1 Nombres complexes

I. Nombres complexes

Modules

L'essentiel *(modules)*

→ $z\overline{z} = |z|^2$ (souvent utilisée pour le calcul)
→ $|z| = |\bar{z}|$, $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$ et $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$.
→ $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ avec égalité si, et seulement si z est réel.
→ $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$ avec égalité si, et seulement si z est imaginaire pur.
→ *Inégalité triangulaire* : $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
→ *Seconde inégalité triangulaire* : $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2|$.
→ *Cas d'égalité* $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.
→ *généralisation* : $|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|$ si, et seulement si, il existe $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $z_i = \lambda_i z$ pour tout i.

Arguments

L'essentiel *(Arguments)*

→ On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Cet ensemble est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$. On note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
→ L'application $\left\{\begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \to & (\mathbb{U},\times) \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes, surjectif et dont le noyau est l'ensemble des multiples entiers de 2π. Cela signifie que :
- si $|z| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $z = e^{i\theta}$,
- on a $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si, et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\theta' - \theta = 2k\pi$,
- on a $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ et $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

→ On appelle argument d'une nombre complexe **non nul** z, tout réel θ tel que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. On note alors $\arg z = \theta\,[2\pi]$.
→ Si z, z' sont non nuls
- $\arg(zz') = \arg z + \arg z'\,[2\pi]$,
- $\arg(1/z) = -\arg z\,[2\pi]$.

→ les arguments sont définis modulo 2π. On fera par exemple attention de ne pas écrire $\arg zz' = \arg z + \arg z'$.

Racines n-ièmes

Proposition 1 *(Racines d'un complexe)*

soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de a tout complexe z tel que $z^n = a$. Si une forme trigonométrique de $a \neq 0$ est $a = \rho e^{i\theta}$, alors les racines n-ièmes de a sont les n nombres complexes 2 à 2 distincts

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{où } k \in [\![0\,;n-1]\!].$$

Proposition 2 *(Racines de l'unité)*

On appelle racine n-ième de l'unité, tout complexe z tel que $z^n = 1$. Il y en a exactement n. On appelle alors $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. On a $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ et

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0\,;n-1]\!]\}.$$

L'essentiel *(Racines)*

→ Si on note $\omega = e^{2i\pi/n}$, alors $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}\}$. On peut remplacer les exposants $[\![0\,;n-1]\!]$ par n'importe quelle suite de n entiers consécutifs.
→ La somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0.
→ Si z_0 est une racine n-ième d'un nombre complexe a non nul, alors on obtient toutes les racines n-ièmes de a en multipliant z_0 par les n racines n-ièmes de l'unité.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

L'essentiel

Soit A, B et M des points d'affixe respective a, b et z, alors
- → $|b-a| = AB$ et $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{AM}{BM}$ (z différent de b),
- → $\arg a = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OA})$ $[2\pi]$ (a non nul),
- → $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})$ $[2\pi]$ (z différent de a et b).

Exercice 1 *(Identité du parallèlogramme)*

Montrer que pour tout z et z' complexes, on a $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

Exercice 2 *(Inégalité triangulaire)*

Soient z et z' deux complexes. Montrer que $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ avec égalité si et seulement s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ tels que $z = \lambda z_0$ et $z' = \lambda' z_0$.

Exercice 3

Résoudre $(z^2+1)^n - (z+i)^{2n} = 0$.

II. TRIGONOMÉTRIE

$\cos(a+b)$	$=$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$			
$\cos(a-b)$	$=$	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$			
$\sin(a+b)$	$=$	$\sin a \cos b + \sin b \cos a$			
$\sin(a-b)$	$=$	$\sin a \cos b - \sin b \cos a$			
$\cos 2a$	$=$	$2\cos^2 a - 1$	$\sin 2a$	$=$	$2 \sin a \cos a$
	$=$	$1 - 2\sin^2 a$			
$\cos^2 a$	$=$	$\frac{1+\cos 2a}{2}$	$\sin^2 a$	$=$	$\frac{1-\cos 2a}{2}$
$\sin\theta$	$=$	$\frac{2t}{1+t^2}$			
$\cos\theta$	$=$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	avec t	$=$	$\tan\frac{\theta}{2}$
$\tan\theta$	$=$	$\frac{2t}{1-t^2}$			
$\tan(a+b)$	$=$	$\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$			

III. OPÉRATIONS À CONNAITRE

Méthode *(transformations très importantes à connaître)*

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$$

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right) = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}$$

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}\right) = 2\cos\frac{a-b}{2}e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Exemple *(linéariser des produits simples)*

on veut linéariser $\sin a \sin b$. On voit que ce terme apparaît dans $\cos(a+b)$. On écrit alors

$$\begin{array}{rcl} \cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) & = & \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a-b) - \cos(a+b) & = & 2 \sin a \sin b \end{array}$$

ce qui donne $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$. *remarque :* on peut également utiliser les formules d'Euler.

Exemple *(linéariser des puissances à l'aide des formules d'Euler)*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

exemple : $\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta})^3+3(e^{i\theta})^2e^{-i\theta}+3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2+(e^{-i\theta})^3}{8} = \frac{e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}}{8} = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$.

Exemple *(additionner des sinus ou cosinus)*

On veut additionner $\cos p + \cos q$. On utilise

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}\right) = 2\cos\frac{p-q}{2}e^{i\frac{p+q}{2}},$$

puis on prend la partie réelle, ce qui donne :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$

On peut également utiliser $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ avec $p = a+b$ et $q = a-b$, ce qui revient à $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.

Exemple *(développer en puissances de sinus ou cosinus)*

Exprimer $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$. Puisque $\sin 3\theta = \mathrm{Im}(e^{3i\theta})$,

$$\begin{array}{rcl} e^{3i\theta} & = & (e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\sin\theta\cos^2\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \\ & = & \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) + i(3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta) \end{array}$$

ainsi $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

Méthode *(Transformer des combinaisons linéaires sous la forme* $\boldsymbol{a\cos x + b\sin x}$*)*

on a $a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}((\cos x + i\sin x)(a-ib))$. Avec $R = |a-ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $a - ib = Re^{-i\varphi}$, cela donne $a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left(Re^{i(x-\varphi)}\right) = R\cos(x-\varphi)$.
En pratique, on factorise par $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right).$$

Puisque

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & = & \cos\varphi \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & = & \sin\varphi \end{array}\right.$. On termine alors grâce à la formule $\cos(x-\varphi)$.

Exemple *(Déterminer des sommes de sinus ou cosinus :)*

soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta.$$

On a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k.$$

Si $e^{i\theta} \neq 1$, alors on obtient

$$C_n + iS_n = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\left(\frac{-2i\sin((n+1)\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)}\right),$$

ce qui donne, après simplifications,

$$C_n = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs ne sont pas à connaître mais la méthode doit être entièrement maitrisée.

IV. EXERCICES

Exercice 4 *(Inégalité triangulaire généralisée)*

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité si et seulement s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $z_k = \lambda_k z_0$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.

Exercice 5

Déterminer les nombres complexes z tels que $|z| = |z+1| = 1$.

Exercice 6

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b|$, et étudier les cas d'égalité.

Exercice 7

Soient a, b et c trois complexes de module 1 avec $a \neq c$. Montrer que $\frac{a(b-c)^2}{b(a-c)^2} \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 8

1. On note $U_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$ et $V_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$. Déterminer U_n et V_n en fonction de n.
2. On note

$$U_n = \sum_{0 \leqslant 3k \leqslant n} \binom{n}{3k}, V_n = \sum_{0 \leqslant 3k+1 \leqslant n} \binom{n}{3k+1} \text{ et } W_n = \sum_{0 \leqslant 3k+2 \leqslant n} \binom{n}{3k+2},$$

Déterminer U_n, V_n et W_n en fonction de n.

Exercice 9

Soit n un entier, $n \geqslant 2$, et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.

Exercice 10

Pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on note $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x)$. Simplifier les deux écritures et vérifier que S_n est positive.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations

$$\cos(3x) + \sin(2x) = 0 \qquad \sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \qquad \sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$$

Exercice 12 *(Mines MP)* ✰

Soit a, b et c de module 1 tels que $a + b + c = 0$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Exercice 13 ✰

Soient trois complexes non nuls a, b et c tels que $a + b + c = 0$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Montrer que les trois complexes ont le même module. Que peut-on dire de plus ?

Exercice 14 *(Mines MP)* ✰

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{2ik\pi/n}\right)$.