6 CONVEXITÉ

I. BARYCENTRES

Définition 1 *(fonction de Leibniz, barycentre)*

Si $\{(A_i,\alpha_i)\}_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ est un ensemble de points pondérés, on note $f(M)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{A_iM}$ et $m=\sum_{i=1}^{p}m_i$. On a pour tout O, M, $f(M)=f(O)+m\overrightarrow{OM}$, d'où

- → si $m=0$, alors f est un vecteur constant,
- → si $m\neq 0$, alors f est bijective et
  - il existe un unique point G tel que $f(G)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{A_iG}=\overrightarrow{0}$,
  - pour tout M, $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{A_iM}=m\overrightarrow{GM}$.

Lorsque $m\neq 0$, on note $G=\mathrm{bar}\big((A_i,\alpha_i), i\in[\![1\,;p]\!]\big)$

Propriété 1 *(barycentres)*

Soit $\{(A_i,\alpha_i)\}_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ de masse totale non nulle

- → homogénéité : pour tout $k\in\mathbb{R}$, $\mathrm{bar}\big((A_i,\alpha_i), i\in[\![1\,;p]\!]\big)=\mathrm{bar}\big((A_i,k\alpha_i), i\in[\![1\,;p]\!]\big)$.
- → associativité : $\mathrm{bar}\big((A_i,\alpha_i)\big)=\mathrm{bar}((G_1,m_1),(G_2,m_2))$ si $m_1=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$ et $m_2=\sum_{i=k+1}^{p}\alpha_i$ sont non nuls, $G_1=\mathrm{bar}\big((A_i,\alpha_i), i\in[\![1\,;k]\!]\big)$, $G_2=\mathrm{bar}\big((A_i,\alpha_i), i\in[\![k+1\,;p]\!]\big)$. On peut généraliser en remplaçant n'importe quel paquet de points de masse totale non nulle par le barycentre avec sa masse.
- → soit A, B deux points.
  - $\{\lambda A+\mu B, \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \lambda+\mu\neq 0\}=\{\lambda A+(1-\lambda)B, \lambda\in\mathbb{R}\}$ est la droite (AB),
  - $\{\lambda A+\mu B, \lambda,\mu\geqslant 0, \lambda+\mu\neq 0\}=\{\lambda A+(1-\lambda)B, \lambda\in[0,1]\}$ est le segment $[AB]$.

Exercice 1

Soient a, b et c trois réels distincts. Exprimer b comme barycentre de a et c.

II. PARTIES CONVEXES

Définition 2 *(partie convexe d'un $\mathbb{K}$-ev E)*

On dit que $A\subset E$ est *convexe* lorsque, pour tout $x, y\in A$ et $\lambda\in[0,1]$, $\lambda x+(1-\lambda)y\in A$.

Propriété 2 *(convexité)*

- → Si A est convexe, pour tout $\{(A_i,\alpha_i)\}_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ avec $A_i\in A$, $\alpha_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i>0$, le barycentre $\mathrm{bar}\big((A_i,\alpha_i), i\in[\![1\,;p]\!]\big)$ est toujours dans A,
- → une intersection de convexes est convexe,
- → on appelle combinaison linéaire convexe d'éléments de A tout vecteur x qui s'écrit $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$ avec $a_i\in A$, $\lambda_i\geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ (barycentre des (a_i,λ_i). Un convexe est stable par combinaisons linéaires convexes.

Exercice 2

Montrer que la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ ($B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\leqslant 1\}$) est convexe. Idem avec la boule unité ouverte ($B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2<1\}$)

III. FONCTIONS CONVEXES

Définition 3 *(fonction convexe)*

La fonction f est convexe sur I lorsque, pour tout $x, y\in I$ et $\lambda\in[0,1]$,

$$f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

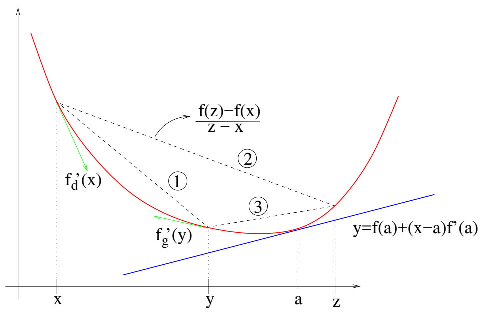
Remarque : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On note $Epi(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in I \text{ et} f(x) \leqslant y\}$ l'épigraphe de f.

Exercice 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. Montrer que f est une fonction convexe si et seulement si $Epi(f)$ est une partie convexe.

Propriété 3 *(caractérisation des fonctions convexes)*

On a l'équivalence
- → f est convexe sur I,
- → si $x < y < z$, $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$ (formule des 3 pentes : ① ⩽② ⩽ ③),
- → pour tout $a \in I$, $u \mapsto \dfrac{f(u)-f(a)}{u-a}$ est croissante sur $I \backslash \{a\}$.



Exercice 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Soient $a < b$ dans I. On note (D) la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. Montrer que le graphe de f est sous la droite (D) entre A et B et au dessus en dehors.

Propriété 4

Si f est convexe sur I,
- → $f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x_i)$ avec $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ et $x_i \in I$,
- → f admet une dérivée à droite et à gauche en tout point a de $\mathring{I}$ et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$,
- → f est continue sur $\mathring{I}$,
- → si $x < y$, $f'_d(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_g(y)$,
- → f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$,
- → si f est dérivable en a, alors, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a)$ (courbe au dessus de ses tangentes).

Propriété 5 *(autres caractérisations)*

- → Si f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur $\mathring{I}$.
- → Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.
- → Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

Propriété 6 *(Inégalités de convexité)*

- → position par rapport à la tangente :
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x \quad , \quad \forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$$
- → position par rapport à une corde :
$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$$
- → avec n valeurs :
$$\text{si } x_1, \ldots, x_n > 0, \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \qquad \text{(concavité du logarithme)}$$

L'essentiel

- → définition de la convexité $f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, interprétations géométriques
- → position par rapport à la tangente *lorsque la fonction est dérivable en un point,*
- → inégalité des trois pentes (simplement avec f convexe, *sans autre hypothèse de régularité*),
- → régularité et caractérisation avec f'' lorsque f est $\mathscr{C}^2$.
- → inégalités de convexité

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 6

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} \leqslant \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

Exercice 7

Soient f et g deux fonctions convexes sur I. Montrer que $\sup(f, g)$ est convexe sur I. Que peut-on dire de $\inf(f, g)$?

IV. Exercices

Exercice 8

Montrer qu'une fonction à la fois convexe et concave sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est affine.

Exercice 9

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Monter que
$$1 + \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i)\right)^{1/n}.$$
3. Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs. Montrer que
$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\right)^{1/n}.$$

Exercice 10

Soit $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ avec $f(a) = f(b) = 0$ ($a < b$) et $|f''| \leqslant M$. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leqslant M(x - a)(b - x)$.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

1. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que $f \geqslant 0$.
2. On suppose que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$. Montrer que la courbe est au dessus de l'asymptote.

Exercice 12 *(Inégalités de Minkowski et de Hölder)*

On considère des réels strictement positifs x, y, p, q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ainsi que $2n$ réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

1. Montrer que $xy \leqslant \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$.
2. On suppose que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1$.
3. En déduire l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$
4. On suppose de plus que $p > 1$. Déduire de l'inégalité précédente l'inégalité de Minkowski :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$
Indic : écrire $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$ et appliquer convenablement l'inégalité précédente.

Exercice 13

1. Soit f une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}$ et g une fonction convexe sur I (à valeurs dans $\mathbb{R}$). Montrer que $f \circ g$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln f$ est convexe (on dit que f est logarithmiquement convexe) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.