7 Structures

I. Applications

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

Définition 1

- → f est une *surjection* si tout élément de F admet au moins un antécédent.
- → f est une *injection* si tout élément de F admet au plus un antécédent
- → f est une *bijection* si tout élément de F admet un et un seul un antécédent

Méthode

Soit $f : E \to F$

- → Surjective : soit $y \in F$, on explicite les conditions qui traduisent que $y \in F \ldots$ on a trouvé/construit $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- → Injectivité : on prouve que si deux éléments x et x' ont la même image alors ce sont les mêmes : soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x') \ldots$ on a $x = x'$.
- → f est bijective : la plupart du temps, on montre séparément l'injectivité et la surjectivité.

Définition 2 *(Application réciproque)*

Soit f est une application bijective de E dans F. Il existe une unique application g de F dans E telle que $y = f(x)$ équivaut à $x = g(y)$ (pour $x \in E$ et $y \in F$). Cette application est appelée *application réciproque* de f (ou simplement *réciproque* ou *inverse*), elle est notée f^{-1}.

Proposition 1 *(Composition)*

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- → Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- → Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- → Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 1

Montrer ces propriétés.

Inverses à droite ou à gauche

$f : E \to F$ est inversible lorsqu'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ (inverse à gauche) et $f \circ g = id_F$ (inverse à droite). L'existence d'une seule de ces conditions ne permet pas d'affirmer que f est bijective. En revanche, si on sait par ailleurs que f est bijective, il suffit de trouver g telle que $f \circ g = id$ ou $g \circ f = id$.

Images directes et réciproques

Méthode *(Rappels sur les ensembles)*

- → Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, la démonstration se fait toujours de la même façon :

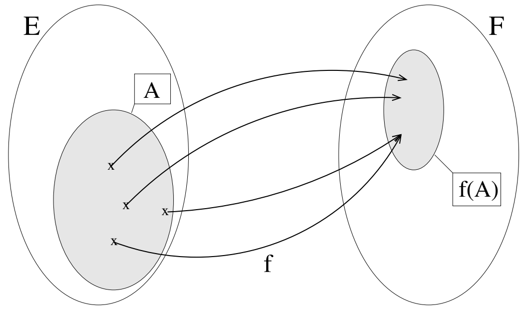
  Soit $x \in A$, on traduit les conditions sur $x \ldots$ alors $x \in B$.

- → Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on montre les deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.
- → Pour prouver qu'un élément est dans l'intersection $A \cap B$, on montre qu'il est à la fois dans A et dans B.

Définition 3 *(Image directe)*

Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On note $f(A)$ le sous-ensemble de F appelé *image directe* de A par f, défini par

$$f(A) = \left\{ y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x) \right\} = \left\{ f(x) \mid x \in A \right\}.$$



Méthode *(Image directe)*

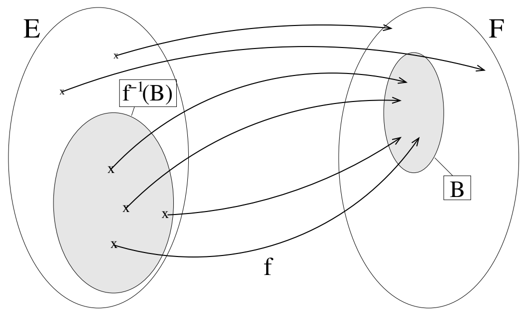
- → Lorsqu'on doit montrer qu'un élément y est dans $f(A)$, on construit $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
- → Lorsqu'on a besoin de $y \in f(A)$, on écrit : soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Définition 4 *(Image réciproque)*

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. On note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E appelé image réciproque de B par f, défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Il faut comprendre ce que désigne cet ensemble en « lisant à l'envers l'application » : $f^{-1}(B)$ désigne l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ dont l'image tombe dans B.



Méthode *(Image réciproque)*

- → Pour prouver qu'un élément x est dans $f^{-1}(B)$: il suffit de montrer que $f(x) \in B$.
- → Lorsqu'on utilise un élément x de $f^{-1}(B)$, on écrit $f(x) \in B$ pour poursuivre la démonstration.

Deux notations

Il ne faut pas confondre

- → l'application réciproque f^{-1} qui n'existe que lorsque f est bijective et elle agit sur les éléments de l'ensemble d'arrivée,
- → l'application « image réciproque » qui agit sur les sous-ensembles de l'ensemble d'arrivée et qui existe toujours.

Lorsque f est bijective, ces deux notations sont liées car on a $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Propriété 2 *(Images directes et réciproques)*

Soit $f : E \to F$, A et B des sous-ensembles de E ou F :

- → $A \subset B$ implique $f(A) \subset f(B)$.
- → $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ avec égalité lorsque f est injective.
- → $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- → $A \subset B$ implique $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
- → $f(f^{-1}(B)) \subset B$ avec égalité si f est surjective.
- → $B \subset f^{-1}(f(B))$ avec égalité si f est injective.
- → $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- → $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- → si $f : E \to F$ et $g : F \to G$:
  - si $A \subset E$ alors $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$
  - si $B \subset G$ alors $f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ f)^{-1}(B)$

Exercice 2

Montrer ces propriétés

RELATION D'ÉQUIVALENCE ET ENSEMBLE QUOTIENT

Définition 5 *(Relation d'équivalence, ensemble quotient)*

Soit E un ensemble. On dit qu'une relation entre deux éléments $x\mathcal{R}y$ est une relation d'équivalence lorsqu'elle est
- → *réflexive* : pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$,
- → *symétrique* : pour tout $x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$,
- → *transitive* : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

On peut alors créer une partie de l'ensemble en considérant les sous-ensembles suivants, appelés classes d'équivalence

$$\text{si } x \in E, \overline{x} = \{y \in E, x\mathcal{R}y\}.$$

Si $x, y \in E$, on a soit $\overline{x} = \overline{y}$, soit $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$. On note alors $E/\mathcal{R}$ l'ensemble constitué par les classes d'équivalences créées par cette relation. Si $z \in E/\mathcal{R}$ est une classe d'équivalence, on appelle représentant de cette classe tout élément $x \in E$ tel que $\overline{x} = z$. On définit alors une surjection (appelée surjection canonique) :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E/\mathcal{R} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array} \right.$$

II. GROUPES

GROUPES ET SOUS-GROUPES

Définition 6 *(Groupe)*

Ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$:
- → (associative) $a * (b * c) = (a * b) * c$,
- → (élément neutre) $\exists e \in G, \forall g \in G, g * e = e * g = g$,
- → (symétrique) $\forall g \in G, \exists g' \in G$ tel que $g * g' = g' * g = e$ (g' noté g^{-1})

On a
- → G est commutatif (ou abélien) lorsque $g * g' = g' * g$ pour tout $g, g' \in G$.
- → G est fini lorsqu'il a un nombre fini d'éléments. On appelle alors *ordre* de G son nombre d'éléments.

Définition 7 *(Sous-groupes)*

$H \subset G$ est un sous-groupe de G lorsque H est non vide, que la loi est stable dans H et que $(H, *)$ a une structure de groupe. En pratique :
- → H est non vide
- → pour tout $g, h \in H$, $g * h \in H$ et $g^{-1} \in H$ (ou simplement $g * h^{-1} \in H$).

L'essentiel *(groupes et sous-groupes)*

- → calculs : unicité de l'élément neutre, de l'inverse
- → si $a \in G$, l'application « de translation à gauche » $g \mapsto a * g$ (ou « à droite » $g \mapsto g * a$) est une bijection de G sur G (lorsque g décrit G entièrement, les éléments $a * g$ redécrivent - d'une autre manière - tous les éléments de G (une et une seule fois).
- → Opérations sur les groupes/sous-groupes (et construction) : structure de groupe sur un produit fini de groupes, intersection de sous-groupes de G, sous-groupe engendré par une partie de G.
- → G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

MORPHISMES DE GROUPES

L'essentiel *(Morphismes)*

- → définition d'une morphisme entre les groupes $(G, *)$ et $(G', *')$, isomorphismes, automorphismes.
- → propriétés : $f(e_G) = e_{G'}$ et $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.
- → image et noyau de $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Im f et ker f sont des sous-groupes respectivement de G' et G.

Exercice 3

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $B(\theta) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}$. On définit $G = \{A(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ et $H = \{B(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$.

1. Vérifier que G et H sont deux sous-groupes de $GL_2(\mathbb{R})$.
2. Résoudre l'équation $X^2 = I_2$ dans G et H. Les deux sous-groupes sont-ils isomorphes ?

Exercice 4

Soient G et H des groupes finis.

1. Soit f un morphisme de G dans H. Montrer que la relation $x\mathcal{R}y$ lorsque $f(x) = f(y)$ définit une relation d'équivalence sur G. Combien y-a-t-il de classes d'équivalences ? On pourra utiliser l'application suivante, après avoir justifié qu'elle existe :

$$\tilde{f} : \bar{x} \in G/\mathcal{R} \mapsto f(x) \in \operatorname{Im} f.$$

2. En déduire $|G| = |\operatorname{Im} f|.|\ker f|$.
3. Soit f un morphisme de groupes de G dans lui-même. Montrer que $\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

III. AUTRES STRUCTURES

ANNEAUX (2 LOIS)

Définition 8 *(Anneau)*

ensemble A muni de deux lois + et × tel que

1. $(A,+)$ groupe commutatif (élément neutre noté 0).
2. la loi (produit) × est interne et associative.
3. le produit est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition.
4. il existe un élément neutre, noté 1, pour la multiplication.

Définition 9 *(Vocabulaire)*

soit $(A,+,\times)$ un anneau

→ A est *commutatif* si la loi × est commutative.
→ $a \in A$ est un *diviseur de* 0 s'il est non nul et s'il existe $b \neq 0$ tel que $a \times b = 0$.
→ A est *intègre* s'il n'a aucun diviseur de 0. Cela revient à dire que : pour tout $a, b \in A$, $a \times b = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

Définition 10 *(Sous-anneau)*

$B \subset A$ est un sous-anneau de A s'il contient 1, est stable pour les deux lois et B muni des lois induites $(+,\times)$ possède une structure d'anneau. On montre que B est un sous-anneau de A en montrant :

→ $B \subset A$ et $1_A \in B$,
→ pour tout $a, b \in B$, $a - b$ et $a \times b \in B$.

Exemple

→ $(\mathbb{Z},+,\times)$ et $(\mathbb{R}[X],+,\times)$ sont des anneaux commutatifs et intègres.
→ $(\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau commutatif mais il n'est pas intègre.
→ Si E est un espace vectoriel, $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau non commutatif, non intègre.

Définition 11 *(Morphisme d'anneaux)*

Soit A et A' deux anneaux, $f : A \to A'$ est un morphisme d'anneaux si

→ $f(1_A) = 1_{A'}$
→ $\forall (a_1, a_2) \in A \times A, f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$et $f(a_1.a_2) = f(a_1).f(a_2)$

Propriété 3 *(Règles de calcul)*

si $a, b \in A$ commutent alors

→ $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$,
→ $a^n - b^n = (a-b)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$.

CORPS (2 LOIS)

Définition 12 *(Corps)*

On dit que $(K,+,\times)$ est un corps si

1. $(K,+,.)$ est un anneau commutatif. On note 0 l'élément neutre pour + (appelé élément nul) et 1 l'élément neutre pour ×
2. tout $x \in K$ non nul est inversible : il existe $y \in K$ tel que $x \times y = y \times x = 1$ (on note alors $y = x^{-1}$).

on définit comme précédemment les notions de sous-corps et de morphismes de corps.

Exemple

- → $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps. Dans cet ordre, ils sont des sous-corps du corps suivant.
- → Dans un corps, tous les éléments non nuls sont simplifiables, il n'y a donc pas de diviseur de zéro. Pour qu'un anneau ait une chance d'être un corps, il faut donc qu'il soit intègre (mais ce n'est pas suffisant).

ESPACES VECTORIELS (2 LOIS)

Définition 13 *(Espace vectoriel)*

Soit $(\mathbb{K},+,.)$ un corps commutatif. On dit que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si

1. la loi $+$ est une loi interne et $(E,+)$ est un groupe commutatif.
2. la loi . est une loi externe : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}\right.$ qui vérifie
    - → $(\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$
    - → $\lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$
    - → $\lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x$
    - → $1.x = x$

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés les *vecteurs*, les éléments du corps de base $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*. Le vecteur $\lambda.x$ est noté simplement λx.

Proposition 4 *(Règles de calcul)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a $(x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K})$

1. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
2. $\lambda.0_E = 0_E$.
3. $-(\lambda x) = (-\lambda)x = \lambda(-x)$
4. $\lambda(x-y) = \lambda x - \lambda y$

ALGÈBRE (3 LOIS)

Définition 14 *(Algèbre)*

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On dit que $(A,+,\star,.)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre si

1. $(A,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $(A,+,\star)$ est un anneau.
3. $(\lambda.x)\star y = x\star(\lambda.y) = \lambda.(x\star y)$ pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x,y\in A$.

En pratique, il y a une loi interne « additive » et deux lois « multiplicatives », l'une correspond à la multiplication par les constantes, l'autre à une multiplication interne. On peut également voir une algèbre comme un espace vectoriel muni d'une multiplication interne (avec des propriétés entre les deux multiplications).

Exemple

- → $\mathscr{F}(A,\mathbb{K})$ (ensemble des applications d'un ensemble A dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une algèbre.
- → $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}), \mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$ ou $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ sont des algèbres.
- → $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ sont des algèbres.
- → $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ les ensembles des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des algèbres.
- → $(\mathscr{L}(E),+,\circ,.)$ l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E est une algèbre.
- → $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n est une algèbre.

IV. EXERCICES

Exercice 5

Soit $G = \{x+\sqrt{2}y, x\in\mathbb{N}^*, y\in\mathbb{Z}$ et $x^2-2y^2=1\}$.

1. Vérifier que $G\subset\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$. Quel est le symétrique de $x+y\sqrt{2}$?
3. Soit $x+y\sqrt{2}\in G$ avec $y\in\mathbb{N}^*$. Vérifier que $x-y\sqrt{2}\in]0,1[$.
4. Montrer qu'il existe un plus petit élément g_0 dans $G\cap]1,+\infty[$ et le déterminer.
5. Montrer que $G=\{g_0^n, n\in\mathbb{Z}\}$. Qu'a-t-on prouvé ?