

Révisions d'algèbre linéaire

- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels : opérations, espace engendré par une partie A . Sommes et sommes directes de 2 et plusieurs sous-espaces, espaces supplémentaires
- Familles libres, génératrices, liées - techniques d'indépendance linéaire. Cas particuliers : familles de polynômes de degré deux à deux distincts. Bases.
- Espaces de dimension finie. Théorèmes de la base incomplète. Dimension de sommes, sommes directes, $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe si et seulement si $\dim \sum_{i=1}^p E_i = \sum_{i=1}^p \dim E_i$. Base adaptée à une décomposition.
- Applications linéaires. Images directes et réciproques de sev. Image et noyau. Image de familles par des applications linéaires. Application linéaire définie par ses restrictions sur des sev supplémentaires. Polynômes d'endomorphismes.
- Tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image et formule du rang.

Semaine précédente : séries numériques

- définitions, propriétés générales, séries télescopiques, lien suites-séries.
- Séries à termes positifs :
 - ◊ critères de comparaison (majoration, domination, équivalent)
 - ◊ séries géométriques, séries de Riemann, règles de Riemann. Séries de Bertrand (hors programme).
 - ◊ Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert.
 - ◊ Comparaison série-intégrale. Diverses utilisations pour trouver des encadrements/équivalents de restes/sommes partielles
 - ◊ Série harmonique : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
- Séries quelconques : absolue convergence, théorème des séries alternées (avec majoration et signe du reste). Développement asymptotique du terme général.
- Produit de Cauchy et exponentielle complexe.
- Sommation des relations de comparaison (o , O , \sim entre deux séries dont la seconde est à termes positifs) pour les sommes partielles/restes. Utilisations pour déterminer des dév. asymptotiques de suites.
- *Compléments hors programme* : critère de Raabe-Duhamel, comparaison série-intégrale sous la forme « $\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right)$ converge » (avec f décroissante minorée), transformation d'Abel et utilisation.

Questions de cours

- 1/ différentes caractérisations de la somme directe de n sous-espaces vectoriels (et démonstration)
- 2/ $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe
- 3/ isomorphisme du rang, formule du rang
- 4/ Démonstration de $\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker f + \dim \ker g$.
- 5/ Critère de d'Alembert.
- 6/ Démonstration de la sommation des o : cas d'une comparaison à une série convergente.
- 7/ Démonstration de la sommation des o : cas d'une comparaison à une série divergente.
- 8/ Théorème des séries alternées. Majoration et signe du reste.