3 DL, ÉQUIVALENTS

I. ÉQUIVALENTS

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

Définition 1 *(comparaison locale des fonctions)*

Soit f, g deux fonctions définies sur I, a dans ou au bord de I.

→ $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$: il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de a et une fonction ε définie sur $\mathscr{V}$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, tels que, pour $x \in I \cap \mathscr{V}$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

→ $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$: il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de a et une fonction M définie et bornée sur $\mathscr{V}$, tels que, pour $x \in I \cap \mathscr{V}$, $f(x) = g(x)M(x)$.

→ $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$: il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de a et une fonction ε définie sur $\mathscr{V}$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, tels que, pour $x \in I \cap \mathscr{V}$, $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$.

Propriété 1 *(en pratique)*

Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a, alors

$$\begin{aligned}
f(x) = \underset{a}{o}(g(x)) &\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\\
f(x) = \underset{a}{O}(g(x)) &\iff \text{il existe } M \geqslant 0, \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant M \text{ sur un voisinage de } a\\
f(x) \underset{a}{\sim} g(x) &\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1
\end{aligned}$$

Équivalence à un réel

→ Écrire $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$ équivaut à $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si $\boxed{\boldsymbol{\ell \neq 0}}$.

→ Écrire $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ signifie que f <u>est nulle</u> sur un voisinage de a et pas seulement que la limite de f est nulle.

Propriété 2 *(croissances comparées : échelles de grandeur en* 0*)*

→ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $x^\alpha \underset{0}{\ll} \dfrac{1}{|\ln x|^\beta} \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} |\ln x|^\beta \underset{0}{\ll} \dfrac{1}{x^\alpha}$.

→ si $\alpha < \beta$, $|\ln x|^\alpha \underset{0}{\ll} |\ln x|^\beta$ et $x^\beta \underset{0}{\ll} x^\alpha$

En résumé, si le terme tend vers l'infini, plus l'exposant est grand, plus il va « vite » vers l'infini. S'il tend vers 0, alors c'est le contraire.

Propriété 3 *(croissances comparées : échelles de grandeur en* $+\infty$*)*

→ si $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$, alors $\ln^\beta x \underset{+\infty}{\ll} x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} a^x$.

→ Si $\alpha < \beta$, alors $\ln^\alpha x \underset{+\infty}{\ll} \ln^\beta x$ et $x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} x^\beta$.

→ Si $1 < a < b$, alors $1 \underset{+\infty}{\ll} a^x \underset{+\infty}{\ll} b^x$.

Remarque : en posant $\alpha = \ln a$, on a $a^x = e^{\alpha x}$ - on peut alors utiliser l'échelle des fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ au lieu de $x \mapsto a^x$ avec $a > 1$.

Propriété 4 *(Produits et quotients sur les équivalents)*

Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors

→ $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$

→ f_1 et g_1 sont de même signe au voisinage de a - si l'une ne s'annule pas sauf éventuellement en a, l'autre non plus sur un voisinage de a,

→ si f_2 ou g_2 ne s'annule pas sauf éventuellement en a, $f_1/f_2 \underset{a}{\sim} g_1/g_2$,

→ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1^n \underset{a}{\sim} g_1^n$. Se généralise à une puissance réelle **fixe** si les fonctions sont strictement positives.

Opérations interdites

→ ajouter des équivalents entre-eux ou même d'ajouter un même terme à des termes équivalents,

→ composer des équivalents par la gauche : si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors $h(f(x))$ et $h(g(x))$ ne sont pas forcément équivalents.

Propriété 5 *(Composition)*

- → Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to b} h(x) = a$, alors $f\circ h \underset{b}{\sim} g\circ h$ (substitution)
- → $e^f \underset{a}{\sim} e^g$ si et seulement si $f-g \xrightarrow[a]{} 0$ (et pas lorsque $f \underset{a}{\sim} g$),
- → si $f \underset{a}{\sim} g$ et que f (ou g) tend vers **une limite finie ℓ positive ou nulle mais différente de 1, ou vers** $+\infty$ alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$ (avec des fonctions strictement positives).

Propriété 6 *(cas dérivable)*

Si f dérivable en a et $f'(a)\neq 0$ alors $f(a+h)-f(a) \underset{h\to 0}{\sim} f'(a).h$ (ou $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a).(x-a)$).

$\sin(x)$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\tan(x)$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\operatorname{sh} x$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\arcsin(x)$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\arctan(x)$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\ln(1+x)$	$\underset{0}{\sim}$	x
e^x-1	$\underset{0}{\sim}$	x	$(1+x)^\alpha-1$	$\underset{0}{\sim}$	αx	$\cos(x)-1$	$\underset{0}{\sim}$	$-\frac{x^2}{2}$	$\operatorname{ch}(x)-1$	$\underset{0}{\sim}$	$\frac{x^2}{2}$	$\operatorname{th}(x)$	$\underset{0}{\sim}$	x			

un seul terme significatif

On a $e^x \underset{0}{\sim} 1$ et $e^x-1 \underset{0}{\sim} x$ mais lorsqu'on écrit $e^x \underset{0}{\sim} 1+x$, le terme x n'est pas du tout significatif (on a aussi $e^x \underset{0}{\sim} 1-x$ ou $1+2x$ ou $1+x^2$ ...). Même si l'écriture est mathématiquement correcte, on supprime tout terme non significatif dans un équivalent afin notamment de ne pas enchaîner sur un erreur impardonnable !!!

II. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

remarque

Écrire un développement limité revient à écrire une égalité entre deux termes : la fonction et son développement limité (terme $x^n\varepsilon(x)$ **compris**). On peut donc remplacer $f(x)$ par son DL. Il faut en revanche bien comprendre qu'on ne sait rien sur le terme d'erreur $x^n\varepsilon(x)$ (à part la limite de ε en 0). Ainsi, on ne pourra en déduire qu'un comportement local (autour de 0) de la fonction ou encore une limite. Cela ne permettra par exemple **JAMAIS** de montrer une relation ou une inégalité sur un intervalle.

Proposition 7 *(existence théorique d'un DL)*

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, $a\in I$. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a et pour h dans un voisinage 0 (tel que $a+h\in I$)

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+h^n\varepsilon(h)\quad\text{avec }\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

Proposition 8 *(opérations sur les DL)*

en dehors des opérations usuelles simples (combinaison linéaire et produit), on a

- → *Intégration :* si $f\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ et si f' admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en intégrant terme à terme le DL de f' et en rajoutant $f(0)$:

$$\text{si } f'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n)\text{ , alors}$$

$$f(x)=f(0)+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+o(x^{n+1}).$$

- → *Dérivation :* si f et f' admettent des $DL(0)$ respectivement à l'ordre $n+1$ et n, alors la partie régulière du DL de f' s'obtient en dérivant la partie régulière du DL de f.
- → *Composition :* si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q et $\boxed{f(0)=0}$, alors $g\circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en tronquant au degré n le polynôme $Q\circ P$.
- → *Division :* il suffit de savoir inverser un développement limité. Une fois mis en facteur la partie principale de g, on se retrouve à inverser $g(x)=a_kx^k(1+u(x))$ où u est une fonction qui tend vers 0. On applique alors les règles de composition avec la fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x}$.

Dérivation, intégration

- → « primitiver » un DL ne pose pas de difficulté
- → on **ne peut pas** dériver un DL directement

Composition

Lorsqu'on doit composer des développements limités, la première chose à faire et **à ne jamais oublier**, est de vérifier qu'on compose bien au bon point. Si on doit calculer le $DL_3(0)$ de $\exp(\cos(x))$, il ne suffit par de remplacer u par $1-x^2/2+o(x^3)$ dans le $DL_3(0)$ de $\exp(u)$ puisque la limite de cos en 0 est 1.

DL et équivalents

- → il faut bien comprendre la grande différence entre ces deux notions. L'équivalent est un nouvel opérateur avec des règles bien précises. Un développement limité revient à écrire une égalité. On peut donc toujours remplacer une fonction par l'un de ses DL, du moment qu'on n'oublie pas le terme $o(x^n)$ ou $x^n\varepsilon(x)$. **On ne remplacera *JAMAIS* une fonction par un équivalent lorsqu'on travaille avec des égalités.**
- → Écrire un développement limité revient à écrire une fonction comme somme de termes de plus en plus négligeables. Le premier de ces termes est donc un équivalent de la fonction. Le DL est en quelque sorte une généralisation des équivalents qui permet d'utiliser beaucoup plus d'opérations (la somme par exemple). Il faut également remarquer qu'on aura souvent recours à un DL pour calculer un équivalent qui n'est pas immédiat.

L'essentiel *(justifier l'existence d'un développement limité en* 0*)*

- → en montrant qu'on peut écrire $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ au voisinage de 0 à l'aide des DL usuels et des opérations : combinaisons linéaires, produit, composition (et inverse/quotient) et intégration d'un DL (mais pas en dérivant!!!)
- → lorsque la fonction est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un voisinage de 0

III. COMPARAISON DE SUITES

On a des définitions similaires à celles pour les fonctions - la plupart du temps on utilise les versions particulières suivantes (elles ne fonctionnent plus lorsque les suites s'annulent une infinité de fois).

Proposition 9 *(comparaisons - version pratique)*

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites et les termes de (v_n) sont non nuls à partir d'un certain rang n_0, alors

- → on a $u_n = O(v_n)$ si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée.
- → on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- → on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Propriété 10 *(règles sur les comparaisons)*

- → Transitivité :
  - Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
  - Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ (idem avec O).
- → Sommes :
  - Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
  - on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n + v_n \sim v_n$.
  - **pas de résultat sur somme et différence d'équivalents**.
- → Produits :
  - Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$ alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$ (résultat semblable avec le quotient).
  - Si $u_n = o(u'_n)$ et $v_n = o(v'_n)$ alors $u_n v_n = o(u'_n v'_n)$ (résultat semblable avec O mais pas avec le quotient).
- → Substitution :
  - Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$.

Formules fausses

On n'a **SURTOUT PAS** les résultats suivants :

- → si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n)$
- → si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n v_n \sim v_n$.
- → si $u_n \sim v_n$ alors $f(u_n) \sim f(v_n)$.

Propriété 11 *(Ordres de grandeur)*

- → Pour les suites tendant vers $+\infty$: soient $\alpha' > \alpha > 0$, $\beta' > \beta > 0$ et $b > a > 1$, on a

$$(\ln n)^\alpha \ll (\ln n)^{\alpha'} \ll n^\beta \ll n^{\beta'} \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n.$$

- → Pour les suites de limite nulle : soient $\alpha' > \alpha > 0$, $\beta' > \beta > 0$ et $0 < a < b < 1$, on a

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll a^n \ll b^n \ll \frac{1}{n^{\beta'}} \ll \frac{1}{n^\beta} \ll \frac{1}{(\ln n)^{\alpha'}} \ll \frac{1}{(\ln n)^\alpha}.$$

IV. DL À CONNAITRE

$$
\begin{array}{ccl}
\sin x & = & x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}) \\
\cos x & = & 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) \\
e^x & = & 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \\
\operatorname{sh} x & = & x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{ch} x & = & 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) \\
\frac{1}{1+x} & = & 1-x+x^2+\dots+(-1)^n x^n+o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n) \\
\ln(1+x) & = & x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n) \\
\arctan(x) & = & x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha & = & 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n) \\
\tan x & = & x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)
\end{array}
$$

V. EXERCICES

Exercice 1

Comparer en $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$ (les paramètres sont des réels).

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes (en essayant de faire le moins de calculs possibles) :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arcsin x}{x\tan^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1}$

Exercice 3

Soient a et b deux réels, donner un équivalent simple en 0 de $\frac{a}{\sin(x)} - \frac{b}{\ln(1-x)}$.

Exercice 4

Calculer les développements limités (ou asymptotiques) suivants

1. $\ln(\frac{\sin x}{x})$ en 0 à l'ordre 4.
2. $\ln(1+\cos x)$ en 0 à l'ordre 5.
3. $(1+x)^{1/x}$ en 0 à l'ordre 2.
4. $(\cos x)^{\sin x}$ en 0 à l'ordre 3.
5. $\frac{x}{e^x-1}$ en 0 à l'ordre 2.
6. $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ en $+\infty$ à l'ordre 2.

Exercice 5

Donner un équivalent sous la forme la plus simple possible aux suites suivantes (puis donner leur limite éventuelle) :

a) $u_n = \dfrac{n^2+\ln n}{2n+3n(n+1)}$

b) $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n+\ln n}$

d) $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+2}$

e) $u_n = \dfrac{n!+2^n}{3^n+n^4}$

f) $u_n = \sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$

g) $u_n = \ln(\sin(\frac{1}{n}))$

h) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$

i) $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

j) $u_n = \dfrac{a^n+n^a}{n^{2a}+a^{2n}}$ (où $a>0$).

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes (en essayant de faire le moins de calculs possibles) :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x-x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x-x^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ (avec $a,b>0$).

f) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x+\cos x)^{1/x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2(e^{1/x}-e^{1/(x+1)})$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

Exercice 7

Ranger les expressions suivantes dans l'ordre croissant (pour la relation de comparaison « est négligeable devant en $+\infty$ »). Lorsque, pour deux expressions, aucune n'est négligeable devant l'autre, on précisera les autres relations de comparaison (équivalence, l'une est de l'ordre de l'autre, les deux sont du même ordre ou encore on ne peut rien dire) :

$$\frac{\ln x}{x^2}, \frac{1}{x^{3/2}}, \frac{\ln(2+\sin x)}{x^2+1}, \frac{x^2+\sin x}{x^4+1}, \frac{\sin x}{x^2}, \frac{\ln(\ln x)}{x^2}, \frac{2\sqrt{x}\ln x}{1+x^{5/2}}, \frac{\sqrt{x}+\ln x}{1+x^{5/2}}, 3e^{-2\ln x}.$$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $I=]-\pi,+\pi[$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ sinon. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Exercice 9

Justifier $\arccos(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

Exercice 10

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 11

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x+\ln(1+x)$ admet au voisinage de 0, une fonction réciproque et déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f^{-1} en 0.

Exercice 12

Soit $f_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ où $t\in\mathbb{R}_+^*$ est fixé.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f_t admet en 0 un développement limité à tout ordre n. Montrer que ce développement est de la forme
$$f_t(x) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t)x^k + o(x^n)$$
où P_k est un polynôme.
3. Montrer la relation $(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t)$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.