

## Révisions sur les déterminants

Quelques rappels rapides sur les déterminants (famille de vecteurs, endomorphismes, matrices). Méthodes de calculs, déterminant par blocs, développements, déterminant de Vandermonde. Comatrice. Relation  $A \cdot \text{Com}(A)^T = \text{Com}(A)^T \cdot A = \det(A)I_n$ .

## Réduction des endomorphismes

- 1/ Sous-espaces stables : propriétés (si  $u$  et  $v$  commutent alors  $\ker u$  et  $\text{Im } u$ ,  $E_\lambda(u)$  stables par  $v$ , endomorphisme induit. Caractérisation matricielle (stabilité d'un sev, d'une famille de sev, cas des matrices triangulaires supérieures).
- 2/ Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice :
  - Éléments propres. Propriétés sous-espaces propres : stables, endomorphisme induit, somme directe des sous-espaces propres.
  - Cas des matrices. Cas de la transposée,  $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\bar{\lambda}}(A)$  si  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .
  - Polynôme caractéristique, écriture, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sev stable. Inégalité  $1 \leq \dim E_\lambda \leq n_\lambda$ .

**Important :** pour l'instant il n'y a rien sur la réduction/diagonalisation - les exercices sur cette partie sont uniquement des exercices de recherche d'éléments propres de matrices ou d'endomorphismes (dans différentes situations - espaces de polynômes, de fonctions...)

## Séries de fonctions

Pour l'instant, on ne s'intéresse qu'au cas des fonctions définies sur  $A \subset \mathbb{R}$ , à valeurs réelles ou complexes.

- Séries de fonctions : convergence simple, uniforme, uniforme sur les segments, convergence normale (et convergence absolue). Extensions des propositions sur les suites de fonctions aux séries de fonctions.
- Permutation somme et intégrale : cas des fonctions positives, théorème d'intégration terme à terme, utilisation du théorème de convergence dominée sur les sommes partielles.

## Questions de cours

- 1/ Différents types de convergences pour les séries de fonctions. Liens entre ces convergences (avec démonstration).
- 2/ Étude de la fonction  $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$  : continuité, dérivabilité. Limite en  $+\infty$  et équivalent en 1.
- 3/ Étude de la fonction  $\zeta$  alternée  $\theta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$  : continuité et dérivabilité sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 4/ Déterminant de Vandermonde.
- 5/ Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- 6/ Définition, écriture et propriétés du polynôme caractéristique.
- 7/ Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. La dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la racine dans le polynôme caractéristique.