupe monogène et isomorphisme avec $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/nZ$.

8/ lorsque $m \wedge n = 1$, isomorphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.

9/ $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si $m \wedge n = 1$ (en admettant la question précédente) et détermination de $\varphi(n)$ si $n \geqslant 2$.