Espaces vectoriels normés

Topologie

- Ouverts et propriétés, points intérieurs, intérieur d'une partie.
- Fermés et propriétés, points adhérents, adhérence d'une partie, caractérisation par les suites, partie dense et frontière.
- Intérieur et adhérence d'un sous-espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.
- Compacts : suite extraite convergente dans l'ensemble. Produit fini de compacts. Une partie compacte est fermée et bornée et réciproque en dimension finie. Une partie d'un compact est compacte ssi elle est fermée. Une suite d'un compact ne possédant qu'une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.

Étude locale, continuité

- limites, continuité en un point, sur A. Propriétés algébriques, composition. Cas où l'espace d'arrivée est de dimension finie (applications composantes). Caractérisation par les suites, par les voisinages. Les applications coordonnées, les applications polynomiales en les coordonnées dans une base sont continues (exemples : déterminant, $A \mapsto A^2$, $M \mapsto \chi_M$).
- Image directe d'un compact, existence d'extrema pour une fonction à valeurs réelles.
- Continuité uniforme. Théorème de Heine.
- Ouverts et fermés relatifs à une partie A. Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts/fermés.
- Exemples d'utilisation : montrer que des parties sont ouvertes/fermées. $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense + utilisation ($\chi_{AB} = \chi_{BA}$ par densité)
- Les applications linéaires sur un espace de dimension finie sont lipschitziennes donc continues.

Révisions : familles sommables

- Rappels sur la dénombrabilité (via des injections dans $\mathbb{N}$ ou des surjections de $\mathbb{N}$, exemples, produit fini d'ensembles au plus dénombrable, réunion au plus dénombrable de parties au plus dénombrables, non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$.
- Cas d'une famille de réels positifs $(u_i)_{i\in I}$ où I est dénombrable : définition sommabilité et somme, propriétés basiques (« linéarité », sous-famille) , équivalence avec la convergence de séries lorsque $I = \mathbb{N}$. Permutation de l'ordre des termes. Théorème de sommation par paquets comme équivalence
- Cas général : définition de la sommabilité, de la somme. Propriétés simples. Théorème de sommation par paquets (admis), cas des séries doubles (Fubini)

Questions de cours

1/ Point intérieur et intérieur d'une partie. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

2/ Point adhérent (avec les boules), adhérence d'une partie. Caractérisation d'un point adhérent par les suites.

3/ Dans un compact une suite ne possédant qu'une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.

4/ Topologie des sous-espaces vectoriels : si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\bar{F}$ aussi. Si F n'est pas d'intérieur vide alors $F = E$.

5/ Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors F est fermé.

6/ $f : A \to F$ est continue sur A si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert relativement à A.