Suites de fonctions, théorème de convergence dominée, intégrale à paramètre

Pour l'instant, on ne s'intéresse qu'au cas des fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

- Différentes convergences pour les suites de fonctions : simple, uniforme, uniforme sur les segments.
- Continuité (en a, sur A), intégration sur un segment, suite des primitives s'annulant en a, dérivation et dérivée d'ordre k. Théorème de permutation des limites.
- Théorème de convergence dominée et utilisations.
- Intégrale dépendant d'un paramètre : étude de fonctions $x \mapsto \int_I h(x,t)\mathrm{d}t$: théorèmes de continuité, classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^k$ (domination sur la dernière dérivée). Permutation limite (sur le paramètre) et intégrale. Exemple de la fonction Γ.

Questions de cours

1/ Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continue en a.

2/ Convergence uniforme sur les segments de la suite des primitives s'annulant en a d'une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur les segments.

3/ Montrer que, si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$

4/ Théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

5/ Théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

6/ Étude de la fonction Γ (définition, continuité, dérivée, relation fonctionnelle)