

CHAPITRE 4 - INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Exercice 4.1

Puisque f est strictement positive, on a $f = (\sqrt{f})^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t) dt \right) \cdot \left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right),$$

c'est-à-dire $\left(\int_a^b f(t) dt \right) \cdot \left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right) \geq \left(\int_a^b dt \right)^2 = (b-a)^2$. De plus, il y a égalité si et seulement si les fonctions \sqrt{f} et $1/\sqrt{f}$ sont proportionnelles, c'est-à-dire lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}$ (et même $k > 0$) tel que $\sqrt{f} = k/\sqrt{f}$. Ainsi il y a égalité si et seulement si f est constante.

Exercice 4.2

a) on a directement une somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, définie et continue sur $[0, 1]$. La limite vaut alors $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

b) On ne parvient pas à faire apparaître une somme de Riemann. Ici un simple encadrement convient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

ce qui donne

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Par encadrement, la limite est 1.

c) On récrit l'expression sous la forme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n}$, somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0, 1]$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. La limite vaut $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

d) Somme de Riemann pour $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. La limite est $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$ (pourquoi?).

e) On encadre en utilisant $x-1 < [x] \leq x$. On note S_n la somme recherchée et on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{n}{n^{3/2}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}.$$

chaque coté converge vers $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$

Exercice 4.3

a) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$

b) les fonctions qui apparaissent sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1/2]$. Cela permet d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I = \int_0^{1/2} \arctan \sqrt{1-x^2} dx &= \left[x \arctan \sqrt{1-x^2} \right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+1-x^2)} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)} dx \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable « $x = \sin u$ » ou « $u = \arcsin(x)$ » :

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 u}{2 - \sin^2 u} du$$

Puisque l'expression « $\frac{\sin^2 u}{2 - \sin^2 u} du$ » est invariante en remplaçant u par $u + \pi$, on peut effectuer le changement de variable $v = \tan u$. Cela donne, avec $\sin^2 u = \tan^2 u \cos^2 u = \frac{\tan^2 u}{1 + \tan^2 u}$,

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 u}{2 - \sin^2 u} du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{v^2}{1+v^2}}{2 - \frac{v^2}{1+v^2}} \frac{1}{1+v^2} dv = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)} dv$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)} = \frac{2}{2+v^2} - \frac{1}{1+v^2}$$

et enfin

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)} dv = \sqrt{2} \arctan \frac{1}{\sqrt{6}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

On trouve alors

$$\int_0^{1/2} \arctan \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \arctan \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\pi}{6}$$

- c) $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$
 d) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
 e) $\frac{\pi(b-a)^2}{8}$

Exercice 4.4

- a) $\frac{1}{2}x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan(x)$
 b) $\frac{1}{2}(1+x^2)(\arctan x)^2 - x \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
 c) $-\frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{1}{15} \cos^2 x \sin^2 x + \frac{2}{15} \sin x$
 d) $\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{1}{2}e^x \sqrt{6}\right)$
 e) $e^x(2x^2 - 3x + 4)$
 f) $\frac{e^{3x}}{10}(\cos x + 7 \sin x)$
 g) $\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \arctan(x)$
 h) $\frac{1}{5} \operatorname{sh} x \sin(2x) - \frac{2}{5} \operatorname{ch} x \cos(2x)$
 i) $\arcsin(x-1)$
 j) $\frac{1}{5} \ln|x+2| - \frac{1}{10} \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{10} \arctan \frac{x+1}{2}$

Exercice 4.5

1. $J_1 = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln \frac{1+e}{2}$. On a immédiatement $J_0 + J_1 = 1$, ce qui donne $J_0 = 1 - J_1$. Enfin

$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 e^{nx} dx = \frac{e^n - 1}{n}.$$

2. On a $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 e^{nx} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx > 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, 1]$. La suite est donc croissante. Une telle suite converge ou diverge vers $+\infty$.

→ méthode 1 : supposons que la suite converge vers ℓ . Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n + J_{n+1}) = 2\ell$, ce qui contredit le fait que cette limite est infinie (question 1).

→ méthode 2 : on a $2J_n \geq J_n + J_{n-1}$ de limite infinie.

→ méthode 3 : par une simple minoration $J_n \geq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e+1} dx$ de limite infinie.

3. On peut essayer plusieurs méthodes

→ premier encadrement : on a $1 \leq 1 + e^x \leq 1 + e$ lorsque $x \in [0, 1]$. Cela donne

$$\frac{1}{1+e} \frac{e^n - 1}{n} \leq 2J_n \leq \frac{e^n - 1}{n},$$

mais cela ne permet pas de conclure. On obtient toutefois $J_n = \mathcal{O}\left(\frac{e^n}{n}\right)$.

→ Par encadrement : on a $2J_n \leq J_n + J_{n+1} \leq 2J_{n+1}$. Cela donne l'encadrement (après décalage d'indice)

$$\frac{e^{n-1} - 1}{n-1} \leq 2J_n \leq \frac{e^n - 1}{n},$$

mais les deux termes aux extrémités ne sont pas équivalents (rapport $1/e$). On peut déjà constater que ce sont des termes de l'ordre de $\frac{e^n}{n}$.

→ on intègre par parties afin de faire apparaître une nouvelle intégrale négligeable :

$$J_n = \left[\frac{e^{nx}}{n(1+e^x)} \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{(1+e^x)^2} dx = \frac{e^n}{n(1+e)} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{(1+e^x)^2} dx.$$

Avec le même type d'encadrement que précédemment, on montre que la nouvelle intégrale est en $\mathcal{O}\left(\frac{e^n}{n^2}\right)$ et elle est donc négligeable

devant le premier terme de l'expression. On en déduit que $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{n(1+e)}$.

Exercice 4.6

On note I_n l'intégrale à chaque question.

- $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
- $0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nx} dx = \frac{1-e^{-n}}{n}$. Par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
- même principe : $0 \leq I_n \leq \frac{\tan 1}{n+1}$.
- La majoration précédente donne $0 \leq I_n \leq \frac{n}{n+1} \tan 1$. Elle ne permet pas de conclure. On intègre par parties pour augmenter la puissance de n au dénominateur.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[n \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan x \right]_0^1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} (1 + \tan^2 x) dx \\ &= \frac{n}{n+1} \tan 1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} (1 + \tan^2 x) dx. \end{aligned}$$

Comme précédemment la nouvelle intégrale tend vers 0. Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \tan 1$.

Exercice 4.7

- Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1$. On compare I_n à $\int_0^1 1 dx$:

$$I_n - \int_0^1 1 dt = - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx.$$

Ainsi $|I_n - 1| \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$.

- Cela revient à montrer que $I_n - 1 \sim -\frac{\ln 2}{n}$, ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - I_n) = \ln 2$. On a

$$n(1 - I_n) = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 x \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx = [x \ln(1+x^n)]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

De plus $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, de limite nulle. On a montré ce que l'on souhaitait.

Exercice 4.8

→ On a $F(x) = \int_0^x t f(t) dt + \int_x^1 x f(t) dt = \int_0^x t f(t) dt - x \int_1^x f(t) dt$. Cette expression permet de montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ (théorème sur les primitives) et

$$F'(x) = x f(x) - x f(x) - \int_1^x f(t) dt = - \int_1^x f(t) dt = \int_x^1 f(t) dt.$$

On en déduit alors $F''(x) = -f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

→ On a déjà $F'(u) = \int_u^1 f(t) dt$ si $u \in [0, 1]$. Puisque $F(0) = \int_0^1 \min(0, t) f(t) dt = 0$, la fonction F est la primitive de F' qui s'annule en 0, d'où

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t) dt \right) du.$$

Exercice 4.9

- Soit $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$. La fonction g est continue sur \mathbb{R} . Elle admet une primitive G sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(2x) - G(x)$, ce qui donne la définition, continuité et dérivabilité de f sur \mathbb{R} , avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2g(2x) - g(x)$.
 → Par un changement de variable « $u = -t$ », on montre que f est impaire. On ne l'étudie que sur \mathbb{R}^+ .
 → On résout, sur \mathbb{R}^+ , $f'(x) \geq 0$. Cela équivaut à $2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \geq \sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}$, on encore, en élevant au carré (tout est positif), $x^4 \leq \frac{1}{4}$. La fonction f est croissante sur $[0, 1/\sqrt{2}]$, puis décroissante.
 → Pour $x > 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2x}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- On a $g(0) = 1$ et $f'(0) = 2 - 1 = 1$. Puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) - f(x) = f(x) \sim x f'(0) = x$.
- On a

$$f\left(\frac{1}{2x}\right) = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \stackrel{u=1/t}{=} \int_{2x}^x \frac{u^2}{\sqrt{u^4 + u^2 + 1}} \frac{-du}{u^2} = f(x).$$

En combinant avec la question précédente, on a $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Exercice 4.10

1. La fonction $g : t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur \mathbb{R} et paire. La fonction F (primitive qui s'annule en 0) est donc de classe \mathcal{C}^1 et impaire sur \mathbb{R} . On a $F' = g$ donc F est croissante. Pour $x > 0$, on a $F(x) \geq \int_0^x 1 dt = x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$. En conclusion F est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
2. L'équation est équivalente à $F(f(x)) - F(x) = 1$ soit $F(f(x)) = 1 + F(x)$. Puisque F est bijective, cela équivaut à $f(x) = F^{-1}(1 + F(x))$. Cela justifie l'existence de f . Par composition, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 . Par composition des fonctions croissantes F^{-1} et $1 + F$, la fonction f est croissante.
3. La symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$ est l'application $(x, y) \mapsto (-y, -x)$. Pour montrer que la droite est un axe de symétrie du graphe \mathcal{C} , on doit montrer que, si $(x, y) \in \mathcal{C}$, alors $(-y, -x) \in \mathcal{C}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1$. On effectue le changement de variable « $u = -t$ » dans cette relation. Cela donne $-\int_{-x}^{-f(x)} e^{u^2} du = 1$ soit $\int_{-f(x)}^{-x} e^{u^2} du = 1$. On en déduit que le point de coordonnées $(-f(x), -x)$ est encore sur \mathcal{C} .

Exercice 4.11

1. Pour la première inégalité, une étude de la fonction différence suffit. On peut procéder de même pour la seconde inégalité ou utiliser la concavité de la fonction logarithme : la courbe d'équation $y = \ln(1+x)$ est située sous sa tangente en 0, d'équation $y = x$. Cela donne l'inégalité pour tout $x > -1$.
2. On aimerait passer au logarithme, mais rien de garanti que les facteurs sont positifs. En revanche $\frac{k}{n} \in [0, 1]$, f est continue sur $[0, 1]$ donc est bornée et il existe $M > 0$ tel que $|f| \leq M$ sur $[0, 1]$. On a alors $\left| \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M|x|}{n}$ et ce nombre est inférieur à $1/2$ dès que n est supérieur à un certain n_0 (dès que $n > 2M|x|$). On peut travailler pour n suffisamment grand et ainsi tous les facteurs sont strictement positifs. On note P_n le produit de n termes. On a alors

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

Intuitivement, lorsque n est grand, le facteur $\ln \left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$ se comporte comme $\frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, sauf qu'on ne peut pas utiliser d'équivalent n'importe comment (ne surtout pas les sommer). On utilise l'encadrement de la première question (pour n suffisamment grand toujours, afin d'avoir $\left| \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{2}$)

$$\frac{x}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln P_n \leq \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On applique le résultat sur les sommes de Riemann. Le terme de droite a pour limite $x \int_0^1 f(t) dt$. On majore le terme supplémentaire :

$$\left| \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{x^2}{n^2} n.M = \frac{Mx^2}{n},$$

de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement, par encadrement, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln P_n = x \int_0^1 f(t) dt,$$

et par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \exp \left(x \int_0^1 f(t) dt \right)$.

3. Avec la fonction $f : u \mapsto \frac{1}{1+u}$, on a l'écriture générale. La limite cherchée est donc $\exp(x \ln 2) = 2^x$.

Exercice 4.12

On découpe l'intégrale en morceaux de longueur T . Soit $x > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \leq x < (n+1)T$. Plus précisément, on a $n = E(x/T)$, qu'on note $n(x)$. L'encadrement précédent donne $1 - \frac{T}{x} < \frac{n(x)T}{x} \leq 1$, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(x)}{x} = \frac{1}{T}$ (on s'en sert après). On a alors, en notant $I(x) = \int_0^x f(t) dt$,

$$\frac{1}{x} I(x) = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=1}^{n(x)} \int_{(k-1)T}^{kT} f(t) dt + \int_{n(x)T}^x f(t) dt \right) = \frac{n(x)}{x} \int_0^T f(t) dt + \frac{1}{x} \int_{n(x)T}^x f(t) dt,$$

en utilisant la périodicité de f . Le premier terme tend vers la valeur moyenne $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$. Pour le second terme, il suffit de majorer (on intègre sur un segment plus petit qu'une période). La fonction f est continue et donc bornée sur $[0, T]$ (et donc sur \mathbb{R}). On note M un majorant de $|f|$. Alors

$$\left| \int_{n(x)T}^x f(t) dt \right| \leq \int_{n(x)T}^x |f(t)| dt \leq \int_{n(x)T}^{(n(x)+1)T} M dt = MT.$$

Par majoration, on obtient une limite nulle pour le second terme, ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I(x)}{x} = \frac{I(T)}{T}$.

Exercice 4.13

Supposons que f change $p < n$ fois de signe sur $[a, b]$. On note $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_p \leq b$ les points où f s'annule en changeant de signe. On considère $P = \prod_{k=1}^p (X - x_k)$ et $g(t) = f(t)P(t)$. Le polynôme P est de degré au plus $n-1$ et peut se développer en $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$. Par linéarité de l'intégrale, puisque $p \leq n-1$,

$$\int_a^b f(t)P(t) dt = \sum_{k=0}^p a_k \int_a^b t^k f(t) dt = 0.$$

Or la fonction g est continue et de signe constant ($t - x_k$ est négatif à gauche de x_k et positif après donc change le signe d'un seul coté). Puisque g est d'intégrale nulle sur $[a, b]$, la fonction g est identiquement nulle sur $[a, b]$. Ainsi, pour tout t différent de l'un des x_k , on a $f(t)P(t) = 0$ et $P(t) \neq 0$ donc $f(t) = 0$. Finalement f est nulle partout ce qui contredit l'hypothèse.

Exercice 4.14

le terme dans la somme est petit, proche de $\frac{1}{k}$ lorsque k est grand (ce qui sera le cas puisque $k > n$). On note $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et on essaie d'étudier la différence $u_n - v_n$. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$ (somme de Riemann - on a $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$). On regroupe les termes proches et on est amené à étudier la différence $\sin^2 x - x^2$ avec x compris entre $1/\sqrt{n+1}$ et $1/\sqrt{2n}$. On a

$$\sin^2 x - x^2 = (\sin x - x)(\sin x + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{6} \cdot (2x) = -\frac{x^4}{3},$$

on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = -\frac{1}{3}$. La fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = -\frac{1}{3}$ est continue et donc bornée sur $[0, 1]$. Il existe M tel que, pour tout $x \in]0, 1]$, $|\sin^2 x - x^2| \leq Mx^4$ et cette relation est vraie pour $x = 0$.

remarque : on peut aussi utiliser la continuité de f en 0 afin d'obtenir $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, \alpha]$, $|f(x)| \leq 1$ (et alors travailler avec n de sorte que $\frac{1}{\sqrt{n}} < \alpha$). On peut également utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour comparer $\sin^2 x$ à x^2 , on encore obtenir - toujours avec la

formule de Taylor - que $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$ et ainsi

$$|\sin^2 x - x^2| = |(\sin x - x)(\sin x + x)| \leq 2|x| \cdot \frac{|x|^3}{6} = \frac{x^4}{3}$$

Ça laisse pas mal de façons différentes pour obtenir ces inégalités.

Une fois que cela est fait, on a (on peut remplacer le terme $\frac{1}{3}$ par 1 ou par M selon ce qu'on a fait avant)

$$|u_n - v_n| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{3k^2} \leq \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n}$$

cela donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 4.15

1. Soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = M$. Par continuité, il existe $[A, B] \subset [a, b]$ contenant x_0 et avec $B > A$ tel que $f(x) \geq M - \varepsilon$ si $x \in [A, B]$. On a alors

$$\int_a^b f(t)^n dt \geq \int_A^B f(t)^n dt \geq (B - A)(M - \varepsilon)^n.$$

on a le résultat avec $\alpha = B - A > 0$.

2. Soit $\varepsilon \in]0, M[$. On utilise α comme dans la question précédente et on a alors

$$\alpha(M - \varepsilon)^n \leq \int_a^b f(t)^n dt \leq (b - a)M^n$$

puis

$$\alpha^{1/n}(M - \varepsilon) \leq \left(\int_a^b f(t)^n dt \right)^{1/n} \leq (b - a)^{1/n} M.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{1/n}(M - \varepsilon) = M - \varepsilon$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_1$, $M - 2\varepsilon \leq \alpha^{1/n}(M - \varepsilon)$. De même il existe n_2 tel que, pour $n \geq n_2$, $(b - a)^{1/n} M \leq M + 2\varepsilon$. On déduit qu'il existe $n_0 = \max(n_1, n_2)$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$M - 2\varepsilon \leq \left(\int_a^b f(t)^n dt \right)^{1/n} \leq M + 2\varepsilon,$$

On a bien obtenu $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f(t)^n dt \right)^{1/n} = M$.

Exercice 4.16

v1) on note F une primitive de f sur \mathbb{R} . On a $f(x) = F(ax)$. Par récurrence, on montre que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On a notamment $f'(x) = af'(ax)$, $f''(x) = a^2 f''(ax) = a^3 f''(a^2x)$ et, par récurrence $f^{(n)}(x) = a^{1+2+\dots+n} f^{(n)}(a^n x)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0) = 0$. On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre, ce qui donne

$$f(x) = 0 + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Si on note $M_x = \sup_{t \in [0,x]} |f(t)|$, en utilisant la relation $|f^{(n+1)}(t)| \leq |f^{(n+1)}(a^n t)| \leq M_x$, on obtient $|f(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M_x$. Par croissance comparée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \text{ si bien que } f(x) = 0 \text{ - cela pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

v2) Plus simplement (mais ça ressemble beaucoup), on fixe $A > 0$ et on note $M = \sup_{x \in [-A,A]} |f(x)|$. On a alors, pour $x \in [-A, A]$, $|f(x)| \leq \left| \int_0^{ax} M dt \right| = Ma|x| \leq M|x|$, puis en reportant dans la même équation, $|f(x)| \leq \left| \int_0^{ax} M t dt \right| = M \frac{a^2 x^2}{2} \leq \frac{Mx^2}{2}$. Par récurrence, on a $|f(x)| \leq M \frac{|x|^n}{n!}$. Pour tout $x \in [-A, A]$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ ce qui donne $f(x) = 0$. La fonction f est nulle sur tout segment $[-A, A]$ donc sur \mathbb{R} .

Exercice 4.17

- Si la fonction g existe, alors $f'(t) = g'(t)f(t)$ et $g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. On a donc, si $t_0 \in I$, $g(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du$. Réciproquement, notons $g : t \mapsto \alpha + \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du$. On choisit α de sorte que $g(t_0) = \alpha$ vérifie $f(t_0) = \exp(\alpha)$ (la fonction est surjective de \mathbb{C} sur \mathbb{C}^*). On considère $h = f \cdot \exp(-g)$. On a $h' = (f' - f g') \exp(-g) = 0$ car $g' = f'/f$. Ainsi h est constante et $h(t_0) = 1$ donc, pour tout $t \in I$, $h(t) = f(t) \exp(-g(t)) = 1$ et $f(t) = \exp(g(t))$.
- on reprend les calculs précédents. On a $g(2\pi) = g(0) + \int_0^{2\pi} \frac{f'(u)}{f(u)} du$. Or $f(2\pi) = f(0)$, ce qui donne $\exp(g(2\pi) - g(0)) = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = 2ik\pi$.

Exercice 4.18

- On peut effectuer le changement de variable « $x = \lambda t$ ». Cela donne

$$\int_0^u |\sin(\lambda t)| dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda u} |\sin(x)| dx = u \frac{1}{\lambda u} \int_0^{\lambda u} |\sin(x)| dx.$$

La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est π périodique. On montre (voir autre exercice) que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \int_0^X |\sin x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin x| dx = \frac{2}{\pi}.$$

Finalement, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^u |\sin(\lambda t)| dt = \frac{2}{\pi} u$. Par différence, pour tout $\alpha, \beta > 0$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)| dt = \frac{2}{\pi} (\beta - \alpha).$$

- On commence par traiter le cas d'une fonction en escalier puis on étend le résultat aux fonctions continues par morceaux.
→ soit f en escalier sur $[a, b]$ et $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ une subdivision associée avec $f = m_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a

$$\int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\sin(\lambda t)| dt.$$

Par linéarité, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} m_k (a_{k+1} - a_k) = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt$.

- Soit $\varepsilon > 0$ et g une fonction en escaliers telle que $|f - g| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ (le dénominateur apparaît à la fin des majorations... on l'a modifié a posteriori). On a trois quantités qui sont « proches » : les intégrales de f et g , celles multipliées par $|\sin|$ et le lien entre la fonction de λ pour

g et sa limite en fonction de g . On va donc faire intervenir ces trois différences :

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt \right| \\
 & \leq \left| \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt - \int_a^b g(t) |\sin(\lambda t)| dt \right| \\
 & \quad + \left| \int_a^b g(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b g(t) dt \right| + \left| \frac{2}{\pi} \int_a^b g(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt \right| \\
 & \leq \int_a^b |f(t) - g(t)| |\sin(\lambda t)| dt \\
 & \quad + \left| \int_a^b g(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b g(t) dt \right| + \frac{2}{\pi} \int_a^b |f(t) - g(t)| |\sin(\lambda t)| dt \\
 & \leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_a^b g(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b g(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{3}
 \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) |\sin(\lambda t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b g(t) dt$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq A$, on ait

$$\left| \int_a^b g(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b g(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et ainsi, pour tout $\lambda > A$,

$$\left| \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

On a bien prouvé que le résultat subsiste si f est continue par morceaux sur $[a, b]$.