

CHAPITRE 2 - DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Exercice 2.1

$$\begin{aligned} \rightarrow F_1 &= \frac{3X^2 + X - 2}{(X-1)^2(X+2)^2} = \frac{-17}{27(X+2)} + \frac{8}{9(X+2)^2} + \frac{17}{27(X-1)} + \frac{2}{9(X-1)^2} \\ \rightarrow F_2 &= \frac{3X+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)} = \frac{-2}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1} + \frac{2-X}{1+X+X^2} \\ \rightarrow F_3 &= \frac{1}{X^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} - \frac{X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} \right). \end{aligned}$$

Exercice 2.2

$$\begin{aligned} 1. \frac{1}{X(X+1)(X+2)} &= -\frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)} + \frac{1}{2X} \\ 2. \frac{1}{X(X^2+1)} &= \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}. \\ 3. \frac{1}{X^3+1} &= \frac{-X+2}{3(X^2-X+1)} + \frac{1}{3(X+1)}. \\ 4. \frac{2X+1}{(X^2-X)^2} &= \frac{1}{X^2} + \frac{4}{X} + \frac{3}{(X-1)^2} - \frac{4}{X-1}. \\ 5. \frac{X^4-1}{X^2(X+1)} &= X-1 + \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2}. \\ 6. \frac{X^4}{(X+1)(X^2-1)} &= X-1 + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{7}{4(X-1)^2} - \frac{1}{2(X+1)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.3

1. On peut factoriser Q par $X-a$: $Q(X) = (X-a)R(X)$. D'après la formule de Taylor, on a, si $n \geq \deg Q$,

$$Q = Q(a) + Q'(a)(X-a) + \frac{1}{2}Q''(a)(X-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}Q^{(n)}(a)(X-a)^n$$

On a alors, en multipliant par $(X-a)$, $(X-a)F(X) = \frac{P(X)}{Q'(a) + (X-a)(\dots)}$ et la valeur en a est $\frac{P(a)}{Q'(a)}$.

2. De même, on a $Q(X) = (X-a)^k R(X)$ avec $R(a) = \frac{Q^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$. On a alors

$$F(X) = \frac{\alpha}{(X-a)^k} + \dots$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{k!P(a)}{Q^{(k)}(a)}.$$

3. On applique la formule de la première question. On a $Q(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$ avec $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et $Q'(\omega_k) = n\omega_k^{n-1} = \frac{n}{\text{omega}_k}$ car $\omega_k^n = 1$.

On en déduit

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}.$$

Exercice 2.4

Si on note $F = \frac{P'}{P}$, alors on a $F' = \frac{P''P - P'^2}{P^2}$. On va donc s'intéresser à cette fraction rationnelle. Si

$$P = A \cdot \prod_{i=1}^d (X - x_i)^{n_i}$$

alors

$$P' = A \cdot \sum_{i=1}^d \left(n_i (X - x_i)^{n_i-1} \prod_{j \neq i} (X - x_j)^{n_j} \right)$$

et

$$F = \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{X - x_i}$$

Enfin $F' = - \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{(X - x_i)^2}$. Lorsque x n'est pas une racine de P , alors $F'(x) < 0$ et $P(x)P''(x) < P'^2(x)$. Si x est racine de P alors $P(x)P''(x) = 0 \leq P'^2(x)$.