Maths MPI/MPI* - Résumé du programme de l'année

Espaces vectoriels normés

Normes, suites

- Normes, normes équivalentes, normes classiques, norme sur un produit d'evn, norme induite
- distance associée à une norme, distance à une partie, caractère 1-lipschitzien de $x \mapsto d(x, A)$
- convergence des suites et propriétés. Suites extraites, valeurs d'adhérences.

Topologie

- ouverts, point intérieur, intérieur. Union quelconque, intersections finies
- fermés, point adhérent et adhérence. Caractérisations séquentielles. Unions et intersections. Frontière. Partie dense.
- compacts. Un compact est fermé, borné. Produit fini de compacts. Une partie d'un compact est compacte si et seulement si elle est fermée.
- une seule valeur d'adhérence pour une suite d'un compact donne la convergence vers cette valeur d'adhérence.
- Ouvert, fermé et voisinage relatif à une partie A.

Applications

- continuité, continuité et opérations algébriques
- applications lipschitziennes
- caractérisation des ouverts/fermés par les images réciproques d'ouverts/fermés par une application continue
- image directe d'un compact. Extrema d'une fonction numérique
- continuité uniforme, théorème de Heine
- applications linéaires continues (elle est continue si et seulement si $\|u(x)\| \leqslant K\|x\|$). Norme subordonnée. Continuité des applications bilinéaires, multilinéaires.

Dimension finie

- normes équivalentes
- compacts = fermés bornés, les sev de dimension finie d'un espace vectoriel sont fermés
- convergences et limites (suites et fonctions) via les composantes dans une base de l'espace d'arrivée
- toutes les applications linéaires, bilinéaires, multilinéaires de E (de dimension finie) vers F (dimension quelconque) sont continues, continuité des applications polynomiales,
- chemin continue, connexité par arcs. Image par une application continue d'un connexe par arcs.

Fonctions à valeurs vectorielles

- dérivation, fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, intégration sur un segment. Composition avec une application linéaire
- intégration/dérivation des applications composantes, inégalité triangulaire, inégalité des accroissements finis

Fonctions convexes

- notion de barycentre, partie convexe,
- fonctions convexes, inégalités de convexité,
- caractérisation pour les fonctions dérivables (f' croissante), dérivables deux fois ($f'' \geqslant 0$).

Séries numériques et familles sommables

Séries à termes positifs

- croissance de la somme partielle (majorée équivaut à convergente)
- relations de comparaison (majoration, o, O et $\sim$)
- séries de référence : Riemann et géométrique - Bertrand (hors prog.)
- critère de d'Alembert
- comparaison série-intégrale sous différentes formes
- sommation des relations de comparaison (o, O et ~), théorème de Cesàro
- formule de Stirling

Séries quelconques

- convergence absolue
- théorème des séries alternées, majoration et signe du reste
- développement asymptotique du terme général

Séries dans un evn de dimension finie

- séries absolument convergentes (si $\sum \|u_n\|$ converge alors $\sum u_n$ converge).
- séries $\sum u^n$ et série exponentielle.

Dénombrabilité et familles sommables

- Ensembles dénombrables, produit fini d'ensembles au plus dénombrables,
- une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables reste au plus dénombrable,
- Famille sommable de réels positifs, théorème de sommation par paquets (et équivalence de la sommabilité et de la sommabilité par paquets),
- Famille sommable de complexes, théorème de sommation par paquets.
- Séries doubles et théorème de Fubini
- Produit de Cauchy de séries absolument convergentes, exponentielle complexe.

Suites et séries de fonctions

Sur un intervalle de $\mathbb{R}$

- convergences simples et uniformes pour les suites de fonctions. Convergences en moyenne (norme 1),
- convergences simples, uniformes et normales pour les séries de fonctions.
- théorèmes de permutation des limites, de continuité
- théorème de dérivation
- intégration sur un segment, suite (ou série) des primitives
- théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions, cas d'un intervalle non constant
- intégration terme à terme pour les séries de fonctions positives

- intégration terme à terme pour les séries de fonctions quelconques / convergence dominée sur la suite des sommes partielles
- théorèmes d'approximation : fonctions en escalier, théorème de Weierstrass

Sur une partie A de E

- convergences simples, uniformes pour les suites et séries, convergence normale pour les séries ($\sum \|u_n\|_{\infty,A}$ converge).
- théorème de continuité
- extension de la dérivation pour les fonctions à valeurs dans un evn de dimension finie. Cas de $t \mapsto \exp(ta)$ dans une algèbre normée de dimension finie

INTÉGRATION

Intégration sur un segment/intervalle

- intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à valeurs dans un evn de dimension finie
- primitives, théorème fondamental, intégration par parties et changement de variable
- formules de Taylor avec reste intégrale, Taylor-Young et Taylor-Lagrange (cas scalaire et vectoriel)
- Convergences des intégrables sur un intervalle
- critères de majoration, de comparaison
- caractérisation de la convergence avec $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$
- intégrabilité des fonctions à valeurs réelles ou complexes, convergence, absolue convergence d'une intégrale et liens,
- théorème de changement de variable sur un intervalle, intégration par parties,
- intégration des relations de comparaison
- exemple $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ (convergente, non absolument convergente)
- espace $L^2(I)$ et produit scalaire associé

Intégrales dépendant d'un paramètre

- théorème de continuité pour $x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$
- théorème de dérivabilité, généralisation avec la classe $\mathscr{C}^k$,
- savoir utiliser ces théorèmes sur une partie du domaine (domination locale)
- généralisations : continuité lorsque x est dans un partie d'un evn de dimension finie

SÉRIES ENTIÈRES

- différentes définitions du rayon de convergence, méthodes de calcul
- continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence (variable réelle ou complexe), cvn sur les compacts (cas variable complexe). Théorème d'Abel radial pour la continuité au bord.
- régularité de la somme sur le disque ouvert de convergence (variable réelle) : dérivation et intégration, caractère $\mathscr{C}^\infty$
- fonctions développables en série entière, fonctions usuelles, critère avec la formule de Taylor et majoration du reste
- sommation des séries entières, recherche de solutions d'équations différentielles en série entière

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Équations différentielles linéaires (vectorielles)

- équations $x' = a(t)x + b(t)$ et interprétation matricielle, sous forme de système
- structures des solutions, théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, problème de Cauchy
- cas des équations à coefficients constants $x' = ax$, solution $t \mapsto \exp(ta)x_0$. Cas a diagonalisable
- même chose dans le cas matriciel $X' = AX$ et $t \mapsto \exp(tA)X_0$.
- équation différentielle scalaire d'ordre 2 : système fondamental de solutions, caractérisation avec le wronskien d'un couple de solutions, méthode de variation des constantes

Équations linéaires scalaires

- équation $x' = a(t)x + b(t)$, expression des solutions
- équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$, structures des solutions lorsque a ne s'annule pas sur I, problème de Cauchy
- système fondamental de solutions, wronskien (et caractérisation d'un syst. fondamental de solutions)
- techniques usuelles : solutions en série entière, méthode de variation des constantes.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Calcul différentiel

- différentielle, dérivée selon un vecteur
- fonction de classe $\mathscr{C}^1$, opérations. Lien avec la différentiabilité
- composition d'applications $\mathscr{C}^1$, difféomorphismes, matrice jacobienne.
- calculs de composées usuelles ($t \mapsto f(a + t(b-a))$, $f \circ \gamma(t)$). Expression intégrale de $f(b) - f(a)$ (intégrale curviligne)
- dérivées d'ordre supérieur, théorème de Schwarz
- résolution d'équations aux dérivées partielles
- fonctions numériques. Définition du gradient (espace euclidien) $df_a(h) = \langle \mathrm{grad} f(a), h\rangle$.
- extrema de fonctions numériques. Condition nécessaire d'extremum local sur un ouvert.
- matrice hessienne, condition suffisante d'extrema sur un ouvert
- vecteurs tangents à une partie X. Ensemble tangent T_xX. Équation du plan tangent à une surface $z = f(x,y)$. Tangentes à une ligne de niveaux $f(x,y) = k$.
- Extrema de la restriction de f à X. Extrema sous une contrainte.

PROBABILITÉS

Espaces probabilisés, probabilités

- Tribu, événements. Espace probabilisable.
- Probabilité sur un espace probabilisable. Cas où Ω est fini, dénombrable
- Propriétés des probabilités : continuités croissante et décroissante, probabilité d'une réunion

- Événements négligeables, événements presque sûrs, systèmes complets/quasi-complets d'événements
- indépendance de deux ou d'une famille d'événements, probabilités conditionnelles, formules usuelles (proba totales, composées, Bayes)

Variables aléatoires

- Variables aléatoires discrètes, loi, probabilité $\mathbb{P}_X$ et germe de probabilité. Propriétés sur les vad de même loi
- Couples de variables aléatoires, loi conditionnelles, conjointes
- Familles de vad, indépendance, lemme des coalitions
- Loi usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson)

Espérance, variance

- Espérance et propriétés (linéarité, produit si indépendance, comparaison $|X| \leqslant Y$)
- théorème de transfert
- moment d'ordre supérieur, Cauchy-Schwarz, variance et écart-type
- Covariance, variance d'une somme de vad, cas de l'indépendance 2 à 2.

Fonctions génératrices

- Définition, propriété, caractérisation de la loi de X. Fonction génératrice d'une somme de vad indép.
- Utilisation de G_X pour le calcul d'espérance et variance

Convergence et inégalités

- Markov, Tchebychev, loi faible des grands nombres
- Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson

ALGÈBRE GÉNÉRALE

Groupes

- groupes, sous-groupes, sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
- intersections, produit, sous-groupe engendré par une partie
- morphismes de groupes. Image et Noyau
- groupe $\mathfrak{S}_n$, parties génératrices (transpositions, cycles)
- sous groupes monogènes (isomorphisme avec $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
- ordre d'un groupe, ordre d'un élément (sous-groupe $\{e, x, \dots, x^{p-1}\}$ engendré par x d'ordre p). L'ordre d'une élément divise l'ordre du groupe.

Anneaux

- anneau, sous-anneaux et morphismes
- idéal d'un anneau commutatif
- idéaux de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, PGCD, relation de Bézout.

Autres structures

- corps, algèbre, espaces vectoriels (+morphismes)

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- structure de groupe sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, puis d'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, + \times)$
- groupes cycliques et isomorphisme avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- générateur de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ corps ssi p premier.
- isomorphisme entre $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$.
- indicatrice d'Euler, calcul de $\varphi(n)$.

ALGÈBRE LINÉAIRE

Espaces vectoriels

- familles libres, génératrices, bases - propriétés (sur et sous familles), coordonnées dans une base
- sommes et sommes directes de 2 et plusieurs sous-espaces, caractérisations avec l'unicité de la décomposition ou avec des intersections
- théorème de la base incomplète, existence de supplémentaires en dimension finie
- dimension finie, dimension d'une somme de 2 sous-espaces, de la somme directe de plusieurs, caractérisation de la somme directe par la dimension

Applications linéaires

- image, noyau, caractérisation de l'injectivité, surjectivité
- savoir retrouver les inclusions classiques ($\ker g \circ f$, Im $g \circ f$, noyaux itérés)
- construction d'une application linéaire à partir de ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires, à partir de ses valeurs sur une base
- image de familles libres/génératrices. Isomorphisme et image de bases
- projecteurs, symétries
- isomorphisme du rang, formule du rang
- rang d'une application linéaire, invariance par composition par un isomorphisme

Formes linéaires, hyperplans

- hyperplans, noyaux de formes linéaires, équations d'un hyperplan
- tout sev de dimension m d'un espace de dimension n est intersection des noyaux de $n - m$ formes linéaires indépendantes (ou $n - m$ hyperplans).
- interpolation de Lagrange

Matrices et déterminant

- matrices, sous-ensembles usuels (triangulaires, symétriques...), base canonique, opérations, transposition
- lien avec l'algèbre linéaire, matrices de passage, changement de bases pour les vecteurs et les applications linéaires
- trace et propriétés
- équivalence avec une matrice J_r
- matrices semblables, endomorphisme canoniquement associé
- opérations élémentaires sur les matrices, utilisations (rang, inverse)

- formes n-linéaires alternées, déterminant dans une base d'une famille de vecteurs, déterminant d'un endomorphisme, déterminant d'une matrice carré
- calcul de déterminants, opérations élémentaires, opérations par blocs, développement par rapport à une ligne/colonne

Réduction des endomorphismes

Stabilité

- sous-espaces stables, caractérisation matricielle, endomorphisme induit
- stabilité des sous-espaces propres de u par un endomorphisme qui commute avec u

Réduction

- valeurs propres, espaces propres, spectre
- stabilité et somme directe de sous-espaces propres, indépendance d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

Réduction et polynômes

- théorème de décomposition des noyaux
- idéal des polynômes annulateurs, polynôme minimal. Valeurs propres et polynômes annulateurs
- polynôme caractéristique, multiplicité d'une valeur propre, lien avec la dimension d'un sous-espace propre
- théorème de Cayley-Hamilton

Diagonalisation, trigonalisation

- différentes définitions de la diagonalisabilité
- caractérisation à l'aide du polynôme caractéristique (et la multiplicité des racines)
- caractérisations avec les polynômes annulateurs, avec le polynôme minimal
- définition d'un endomorphisme trigonalisable, condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité
- étude des endomorphismes nilpotents, caractérisation avec le polynôme minimal, caractéristique
- si u admet un polynôme annulateur scindé, décomposition de l'espace en somme de sev stables sur lesquels $u = \lambda \mathrm{Id} + n$ où n nilpotent. Sous-espaces caractéristiques

Espaces préhilbertiens et euclidiens

Produit scalaire

- produit scalaire, formule de Cauchy-Schwarz. Formules de polarisation.
- orthogonalité, orthogonal d'une partie et propriétés
- bases orthonormées, orthonormalisation de Gram-Schmidt, calculs du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée
- projections orthogonales, expression dans une b.o.n.
- distance à un sev, inégalité de Bessel

Endomorphismes des espaces euclidiens

- adjoint et propriétés. Si F stable par u alors $F^\perp$ stable par u^*.
- endomorphismes orthogonaux, différentes définitions, $O(E)$ et $SO(E)$
- matrices orthogonales, changement de bases orthonormées, classification en dimension 2 et 3
- Propriétés de stabilité et stabilité du supplémentaire orthogonal. Réduction générale d'un endomorphisme orthogonal en b.o.n.
- endomorphismes symétriques, théorème spectral. Endomorphismes symétriques positifs, définis positifs. Cas des matrices. Caractérisation par le spectre.