# SOLUTIONS

## CHAPITRE 1 - NOMBRES COMPLEXES

**Exercice 1.1**

On a $|z+z'|^2=(z+z')\overline{(z+z')}=|z|^2+[z'|^2+2\text{Re}(z\overline{z'})$ et $|z-z'|^2=|z|^2+[z'|^2-2\text{Re}(z\overline{z'})$. On somme, ce qui donne le résultat.

**Exercice 1.2**

On exclut les cas particuliers où l'un des deux est nul (le résultat est vrai). En élevant au carré, la relation équivaut à $|z+z'|^2=|z|^2+|z'|^2+2|zz'|$ (tout est positif). En utilisant $|a|^2=a\overline{a}$, on obtient

$$|z+z'|^2=(z+z')(\overline{z}+\overline{z'})=|z|^2+|z'|^2+z\overline{z'}+\overline{z}z'=|z|^2+|z'|^2+2\text{Re}(z\overline{z'}).$$

On a $2\text{Re}(z\overline{z'})\leqslant 2|z\overline{z'}|=2|z||z'|$ et ainsi $|z+z'|^2\leqslant |z|^2+|z'|^2+2|z|.|z'|=(|z|+|z'|)^2$ (on simplifie les carrés car tout est positif).
On a l'égalité si, et seulement si $\text{Re}(z\overline{z'})=|zz'|$. Puisque $|z'|=|\overline{z'})|$, l'égalité est équivalente à $\text{Re}(z\overline{z'})=|z\overline{z'}|$, ce qui est vrai si, et seulement si $z\overline{z'}\in\mathbb{R}^+$. On note $k\in\mathbb{R}^+$ ce réel. Puisque $z'$ est non nul, $z\overline{z'}=k\Leftrightarrow zz'\overline{z'}=kz'$ et $z=\dfrac{k}{|z'|^2}z'$ (et même puisque $k=|zz'|$, on a $z=\dfrac{|z|}{|z'|}z'$).

**Exercice 1.3**

- → On a $(1+i)^n=\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n=2^{n/2}e^{in\pi/4}$, d'où le module vaut $2^{n/2}$ et un argument $n\pi/4$.
- → $1+e^{i\theta}=e^{i\theta/2}(2\cos(\theta/2))$. On a $\left|1+e^{i\theta}\right|=2|cos(\theta/2)|$. Lorsque ce module est strictement positif, un argument est $\theta/2$, lorsqu'il est strictement négatif, $\pi+\theta/2$.
- → De même $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\dfrac{e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\dfrac{2\cos(\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)}=i\text{cotan}(\theta/2)$. Le module vaut 1, un argument est $\pm\pi/2$ suivant le signe de $\text{cotan}(\theta/2)$ (tout cela lorsque $e^{i\theta}\neq 1$).

**Exercice 1.4**

On suppose $n\neq 0$. On factorise $z^2+1=(z+i)(z-i)$, ce qui donne l'équation équivalente

$$(z+i)^n\left((z-i)^n-(z+i)^n\right)=0.$$

On a la solution $z=-i$. Pour $z\neq -i$, l'équation équivaut à $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n=1$. Cela équivaut à l'existence de $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{z-i}{z+i}=e^{2ik\pi/n}$. Pour $k$ multiple de $n$, il n'y a pas de solution sinon

$$z=i\frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}}=i\frac{2\cos(k\pi/n)}{-2i\sin(k\pi/n)}=-\text{cotan}(k\pi/n).$$

**Exercice 1.5**

Plusieurs moyens pour le faire :

- → On effectue une récurrence sur $n$ le nombre de termes de la somme. Soit $\mathscr{P}(n)$ : « si $z_1,\dots,z_n$ sont des complexes tels que $\left|\sum_{i=1}^n |z_i|\right|=\sum_{i=1}^n |z_i|$ alors il existe $z\in\mathbb{C}$ et des réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $z_i=\lambda_i z$ ».
  - La proposition est vraie pour $n=2$.
  - Soit $n\geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie jusqu'au rang $n$. On considère $n+1$ complexes non nuls (sinon on se ramène à un nombre de termes inférieur) vérifiant l'égalité. On a alors

    $$\begin{aligned}|z_1|+\ldots+|z_n|+|z_{n+1}| &= |(z_1+\ldots+z_n)+z_{n+1}|\leqslant|z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}|\\ &\leqslant |z_1|+\ldots+|z_n|+|z_{n+1}|,\end{aligned}$$

    et ainsi, d'une part $|z_1+\ldots+z_n|=|z_1|+\ldots+|z_n|$ et d'autre part $z_{n+1}$ et $z_1+\ldots+z_n$ sont sur la même demi-droite complexe. On applique la propriété de récurrence qui donne $z_i=\lambda_i z$ pour $i=1,\dots,n$. Alors $z_1+\ldots+z_n=(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)z$ avec $\lambda=\lambda_1+\ldots+\lambda_n>0$ (tous strictement positifs). Puisque $z_{n+1}$ est sur la même demi droite, on a $z_{n+1}=\lambda_{n+1}z$.
  - Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n\geqslant 2$.
- → On écrit $z_k=r_ke^{i\theta_k}$ avec $r_k\geqslant 0$. On a

  $$|z_1+\ldots+z_n|^2=(z_1+\ldots+z_n).\left(\overline{z_1}+\ldots+\overline{z_n}\right)$$

  On a, si $j\neq k$, $z_j\overline{z_k}+z_k\overline{z_j}=2r_jr_k\cos(\theta_j-\theta_k)\leqslant 2r_jr_k$ avec égalité si et seulement si $\theta_j\equiv\theta_k[2\pi]$. On a alors

  $$|z_1+\ldots+z_n|^2=\sum_{j=1}^n|z_j|^2+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}2r_jr_k\cos(\theta_j-\theta_k)\leqslant\sum_{j=1}^n|z_j|^2+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}2r_jr_k=(|z_1|+\ldots+|z_n|)^2$$

  avec égalité si et seulement si tous les $\cos(\theta_j-\theta_k)$ valent 1, donc si et seulement si $\theta_j\equiv\theta_k[2\pi]$ pour chaque $j\neq k$. On en déduit le résultat.

### Exercice 1.6

→ On peut le faire analytiquement : on a $|z| = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. La seconde relation $|z+1| = 1$ donne $|1+e^{i\theta}| = 1$. Or $1+e^{i\theta} = 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$. L'équation équivaut donc à $|\cos(\theta/2)| = 1/2$ ce qui équivaut à l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta/2 = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\theta/2 = \pm 2\frac{\pi}{3}+2k\pi$. Finalement, cela équivaut à $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ et $z = j$ ou $z = \overline{j}$.

→ On le fait plus simplement géométriquement : les complexes sont ceux qui sont à l'intersection des cercles $C(O,1)$ et $C(A,1)$ où $A$ est le point d'affixe $-1$. On retrouve les points intersection du cercle $C(O,1)$ et de la médiatrice de $[OA]$ (droite d'équation $x = -1/2$). Cela redonne $j$ et $\overline{j}$.

### Exercice 1.7

On a $a = \frac{1}{2}(a+b+a-b)$, d'où $|a| \leqslant \frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)$. De même avec $b$. Cela donne l'inégalité. Pour avoir le cas d'égalité, il faut que les deux majorations soient des égalités. La première donne $a+b$ et $a-b$ positivement liés, la seconde $a+b$ et $b-a$ positivement liés. Si $a+b \neq 0$, cela donne $a-b$ et $b-a$ positivement liés, ce qui n'est possible que si $a-b=0$. Les cas d'égalités sont $a = \pm b$.

### Exercice 1.8

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-|z|^2+(z-\bar{z})}{|1-z|^2}.$$

Puisque $z-\bar{z}$ est imaginaire pur, $\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire $|z| = 1$.

### Exercice 1.9

→ On cherche  sous la forme $z = a+ib$ (avec $a, b$ réels). En élevant au carré et en prenant le module, on obtient les 3 équations :

$$\left\{\begin{array}{ccl} a^2-b^2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a^2+b^2 & = & 1 \\ 2ab & = & \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \end{array}\right.$$

La résolution avec les deux premières équations donne les solutions $a = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $b = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. la troisième équation donne le signe et finalement les solutions

$$z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ et } z_2 = -z_1$$

On a également $\frac{1\sqrt{2}}{+}i\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2$ l'opposé. Cela donne

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

puis

$$\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

### Exercice 1.10

1. On développe $(1+1)^n = U_n+V_n = 2^n$ et $(1-1)^n = 0 = U_n - V_n$ ce qui donne $U_n = V_n = 2^{n-1}$ si $n \geqslant 1$.
2. On utilise de nouveau la formule du binôme. Le principe est d'utiliser $j = e^{2i\pi/3}$ avec $j^3 = 1$ (pour faire apparaître une période de 3 dans les calculs) : $U_n + V_n + W_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ avec également $(1+j)^n = U_n + jV_n + j^2W_n$ et $(1+j^2)^n = U_n + j^2V_n + jW_n$. Cela donne le système (avec $1+j = -j^2 = e^{i\pi/3}$ et $1+j^2 = -j = e^{-i\pi/3}$) :

$$\left\{\begin{array}{ccl} U_n+V_n+W_n & = & 2^n \\ U_n+jV_n+j^2W_n & = & e^{in\pi/3} \\ U_n+j^2V_n+jW_n & = & e^{-in\pi/3} \end{array}\right.$$

On obtient $U_n = \frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3})\right)$, ainsi que (en faisant $L_1+j^2L_2+jL_3$), $V_n = \frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$ et $W_n = \frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$.

**Exercice 1.11**

On note $S_n$ cette somme. On a
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{jk}\right) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k\right)$$
Si $\omega^j = 1$ (c'est-à-dire $j=0$ ou $j=n$), la somme interne vaut $n$, sinon elle vaut $\dfrac{1-\omega^{jn}}{1-\omega^j} = 0$. Il ne reste que les deux termes extrêmes. On a $S_n = 2n$.

**Exercice 1.12**

$$S_n = \sum_{0\leqslant p\leqslant q\leqslant n-1}\binom{q}{p}\omega^{p+q} = \sum_{q=0}^{n-1}\omega^q\left(\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\omega^p\right) = \sum_{q=0}^{n-1}\omega^q(1+\omega)^q.$$
On vérifie que $\omega(1+\omega)\neq 1$ (sinon $1+\omega = 1/\omega = \bar\omega$, soit $1 = \bar\omega - \omega \in i\mathbb{R}$). Ainsi
$$S_n = \frac{\omega^n(1+\omega)^n - 1}{\omega} = \frac{(1+\omega)^n-1}{\omega},$$
qu'on peut éventuellement « simplifier », en factorisant $1+\omega = e^{i\pi/n}2\cos(\pi/n)\ldots$

**Exercice 1.13**

1. → on peut calculer directement :
$$\begin{aligned} D_n(x) &= e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}e^{ikx} = e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{-inx}}{e^{ix/2}}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{-2i\sin(x/2)}\\ &= \frac{e^{-i(n+1/2)x}-e^{i(n+1/2)x}}{-2i\sin(x/2)} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.\end{aligned}$$
→ on peut simplifier en $D_n(x) = 1+\sum_{k=1}^{n}2\cos(kx)$ (c'est parfois donné sous cette forme). À l'aide de $2\cos a\sin b = \sin(a+b)-\sin(a-b)$, on a alors
$$\begin{aligned} D_n(x)\sin(x/2) &= \sin(x/2)\sum_{k=1}^{n}(\sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x)\\ &= \sin(x/2)+\sin((n+1/2)x)-\sin(x/2) = \sin(n+1/2)x\end{aligned}$$
→ C'est reparti... on passe par $\sum_{k=0}^{n}e^{i(k+1/2)x}$ dont la partie imaginaire est la somme des sinus :
$$\sum_{k=0}^{n}e^{i(k+1/2)x} = e^{ix/2}\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = e^{i(n+1)x/2}\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$
Finalement $S_n(x) = \dfrac{\sin^2((n+1)x/2)}{\sin^2(x/2)}$.

**Exercice 1.14**

Deux solutions :
1. On note $A, B$ et $C$ les points d'affixe $a, b$ et $c$. Le centre du cercle circonscrit à $ABC$ est $O$ (complexes de module 1), et le centre de gravité également. Ainsi le triangle est équilatéral. On a alors $b = aj$ et $c = aj^2$ (ou $c = aj$ et $b = aj^2$). Dans la première situation $a^2+b^2+c^2 = a^2(1+j^2+j) = 0$ (idem sinon).
2. On a $(a+b+c)^2 = 0 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$. On cherche à évaluer la valeur inconnue. On a $|a|^2 = 1 = a\bar a$, d'où $\bar a = 1/a$. Alors $\overline{a+b+c} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \dfrac{bc+ac+ab}{abc} = 0$. En conjuguant l'expression, on obtient $ab+ac+bc = 0$.

**Exercice 1.15**

Plusieurs solutions possibles
- → On résout le système, ce qui donne $c = -(a+b)$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$. Cette dernière équation devient $(a+b)^2 = ab$ ou $a^2+ab+b^2 = 0 = b^2(t^2+t+1)$ où $t = \frac{a}{b}$. On en déduit que $a = jb$ ou $a = j^2b$. Si $a = jb$, alors $c = j^2b$. Les trois complexes sont de même module et on a $b = ja$, $c = j^2a$. Sinon $b = j^2a$ et $c = ja$.
- → L'équation $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0$ équivaut à $bc+ac+ab = 0$. Lorsqu'on développe $P = (X-a)(X-b)(X-c)$, on obtient
$$P = X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$$

Ainsi $a, b$ et $c$ vérifient les conditions si et seulement s'ils sont les trois racines de $X^3 - abc$. En notant $k$ un complexe tel que $k^3 = abc$, les complexes sont $k, jk$ et $j^2k$ (c'est-à-dire les trois racines cubiques de $abc = a^3$). Cela revient à dire que les trois complexes sont $a, ja$ et $j^2a$.

**Exercice 1.16**

- → On note $z_k = 1 - e^{2ik\pi/n}$. Alors $1 - z_k = e^{2ik\pi/n}$ et $(1-z_k)^n = 1$. On note $P_n = (1-X)^n - 1$. Les racines de $P_n$ sont 0 et les $z_k$. Soit $Q_n = P_n/X$. Ce polynôme est de degré $n-1$ et ses racines sont $z_1, \dots, z_{n-1}$. On a $Q_n = (-1)^n X^{n-1} + \dots - n$. Le produit des racines vaut $(-1)^{n-1}\dfrac{-n}{(-1)^n} = n$.
- → On considère les polynômes $P = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right)$ et $Q = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right)$. D'après le cours, on a $Q = X^n - 1$. On aussi $Q = (X-1)P$. Cela donne $P = \dfrac{X^n - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Finalement on cherche $P(1) = n$.

**Exercice 1.17**

Évidemment $a$ n'est pas entier donc le polynôme est de degré au moins 2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On développe $\cos(5\theta)$ ce qui donne

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta).$$

Pour $\theta = \pi/5$, on obtient, en multipliant par 2, $-2 = a^5 - 5a^3 + 5a$. Le réel $a$ est donc racine de $P = X^5 - 5X^3 + 5X + 2$. On remarque que $-2$ est racine de $P$. On factorise complètement $P$ en $P = (X+2)(X^2 - X - 1)^2$. Puisque $a \neq -2$, on a $a$ racine de $X^2 - X - 1$. On a notamment $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**Exercice 1.18**

On peut commencer par étudier la structure des sous-groupes de $\mathbb{U}$. C'est très proche de l'étude de la structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$. En effet si on note $\tilde{G} = \{\theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in G\}$ alors $\tilde{G}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, donc soit il est discret, soit il est dense. On peut supposer que $G \neq \{1\}$ et on pose $\theta_0 = \inf A$ où $A = \left\{\theta \in ]0, 2\pi[, e^{i\theta} \in G\right\}$. Deux cas se présentent :

- → **Cas 1 :** $\theta_0 > 0$ (cela correspond au cas où $\tilde{G}$ est discret - on redémontre les propriétés) : on vérifie que $\theta_0 \in A$ et que $G$ est le sous-groupe engendré par $e^{i\theta_0}$. De plus $\theta_0$ est de la forme $x\pi$ avec $x \in \mathbb{Q}$. En effet si $\theta_0 \notin A$, il existerait $\theta_1 \in A$ tel que $\theta_0 < \theta_1 < 2\theta_0$, puis $\theta_2 \in A$ tel que $\theta_0 < \theta_2 < \theta_1 < 2\theta_0$ (par définition de la borne inférieure). On a alors $e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \in G$ avec $0 < \theta_1 - \theta_2 < \theta_0$ donc une contradiction. Si $\theta/\pi$ n'était pas rationnel alors le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par $\theta$ et $2\pi$ serait dense dans $\mathbb{R}$ et son image par $\varphi : t \mapsto e^{it}$ (continue) serait dense dans $\mathbb{U}$. On a donc $\theta_0 = \dfrac{p}{q}\pi$ avec $p \wedge q = 1$. Ainsi $G$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$ et il donc de la forme $\mathbb{U}_m$
- → **Cas 2 :** $\theta_0 = 0$, $\tilde{G}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $G$ est dense dans $\mathbb{U}$.

On comprend l'énoncé géométriquement : $\Gamma$ est l'intersection de $G$ avec la boule ouverte de centre 1, de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pour qu'il n'y ait pas d'éléments autres que 1, il faut que $\theta_0 \geqslant \frac{\pi}{4}$, ce qui revient à dire que $G$ a au plus 8 éléments.

On a alors l'équivalence entre les points suivants :

- → on a $H \neq \{1\}$,
- → on a $H = G$ et $G \neq \{1\}$,
- → on a $\operatorname{card}(G) \geqslant 9$.

On vérifie alors aisément les points suivants :

- → si $m \leqslant 8$ alors $\Gamma$ est réduit à $\{1\}$ et $H$ aussi,
- → si $G = \mathbb{U}_m$ avec $m > 8$ alors $\Gamma$ contient $e^{i\theta_0}$ qui engendre $G$. Donc $H = G$.
- → si $G$ est dense dans $\mathbb{U}$, alors le sous-groupe de $\mathbb{U}$ engendré par $H$ est infini (on a déjà une infinité d'éléments dans $\Gamma$ et donc dense dans $\mathbb{U}$. Si $H \subsetneq G$. Soit $x = e^{i\theta} \in G \backslash H$. Il existe $\theta' \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ avec $e^{i\theta'} \in H$. Si on note $k$ la partie entière de $\theta/\theta'$, alors $\theta = k\theta' + r$ avec $|r - < \frac{\pi}{4}$. On a alors $e^{i\theta} = \left(e^{i\theta'}\right)^k e^{ir}$. On a $e^{i\theta'} \in H$ donc $\left(e^{i\theta'}\right)^k$ également et puisque $e^{ir} \in \Gamma$, $e^{ir} \in H$. On a donc $e^{i\theta} \in H$.

L'équivalence des trois points annoncés est prouvée.

## CHAPITRE 2 - DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

### Exercice 2.1

→ $F_1 = \dfrac{3X^2+X-2}{(X-1)^2(X+2)^2} = \dfrac{-17}{27(X+2)} + \dfrac{8}{9(X+2)^2} + \dfrac{17}{27(X-1)} + \dfrac{2}{9(X-1)^2}$

→ $F_2 = \dfrac{3X+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)} = \dfrac{-2}{(X+1)^2} + \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{2-X}{1+X+X^2}$

→ $F_3 = \dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} - \dfrac{X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right).$

### Exercice 2.2

1. $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)} = -\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{2(X+2)} + \dfrac{1}{2X}$
2. $\dfrac{1}{X(X^2+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{X}{X^2+1}.$
3. $\dfrac{1}{X^3+1} = \dfrac{-X+2}{3(X^2-X+1)} + \dfrac{1}{3(X+1)}.$
4. $\dfrac{2X+1}{(X^2-X)^2} = \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{4}{X} + \dfrac{3}{(X-1)^2} - \dfrac{4}{X-1}.$
5. $\dfrac{X^4-1}{X^2(X+1)} = X-1+\dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X^2}.$
6. $\dfrac{X^4}{(X+1)(X^2-1)} = X-1+\dfrac{1}{4(X-1)} + \dfrac{7}{4(X-1)^2} - \dfrac{1}{2(X+1)^2}$. œ
7. 
8. On applique la formule générale de décomposition. On a $Q(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$ avec $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et $Q'(\omega_k) = n\omega_k^{n-1} = \dfrac{n}{omega_k}$ car $\omega_k^n = 1$. On en déduit
$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}.$$
9. $X + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{2X+1}{X^2+1}$

### Exercice 2.3

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{P(X)}$. Les pôles de $F$ sont les $x_i$ et ils sont tous simples par hypothèse. Puisque la partie entière de F est nulle on a
$$F(X) = \frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\prod_{k\neq i}(x_i-x_k)}\frac{1}{X-x_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P'(x_i)(X-x_i)}.$$
L'identité demandée s'obtient en évaluant cette égalité en 0. Pour calculer la somme $\sum_{i=1}^{n_i}\dfrac{1}{P'(x_i)}$, on multiplie l'égalité précédente par $X$, on évalue en $x$ réel et on fait tendre $x$ vers l'infini : $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{P'(x_i)}$ vaut 1 si $n=1$ et 0 si $n>1$

### Exercice 2.4

On a
$$\frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1}\right).$$
On note $Q = \dfrac{1}{X+1}$. On a $Q' = -\dfrac{1}{(X+1)^2}$, $Q'' = \dfrac{2}{(X+1)^3}$ et on montre par récurrence que
$$Q^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(X+1)^{n+1}}.$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left(\frac{1}{X-1}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(X-1)^{n+1}} \text{ et } \left(\frac{1}{X+1}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(X+1)^{n+1}}$$

d'où

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{X^2-1}\right)^{(n)} &= (-1)^n \frac{n!}{2}\left[\frac{(X+1)^{n+1}-(X-1)^{n+1}}{\left(X^2-1\right)^{n+1}}\right]\\ &= (-1)^n \frac{n!}{2\left(X^2-1\right)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(X^{n+1-k}-(-1)^k X^{n+1-k}\right)\\ &= (-1)^n \frac{n!}{\left(X^2-1\right)^{n+1}} \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k} X^{n+1-k}.\end{aligned}$$

**Exercice 2.5**

Si on note $F = \frac{P'}{P}$, alors on a $F' = \frac{P''P - P'^2}{P^2}$. On va donc s'intéresser à cette fraction rationnelle. Si

$$P = A.\prod_{i=1}^{d}(X-x_i)^{n_i}$$

alors

$$P' = A.\sum_{i=1}^{d}\left(n_i (X-x_i)^{n_i-1}\prod_{j\neq i}(X-x_j)^{n_j}\right)$$

et

$$F = \sum_{i=1}^{d}\frac{n_i}{X-x_i}$$

Enfin $F' = -\sum_{i=1}^{d}\frac{n_i}{(X-x_i)^2}$. Lorsque $x$ n'est pas une racine de $P$, alors $F'(x) < 0$ et $P(x)P''(x) < P'^2(x)$. Si $x$ est racine de $P$ alors $P(x)P''(x) = 0 \leqslant P'^2(x)$.

## CHAPITRE 3 - CALCUL D'INTÉGRALES

**Exercice 3.1**

on donne simplement une primitive (ajouter une constante)

a) $\frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$

b) $\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)(\arctan x)^2 - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ sur $\mathbb{R}$

c) $\dfrac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left(\dfrac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)$ sur $\mathbb{R}$

d) $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$.

e) $-\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{1}{15}\cos^2 x\sin^2 x + \frac{2}{15}\sin x$. sur $\mathbb{R}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sqrt{6}\right)$ sur $\mathbb{R}$

g) $e^x(2x^2-3x+4)$ sur $\mathbb{R}$

h) $\dfrac{e^{3x}}{10}(\cos x + 7\sin x)$ sur $\mathbb{R}$

i) $\frac{1}{5}(\sin(2x)\mathrm{sh}(x) - 2\cos(2x)\mathrm{ch}(x))$ sur $\mathbb{R}$

j) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{e^x}{\sqrt{2}}\right)$ sur $\mathbb{R}$

k) $\dfrac{-1}{4e^x+2}$ sur $\mathbb{R}$

l) $\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$

m) $\frac{1}{5}\mathrm{sh}\,x\sin(2x) - \frac{2}{5}\mathrm{ch}\,x\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$

n) $2\ln(1+\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$

o) $\arcsin(x-1)$ sur $]0,2[$

p) $\frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{10}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{10}\arctan\frac{x+1}{2}$ sur $]-\infty,-2[$ et sur $]-2,+\infty[$

q) $\dfrac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left(\dfrac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)$

r) $\sqrt{x^2-5x+6} + \frac{9}{2}\ln\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+6}\right|$ sur $]-\infty,2[$ et $]3,+\infty[$

**Exercice 3.2**

a) $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ par intégration par parties.

b) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ par changement de variable « $u = \tan(x/2)$ ».

c) $\dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$ mise sous forme canonique et changement de variable pour se ramener à $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$ puis changement de variable « $u = \sin t$ » (ou les deux en une seule fois) - on peut aussi l'interpréter comme l'aire d'un demi cercle de diamètre $b-a$... mais est-ce une preuve?

**Exercice 3.3**

→ si $x \leqslant 0$, alors $I(x) = \int_0^1 x\,dt = x$,

→ si $x \geqslant 1$, alors $I(x) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$,

→ si $x \in [0,1]$, alors

$$I(x) = \int_0^x t\,dt + \int_x^1 x\,dt = \frac{x^2}{2} + x(1-x) = x - \frac{x^2}{2}$$

**Exercice 3.4**

→ si $\alpha = -1$ : du type $uu'$ d'où

$$I(x) = \left[\frac{1}{2}\ln^2(t)\right]_1^x = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

→ si $\alpha \neq -1$. Intégrons par parties avec $u(t) = \ln t$, $\quad v'(t) = t^\alpha$ (et $v(t) = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}$) :

$$\int_1^x t^\alpha \ln t\mathrm{d}t = \frac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\int_1^x t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2}$$

**Exercice 3.5**

La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On travaille sur un intervalle contenu dans cet ensemble. On intègre par parties pour $a$ et $x$ dans l'intervalle ($C$ désigne une constante « générique » - ce n'est pas toujours la même)

$$I(x) = \int_a^x \frac{\ln\left(t^2+4t+5\right)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = -\frac{\ln\left(x^2+4x+5\right)}{x+1} + \int_a^x \frac{2t+4}{(t+1)\left(t^2+4t+5\right)}\mathrm{d}t + C$$

On décompose $\dfrac{2X+4}{(X+1)\left(X^2+4X+5\right)}$ en éléments simples :

$$\frac{2X+4}{(X+1)\left(X^2+4X+5\right)} = \frac{1}{X+1} - \frac{1+X}{X^2+4X+5}$$

et

$$I(x) = \ln|x+1| - \frac{\ln\left(x^2+4x+5\right)}{x+1} - \int_a^x \frac{t+1}{(t+2)^2+1}\mathrm{d}t + C$$

Pour terminer le calcul, posons $t+2=u$ :

$$\int_a^x \frac{1+t}{(t+2)^2+1}\mathrm{d}t = \int_{a+2}^{x+2} \frac{u-1}{u^2+1}dt = \left[\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) - \arctan t\right]_{a+2}^{x+2}$$

D'où :

$$I(x) = -\frac{x+3}{2(x+1)}\ln\left(x^2+4x+5\right) + \ln|x+1| + \mathrm{Arctan}(x+2) + C$$

**Exercice 3.6**

les fonctions qui apparaissent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1/2]$. Cela permet d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I = \int_0^{1/2} \arctan\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \left[x\arctan\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+1-x^2)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2} + \int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable « $x=\sin u$ » ou « $u=\arcsin(x)$ » :

$$\int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u$$

Puisque l'expression « $\dfrac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u$ » est invariante en remplaçant $u$ par $u+\pi$, on peut effectuer le changement de variable $v=\tan u$. Cela donne, avec $\sin^2 u = \tan^2 u\cos^2 u = \dfrac{\tan^2}{1+\tan^2 u}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{v^2}{1+v^2}}{2-\frac{v^2}{1+v^2}}\frac{1}{1+v^2}\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)}\mathrm{d}v$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)} = \frac{2}{2+v^2} - \frac{1}{1+v^2}$$

et enfin

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)}\mathrm{d}v = \sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{6}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On trouve alors

$$\int_0^{1/2}\arctan\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\pi}{6}$$

# CHAPITRE 4 - DL, ÉQUIVALENTS

**Exercice 4.1**

On détermine la limite de $f/g$ en $+\infty$. Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ln^\alpha x}{x^{\beta-\gamma}}$.

→ si $\gamma > \beta$, alors $g(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$,
→ si $\gamma < \beta$, alors $f(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(g(x))$,
→ si $\beta = \gamma$ et $\alpha > 0$, alors $g(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$,
→ si $\beta = \gamma$ et $\alpha < 0$, alors $f(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(g(x))$,
→ si $\beta = \gamma$ et $\alpha = 0$, $f = g$.

**Exercice 4.2**

a) $\dfrac{(1-\cos x)\arcsin x}{x\tan^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2/2.x}{x.x^2} = \dfrac{1}{2}$.

b) $(\ln x)^{1/x} = \exp(\frac{1}{x}\ln\ln(x))$. On a $\ln(u) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(u)$ donc $\ln(\ln x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(\ln x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x)$. Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/x} = 1$.

c) $(\sin x)^x - 1 = \exp(x\ln\sin x) - 1$. Or $\sin x \underset{0}{\sim} x$ de limite nulle donc $\ln\sin x \underset{0}{\sim} \ln x$ et $x\ln(\sin x)$ tend vers 0 llorsque $x$ tend vers 0. En utilisant $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on en déduit que $(\sin x)^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$. De même pour le dénominateur. La limite est 1.

d) On pose $x = 1+h$. Cela donne $\dfrac{(1+h)\ln(1+h)}{2h+h^2} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h}{2h} = \dfrac{1}{2}$.

**Exercice 4.3**

On note $f(x) = \dfrac{a}{\sin(x)} - \dfrac{b}{\ln(1-x)}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a\ln(1-x) - b\sin x}{\sin(x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{a(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)) - b(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3))}{\sin(x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{-(a+b)x - \frac{a}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{\sin(x)\ln(1-x)} \end{aligned}$$

Si $a+b \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{(a+b)x}{-x^2} = \dfrac{a+b}{x}$. Si $b = -a$ et $a \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-(a/2)x^2}{-x^2} = a/2$. Sinon $a = b = 0$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$.

**Exercice 4.4**

a) $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

b) $\ln 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

c) $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$.

d) $1 - \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

e) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

f) $-\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \mathrm{o}(1/x^2)$.

**Exercice 4.5**

a) $u_n \sim \dfrac{n^2}{3n^2} = 1/3$

b) $u_n \sim \dfrac{3^n}{3^n} = 1$

c) $\sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \dfrac{1}{2n}$ et $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$

d) $u_n \sim 2\dfrac{\ln n}{n}$

e) $u_n \sim \dfrac{n!}{3^n}$

f) $u_n = \sqrt{\ln(1+1/n)} \sim \sqrt{1/n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

g) puisque $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ de limite nulle, on a $u_n \sim \ln\frac{1}{n} = -\ln n$

h) $u_n = n^{\frac{1}{n}}\left(1 - n^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\right) = e^{\frac{\ln n}{n}}\left(1-\exp(-\frac{\ln n}{n(n+1)})\right)$. En utilisant la relation $e^u - 1 \sim u$ en 0, on obtient $u_n \sim \frac{\ln n}{n(n+1)} \sim \frac{\ln n}{n^2}$

i) $\sqrt{n^2+n+1} = n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = n\left(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{8}\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$, ce qui donne $\sqrt{n^2+n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. On a alors

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

donc $u_n \sim (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$.

j) Si $a \in ]0,1]$, $u_n \sim \frac{n^a}{n^{2a}} = \frac{1}{n^a}$ et si $a > 1$, $u_n \sim \frac{1}{a^n}$.

**Exercice 4.8**

La fonction est évidemment de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I\backslash\{0\}$.

→ On commence par la continuité : $f(x) = \frac{\sin x - x}{x\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3/6}{x\times x} = -\frac{x}{6}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et que $f$ est continue en 0.

→ On peut étudier la dérivabilité en 0 (pas vraiment utile) : avec le calcul précédent, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6},$$

ainsi $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{6}$. Cela ne garantit pas la continuité de $f'$ en 0.

→ On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$. On cherche la limite en 0. Le dénominateur est équivalent à $x^4$ en 0. On a

$$\begin{aligned} x^2\cos x - \sin^2 x &= x^2(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)) - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{2x^4}{6} + O(x^6) = -\frac{1}{6}x^4 + O(x^6) \end{aligned}$$

On a alors $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{6} = f'(0)$ et la continuité de $f'$. Finalement $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $I$

*remarque :* on aurait pu se passer de l'étude de la dérivabilité en 0 en utilisant le théorème de prolongement du caractère $\mathscr{C}^1$ : si $f$ est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ et si $f'$ admet une limite finie $\ell$ en $a$ alors $f$ est dérivable sur $[a,b]$ avec $f'(a) = \ell$ et $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. **Attention** : ce n'est pas un théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ de $f$ puisqu'il n'y a pas à prolonger $f$ - elle admet déjà une valeur en $a$.

**Exercice 4.9**

Soit $u = \arccos(x)$ avec $x$ proche de 1 (par valeurs inférieures). On a $\lim\limits_{x\to 1}\arccos(x) = 0$ et $\cos(u) = x = 1 - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$. Ainsi $2(1-x) = u^2 + \mathrm{o}(u^2)$, ce qui donne $2(1-x) \underset{x\to 1}{\sim} u^2$. Puisque $u > 0$, cela donne $u \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

**Exercice 4.10**

On n'a pas de théorème qui permet d'intégrer entre 2 bornes un DL. On note $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ ($F$ est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ qui s'annule en 0 - elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On a $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$ et $F(0) = 0$. On permet obtenir alors le DL de $F$ en 0 : $F(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$. On a alors

$$f(x) = F(x^2) - F(x) = (x^2 + \mathrm{O}(x^6)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)) = -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

**Exercice 4.11**

La fonction $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, sa dérivée est $f' : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ qui est strictement positive. La fonction $f$ réalise une bijection strictement croissante de $]-1,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$. La fonction admet une réciproque $f^{-1}$ sur $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et $f^{-1}(0) = 0$ puisque $f(0) = 0$) - cela garantit l'existence d'un DL de $f^{-1}$ en 0 à tout ordre. On écrit $f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + \mathrm{o}(y^3)$. On a $f^{-1}(f(x)) = 0$ pour tout $x \in ]-1,1[$ (par exemple). Or $f(x) = x + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$. Par composition (on a bien $f(x)$ de limite nulle lorsque $x$ tend vers 0), on peut substituer $y$ par le DL de $f(x)$ en 0 (on a alors $y^3 \underset{x\to 0}{\sim} 8x^3$ et ainsi le terme en $\mathrm{o}(y^3)$ est un terme en $\mathrm{o}(x^3)$. On développe, regroupe et on utilise l'unicité du DL pour obtenir les équations (termes en $x, x^2$ et $x^3$ dans le DL de $f^{-1}(f(x))$) :

$$2a = 1, 4b - \frac{a}{2} = 0 \text{ et } 8c - 2b + \frac{a}{3} = 0.$$

On trouve $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}y^2 - \frac{1}{192}y^3 + \mathrm{o}(y^3)$.

**Exercice 4.12**

→ L'équation équivaut à $\tan(x) - \frac{1}{x} = 0$. La fonction $x \mapsto \tan(x) - \frac{1}{x}$ est continue, strictement croissante sur $I_n$ avec des limites infinies aux bornes de $I_n$. Par bijection, l'équation admet une unique solution sur $I_n$.

→ On a $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, et, par encadrement, $\frac{x_n}{n\pi}$ tend vers 1. On a donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.

→ On écrit $x_n = n\pi + y_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. On reporte dans l'équation, ce qui donne

$$1 = (n\pi + y_n)\tan(n\pi + y_n) = (n\pi + y_n)\tan(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi y_n.$$

On en déduit $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$.

→ De même $x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n$ avec $z_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(y_n)$, soit $z = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n})$. On reporte de nouveau et on effectue un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} 1 &= (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n)\tan(\frac{1}{n\pi} + z_n) = (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n)(\frac{1}{n\pi} + z_n + \frac{1}{3\pi^3 n^3} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^3}) \\ &= 1 + n\pi z_n + \frac{1}{3\pi^2 n^2} + \frac{1}{n^2\pi^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

d'où

$$n\pi z_n = -\frac{4}{3n^2\pi^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^2\pi^2}.$$

On en déduit que $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^3\pi^3}$, et

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{4}{3n^3\pi^3} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^3}).$$

**Exercice 4.13**

1. Soit $Q(x) = x^2 - 2tx + 1$. Son discrimant est $\Delta = 4(t^2 - 1)$. Lorsque $t \in ]0,1[$, $Q$ reste strictement positif et $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}$. Si $t = 1$, $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Lorsque $t > 1$, $Q$ admet deux racines strictement positives $x_1 = t - \sqrt{t^2-1} < x_2 = t + \sqrt{t^2-1}$ (la somme est $2t > 0$, le produit 1). Alors $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}\setminus[x_1, x_2]$.
2. Dans toutes les situations, il existe $\alpha > 0$ tel que $f_t$ est définie et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$. La fonction admet alors un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. On note $u = x^2 - 2xt = x(x-2t)$. Cette quantité tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0. De plus $u \underset{x\to 0}{\sim} x$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors
$$f_t(x) = (1+u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(u^n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k (x-2t)^k + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^n).$$
En développant, le terme $u^k$ donne des termes en $x^m$ pour $m \in [\![k; 2k]\!]$, avec des coefficients polynomiaux en $t$. En regroupant les termes de même degré, on obtient une expression comme demandée.
3. On cherche une expression permettant d'écrire l'unicité des coefficients d'un développement limité. On remarque que
$$f_t'(x) = \frac{t-x}{(1-2xt+x^2)^{3/2}} = \frac{t-x}{1-2xt+t^2} f_t(x),$$
ce qui donne la relation $(1-2xt+x^2)f_t'(x) = (t-x)f_t(x)$ (au voisinage de 0). Soit $k \geqslant 1$. On écrit un développement limité à un ordre suffisant des deux cotés (afin d'à voir un ordre final d'au moins $k+1$), et on regarde les termes en $x^k$. Par unicité, on obtient
$$(k+1)P_{k+1}(t) - 2tkP_k(t) + (k-1)P_{k-1}(t) = tP_k(t) - P_{k-1}(t).$$
On récrit cela en
$$(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t).$$
Cela donne une relation de récurrence entre les polynômes $P_k$, ce qui permet de les calculer facilement (on montre notamment que $P_k$ est de degré $k$).

## CHAPITRE 5 - SÉRIES NUMÉRIQUES