Suites et séries de fonctions, théorème de convergence dominée, intégrale à paramètre

Pour l'instant, on ne s'intéresse qu'au cas des fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

- Différentes convergences pour les suites de fonctions : simple, uniforme, uniforme sur les segments.
- Continuité (en a, sur A), intégration sur un segment, suite des primitives s'annulant en a, dérivation et dérivée d'ordre k. Théorème de permutation des limites.
- Théorème de convergence dominée et utilisations.
- Intégrale dépendant d'un paramètre : étude de fonctions $x \mapsto \int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$: théorèmes de continuité, classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^k$ (domination sur la dernière dérivée). Permutation limite (sur le paramètre) et intégrale. Exemple de la fonction Γ.
- Séries de fonctions : convergence simple, uniforme, uniforme sur les segments, convergence normale (et convergence absolue). Extensions des propositions sur les suites de fonctions aux séries de fonctions.
- Permutation somme et intégrale : cas des fonctions positives, théorème d'intégration terme à terme, utilisation du théorème de convergence dominée sur les sommes partielles.

Questions de cours

1/ Théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

2/ Théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

3/ Étude de la fonction Γ (définition, continuité, dérivée, relation fonctionnelle)

4/ Différents types de convergences pour les séries de fonctions. Liens entre ces convergences (avec démonstration).

5/ Étude de la fonction ζ alternée $\theta : s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$: continuité et dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.