Révisions d'algèbre linéaire et sur les matrices

- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels : opérations, espace engendré par une partie A. Sommes et sommes directes de 2 et plusieurs sous-espaces, espaces supplémentaires
- Familles libres, génératrices, liées - techniques d'indépendance linéaire. Cas particuliers : familles de polynômes de degré deux à deux distincts. Bases.
- Espaces de dimension finie. Théorèmes de la base incomplète. Dimension de sommes, sommes directes, $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si $\dim \sum_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$. Base adaptée à une décomposition.
- Applications linéaires. Images directes et réciproques de sev. Image et noyau. Image de familles par des applications linéaires. Application linéaire définie par ses restrictions sur des sev supplémentaires. Polynômes d'endomorphismes.
- Tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image et formule du rang.
- Projecteurs et projections. Symétries.
- Propriétés du rang, rang d'une composée, invariance par composition par un automorphisme.
- Hyperplans et formes linéaires
- Révisions générales sur les opérations, base canonique, produits $E_{ij}E_{kl}$, trace. . . .
- Lien avec l'algèbre linéaire, matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, changement de bases.
- Matrices équivalentes (et caractérisation par le rang, équivalence à J_r), matrices semblables. Méthodes pour montrer que des matrices sont semblables / pour déterminer une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme à une certaines formes.

Questions de cours

1/ différentes caractérisations de la somme directe de n sous-espaces vectoriels (et démonstration)

2/ $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe

3/ isomorphisme du rang, formule du rang

4/ Démonstration de $\dim\ker(g \circ f) \leqslant \dim\ker f + \dim\ker g$.

5/ H est un hyperplan de E si et seulement si il existe $\varphi \in E^*$ non nulle telle que $H = \ker\varphi$. Deux équations de H sont proportionnelles.

6/ Propriétés de la trace (linéarité, produit, matrices semblables)

7/ Changement de bases : matrice de passage, démonstration de $X = PX'$ et de $B = Q^{-1}AP$.

8/ Toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

9/ Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.