CHAPITRE 1 - NORMES, SUITES

Exercice 1.1

- → existence : la fonction $t \mapsto |P(t) - P'(t)|$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc elle est majorée et $\|P\|$ existe et est positive.
- → définie : soit P de norme nulle. La fonction polynomiale $P - P'$ est nulle sur $[0,1]$, donc le polynôme $P - P'$ est le polynôme nul. On a donc $P = P'$, ce qui est impossible pour des raisons de degré si P n'est pas le polynôme nul. Ainsi $\|P\| = 0$ entraîne $P = 0$.
- → homogénéité : si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda P(t) - \lambda P'(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda||P(t) - P'(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)|,$$
puisque $|\lambda| \geqslant 0$. Cela donne $\|\lambda P\| = |\lambda| \, \|P\|$.
- → inégalité triangulaire : soit $P, Q \in E$. Pour tout $t \in [0,1]$,
$$|(P+Q)(t) - (P+Q)'(t)| \leqslant |P(t) - P'(t)| + |Q(t) - Q'(t)| \leqslant \|P\| + \|Q\| .$$
On a donc un majorant, si bien que $\|P+Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$.

Exercice 1.2

- → l'application est la norme associée au produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire celui qui à (A,B) associe $\operatorname{tr}({}^tA.B)$.
- → On effectue le calcul directement :
$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (AB)_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}\right)^2,$$
et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne
$$\left(\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n B_{kl}^2\right).$$
On obtient alors
$$\|AB\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n B_{kl}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n B_{kl}^2\right) = \|A\|^2 \, \|B\|^2 .$$

Exercice 1.3

1. On prouve les différents points :
   - → existence : la fonction $t \mapsto x + ty$ est continue sur $[0,1]$ et est donc bornée. Cela donne l'existence de $N((x,y))$
   - → positivité : immédiat
   - → caractère défini : si $N((x,y)) = 0$ alors pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant |x+ty| \leqslant 0$. Ainsi la fonction affine $t \mapsto x + ty$ est nulle est $x = y = 0$ (on peut prendre des valeurs pour t, par exemple 0 et 1).
   - → homogénéité : si $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda x + t\lambda y| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda||x+ty| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|,$$
   puisque $|\lambda| \geqslant 0$.
   - → inégalité triangulaire : soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a
   $$|(x+x') + t(y+y')| \leqslant |x+ty| + |x'+ty'| \leqslant N((x,y)) + N((x',y')).$$
   Cela étant valable pour tout $t \in [0,1]$, on a bien $N((x,y)+(x',y')) \leqslant N((x,y)) + N((x',y'))$.

   L'application est bien une norme.
2. On détermine la boule fermée (plus facile avec les bornes supérieures) unité. On a $N((x,y)) \leqslant 1$ si et seulement si, pour tout $t \in [0,1]$, $|x+ty| \leqslant 1$. Les valeurs extrêmes de $x+ty$ sont en 0 et 1 si bien que $N((x,y)) = \max(|x|, |x+y|)$. Ainsi (x,y) est dans la boule fermée unité si et seulement si $|x| \leqslant 1$ et $|x+y| \leqslant 1$. On trace les bords du domaine $x = \pm 1$ et $x + y = \pm 1$. La boule est à l'intérieur.
3. Pour se donner une idée des constantes, on essaie de placer les différentes boules unités les unes dans les autres. Si on a deux normes N_1 et N_2 : la relation $N_1 \leqslant \alpha N_2$ donne que $\overline{B}_{N_2}(0,1) \subset \overline{B}_{N_1}(0,\alpha)$ et réciproquement. On cherche le plus petit $\alpha > 0$ tel que $\overline{B}_{N_2}(0,1) \subset \overline{B}_{N_1}(0,\alpha)$ ce qui donnera la meilleure constante telle que $N_1 \leqslant N_2$. Il n'y a alors plus qu'à le démontrer...

Exercice 1.4

1. On introduit $\Phi : (f,g) \in E^2 \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$. Il est clair que Φ est une forme bilinéaire symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Soit f un élément de E tel que $\Phi(f,f) = 0$. On a alors $\Phi(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'^2(t)\,dt = 0$. Cela donne $f(0) = 0$ et, puisque f'^2 est continue et positive sur $[0,1]$, $f' = 0$. Ainsi f est constante, et donc nulle puisque $f(0) = 0$. Ainsi, Φ est un produit scalaire et N est la norme euclidienne associée.

2. On écrit que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\,du$, ce qui donne
$$|f(t)| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(u)|\,du \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)|\,du.$$
On sait que pour a et b réels, on a $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, et on en déduit que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$. Il vient alors
$$\left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)^2 \leqslant 2\left(|f(0)|^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)^2\right).$$
D'autre part on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left(\int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 dt \cdot \int_0^1 f'(t)^2\,dt = \int_0^1 f'(t)^2\,dt.$$
D'où $|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \leqslant \sqrt{2}\sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2\,dt}$, et donc pour tout $t \in [0,1]$ $|f(t)| \leqslant \sqrt{2}N(f)$, d'où $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$.
3. Utilisons la suite de fonctions de l'énoncé : pour $n \geqslant 1$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.5

On vérifie assez facilement l'existence, la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Il reste le caractère défini. On a $N(Q) = 0$ si et seulement si Q s'annule en chacun des x_k.
→ si $p+1 > n$ (ou $p \geqslant n$) alors $N(Q) = 0$ entraîne $Q = 0$. On a bien une norme,
→ si $p < n$: on considère le polynôme $Q = \prod_{k=0}^{p} (X - x_k)$. Il est de degré $p+1 \leqslant n$, non nul et $N(Q) = 0$. On n'a donc pas une norme.

Exercice 1.6

Supposons qu'il existe $x \in E$, non nul, tel que $N_1(x) < N_2(x)$. On note $y = x/N_2(x)$. On a alors $N_1(y) < N_2(y) = 1$ donc $y \in B_1 = B_2$ d'où $N_2(y) < 1$ ce qui donne une contradiction. On fait de même si $N_2(x) < N_1(x)$.

Exercice 1.7

→ existence : pour tout $n \in^{\mathbb{N}}$, les intégrales $I_n = \int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t$ existent (fonctions continues sur $[0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$. La borne supérieure existe.
→ On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$N(\lambda f) = \sup\left\{\left|\int_0^1 \lambda f(t)t^n\mathrm{d}t\right|; n \in \mathbb{N}\right\} = \sup|\lambda|\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t\right|; n \in \mathbb{N}\right\} = |\lambda|N(f).$$
→ si $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in E$,
$$\left|\int_0^1 \lambda(f+g)(t)t^n\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^1 \lambda f(t)t^n\mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^1 \lambda g(t)t^n\mathrm{d}t\right| \leqslant N(f) + N(g)$$
Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$.
→ Si $N(f) = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \lambda f(t)t^n\mathrm{d}t = 0$ et pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 \lambda f(t)P(t)\mathrm{d}t = 0$. Il existe une suite de polynôme P_n qui converge vers f pour la norme infinie, alors
$$\left|\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)P_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty,$$
de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Cela donne $\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t = 0$ et $f = 0$.

Exercice 1.8

1. Pour la première norme, c'est du cours. La norme N est bien définie (la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est bornée) et positive. Si $N(u) = 0$ alors la suite u est constante. Puisque $u_0 = 0$, la suite est nulle. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se montrent de façon standard.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 2N_\infty(u)$, donc $N(u) \leqslant 2N_\infty(u)$.
3. On cherche à montrer que N_∞/N n'est pas bornée : par exemple un cherche une suite de suites $(u^{(k)})$ telle que $N(u^{(k)}) = 1$ et $N_\infty(u^{(k)})$ tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$. On considère la suite $u^{(k)}$ telle que $u_n^{(k)} = n$ si $n \leqslant k$ et $u_n^{(k)} = k$ si $n \geqslant k$ (elle monte de 1 en 1 et

s'arrête au rang k). Alors $N(u^{(k)}) = 1$ et $N_\infty(u^{(k)}) = k$, si bien que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{N_\infty(u^{(k)})}{N(u^{(k)})} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.9

Pour tout $X \in M_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, grâce à l'inégalité triangulaire, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\left|(AX)_k\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{p} |a_{kj}|\right)\|X\|_\infty \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|\right)\|X\|_\infty.$$

En passant au maximum, il vient $\|AX\|_\infty \leqslant \left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{p}|a_{ij}|\right)\|X\|_\infty$ d'où $|||A||| \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{p}|a_{ij}| = M$.

Construisons un vecteur X unitaire tel que $\|AX\|_\infty = M$: soit i_0 tel que $M = \sum\limits_{j=1}^{p}|a_{i_0 j}|$. Écrivons le nombre complexe $a_{i_0 j}$ sous la forme $\left|a_{i_0 j}\right| e^{i\theta_j}$.

Posons $X = {}^t(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n})$. On a $(AX)_{i_0} = M$ et $\|X\|_\infty = 1$. Donc $|||A||| \geq \|AX\|_\infty \geq M$ et finalement $|||A||| = M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{p}|a_{ij}|$.

Il reste à montrer que c'est une norme. L'application est bien définie pour toute matrice, elle est à valeurs positives.

→ si $|||A||| = 0$. On peut utiliser les deux expressions pour $|||A|||$. Avec les coefficient, on a, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{p}|a_{ij}| = 0$ donc pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ij} = 0$. La matrice A est nulle. Ou bien, par définition de la borne supérieure, pour tout vecteur colonne X, on a $0 \leqslant \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant |||A|||$ donc $\|AX\|_\infty = 0$ pour tout vecteur X non nul. Ainsi $AX = 0$ pour tout vecteur X non nul donc $A = 0$ (on peut prendre pour X les vecteurs de la base canonique et ainsi chaque colonne de A est nulle).

→ Pour l'homogénéité, de même, les deux expressions permettent de l'obtenir facilement.

→ De même pour l'inégalité triangulaire... Si A et B sont deux matrices alors, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+|b_{ij}| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| \leqslant |||A|||+|||B|||.$$

Cela étant vrai pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a $|||A+B||| \leqslant |||A|||+|||B|||$.
Ou bien : pour tout X vecteur colonne non nul, on a

$$\frac{\|(A+B)X\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{\|AX+BX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} + \frac{\|BX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant |||A|||+|||B|||.$$

De nouveau, on obtient $|||A+B||| \leqslant |||A|||+|||B|||$.

Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ et X un vecteur colonne non nul, on a $\dfrac{\|MX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant |||M|||$, c'est-à-dire $\|MX\|_\infty \leqslant |||M|||\,\|X\|_\infty$. C'est également vrai si $X = 0$. Cela permet d'écrire

$$\|ABX\|_\infty = \|A(BX)\|_\infty \leqslant |||A|||\,\|BX\|_\infty \leqslant |||A|||.|||B|||\,\|X\|_\infty$$

et ainsi, pour tout vecteur X non nul, $\dfrac{\|AB.X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant |||A|||.|||B|||$ d'où $|||A.B||| \leqslant |||A|||.|||B|||$.

Exercice 1.10

1. On propose deux méthodes :
   → l'inégalité est vraie si l'un des réels est nul. On suppose que les deux sont strictement positifs. On écrit alors
   $$\alpha\beta = (\alpha^p)^{1/p}(\beta^q)^{1/q}.$$
   En prenant le logarithme, on a
   $$\ln(\alpha\beta) = \frac{1}{p}\ln(\alpha^p) + \frac{1}{q}\ln(\beta^q).$$
   Puisque la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ (avec des termes positifs), on a
   $$\ln\left(\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(\alpha^p) + \frac{1}{q}\ln(\beta^q).$$
   Cela donne le résultat par composition par la fonction croissante exponentielle.
   → on fixe $\beta > 0$. On pose $f(\alpha) = \alpha\beta - \dfrac{\alpha^p}{p}$ pour $\alpha \geqslant 0$. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(\alpha) = \beta - \alpha^{p-1}$. La fonction est nulle en 0, de limite $-\infty$ en $+\infty$ et possède un maximum global lorsque $\alpha = \beta^{\frac{1}{p-1}}$. On calcule la valeur en ce point :
   $$f(\beta^{\frac{1}{p-1}}) = \beta^{1+\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p}\beta^{\frac{p}{p-1}} = \beta^{\frac{p}{p-1}}(1-\frac{1}{p}) = \frac{1}{q}\beta^q.$$

2. On se place dans le cas indiqué. Pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$|f(t)||g(t)| \leqslant \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q.$$

En intégrant entre a et b, on obtient

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)||g(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

De le cas général, on note $I_1 = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ et $I_2 = \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}$. Si l'une de ces intégrales est nulle, alors la fonction correspondante est nulle et l'inégalité est vraie. Sinon on considère $\tilde{f} = \frac{f}{I_1}$. On a

$$\int_a^b |\tilde{f}(t)|^p\,dt = \frac{1}{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^p\,dt}.\int_a^b |f(t)|^p\,dt = 1.$$

On a le même résultat pour la fonction $\tilde{g} = g/I_2$. On applique le résultat précédent, ce qui donne

$$\left|\int_a^b \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)\,dt\right| = \frac{1}{I_1 I_2}\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant 1,$$

ce qui donne $\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant I_1 I_2$, c'est-à-dire le résultat.

3. On utilise l'écriture conseillée, on obtient alors

$$\int_a^b |f+g|^p \leqslant \int_a^b |f|.|f+g|^{p-1} + \int_a^b |g|.|f+g|^{p-1}.$$

On applique l'inégalité de Hölder à chacune des deux intégrales. La première donne

$$\int_a^b |f|.|f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}.$$

Puisque $1/p+1/q=1$, soit $pq = p+q$, on a $(p-1)q = pq-q = p$. Cela donne la majoration

$$\int_a^b |f|.|f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/q}.$$

De même,

$$\int_a^b |g|.|f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/q},$$

ce qui donne en ajoutant,

$$\int_a^b |f+g|^p \leqslant \left(\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}\right)\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/q}.$$

Si $\int_a^b |f+g|^p = 0$ l'inégalité cherchée est vraie, sinon, on peut diviser par $\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/q}$, ce qui donne, en utilisant $1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, la relation.

4. L'application est bien définie et positive. L'homogénéité est immédiate. Si $\int_a^b |f|^p = 0$, puisque $|f|$ est continue et positive, alors f est nulle. L'inégalité triangulaire est prouvée au dessus.

Exercice 1.11

1. (a) Si x_n converge simplement vers x et x'. Soit $y \in E$. On a $\lim_{n\to\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \langle x_n - x', y\rangle = 0$. Par différence, $\lim_{n\to\infty} \langle x' - x, y\rangle = 0$ donc $\langle x'-x, y\rangle = 0$. Cela étant vrai pour tout $y \in E$, on a $x - x' = 0$ et $x = x'$.
   (b) Par inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left|\langle x_n - x, y\rangle\right| \leqslant \|x_n - x\|\,\|y\|$. Par majoration, la convergence forte entraîne la convergence faible (vers la même limite).
2. → si (x_n) converge fortement vers x : on a déjà la convergence faible. On a ensuite $|\|x_n\| - \|x\|| \leqslant \|x_n - x\|$ (inégalité triangulaire) donc $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| - \|x\| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
   → Réciproquement, on a $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, x\rangle = 0$ ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$. Alors

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle$$

   Avec les différentes limites, on obtient $\lim_{n_t o+\infty} \|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0.$

3. Comme d'habitude, la dimension finie apporte l'existence d'une base et même ici d'une base orthonormée. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base orthonormée de E. On a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2$ et de même $\|x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x_n, e_i\rangle^2$. La convergence faible donne, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2$. S"il y a convergence faible, on a donc la propriété $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$ et ainsi la convergence forte.

Exercice 1.12

On écrit $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. On a alors $z_{n+1} = r_n\left(\frac{e^{i\theta_n}+1}{2}\right) = r_n e^{i\theta_n/2}\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$. On obtient les relations $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$ et $r_{n+1} = r_n\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$. On obtient facilement $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ et

$$r_n = r_0\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = r_0\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\theta_0/2^{k-1})}{2\sin(\theta_0/2^k)} = r_0\frac{\sin(\theta_0)}{2^n\sin(\theta_0/2^n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} r_0\frac{\sin\theta_0}{2^n\theta_0/2^n}.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} z_n = r_0\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

Exercice 1.13

1. On a $P_n'(x) = nx^{n-1}+1$ et P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $P_n(0) = -1$ et $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = +\infty$, on en déduit l'existence d'une unique racine positive x_n. On remarque également que $P_n(1) = 2-1 = 1$, on a donc $x_n \in]0,1[$.
2. On a $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1}+x_n-1 < x_n^n - x_n + 1 = 0$. Ainsi $P_{n+1}(x_n) < 0$ et $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Par croissance de P_{n+1}, on obtient $x_n < x_{n+1}$ et la suite (x_n) est strictement croissante. Puisqu'elle est majorée par 1, elle converge vers $\ell \in]0,1]$. Supposons $\ell < 1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant \ell$ et $x_n^n \leqslant \ell^n$, ainsi $\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Puisque $P_n(x_n) = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, un passage à la limite donne $0+\ell-1 = 0$ et une contradiction. On en déduit que $\ell = 1$.

Exercice 1.14

1. On montre les proposition par récurrence
2. On cherche des solutions sous la forme r^n. Une telle suite (r^n), avec $r\neq 0$, est solution si et seulement si $r^2 = r+1$. Cela donne $r = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc α et β tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. On détermine alors α et β avec u_0 et u_1 :
$$\alpha+\beta = 1 \text{ et } \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$
Cela donne $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Finalement
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$
3. On a $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1,0[$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. (a) On a $v_2 = 2$ et ainsi $v_2 \geqslant v_1 \geqslant v_0$. On montre par récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, $v_{k+1}\geqslant v_k$ ». La propriété est vraie aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie à un rang $n\geqslant 1$, alors
$$v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1}^{\alpha} - v_{n-1}^{\alpha}$$
or $v_{n+1}\geqslant v_n \geqslant v_{n-1} > 0$ et la fonction $x\mapsto x^{\alpha}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $v_{n+2}\geqslant v_{n+1}$. Par récurrence, on obtient le résultat.
   (b) Une éventuelle limite vérifie $\ell = 2\ell^{\alpha}$ d'où $\ell^{1-\alpha} = 2$ et $\ell = 2^{1/(1-\alpha)}$.
   (c) si $\alpha \in]0,1[$ alors $1/(1-\alpha) > 1$ et $\ell > 2$. On montre par récurrence que $v_n \leqslant \ell$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. C'est vrai pour les rangs 0, 1 (et 2). Si pour un certain $n\in\mathbb{N}$, on a v_n et v_{n+1} inférieurs à ℓ alors $v_{n+2}\leqslant 2\ell^{\alpha} = \ell$. La suite est croissante, majorée par ℓ et converge. la seule limite possible étant ℓ, elle converge vers ℓ.
   (d) Si $\alpha > 1$ alors $1/(1-\alpha) < 0$ et $\ell < 1$. La suite étant croissante, si elle convergeait, elle le ferait vers $\ell \geqslant v_2 = 2$. La suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 1.15

→ Soit $f : x\mapsto e^x + x$. On montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Cela donne l'existence et l'unicité du réel x_n, avec, de plus, $x_n = f^{-1}(n)$ (relation importante - on trouve plein de propriétés avec elle). Puisque $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ (bijection réciproque de f qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. On peut également montrer, puisque f et donc f^{-1} sont croissantes, que (x_n) est croissante (par vraiment utile mais bon).

- → Puisque x_n est de limite infini et que $x = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}} e^x$, on a $n = e^{x_n} + x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{x_n}$. Les limites étant infinies, on peut composer par le logarithme, si bien que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
- → On écrit $x_n = \ln n + y_n$ avec $y_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}} \ln n$. On reporte dans l'équation. Cela donne

$$e^{\ln n + y_n} + \ln n + y_n = n = ne^{y_n} + \ln n + y_n.$$

On a donc $n(1-e^{y_n}) = \ln n + y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et $1-e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$, de limite nulle. Cela donne d'une part le fait que y_n tend vers 0, puis $1-e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -y_n$. Finalement $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n}$.
- → On recommence avec $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n$ avec $z_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{\ln n}{n}\right)$... mais ça devient pénible. On trouve $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$.

On peut aussi transformer l'équation en $x_n = \ln(n - x_n)$ et effectuer le même genre de calculs, mais cette fois en un peu plus simple

Exercice 1.17

1. (a) Puisque G n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un élément non nul dans G. Si cet élément $x \in G$ est strictement négatif alors $-x \in G$ et ainsi G contient un élément strictement positif. Ainsi $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide, minoré par 0 et admet une borne inférieure.
   (b) Supposons que $a \notin G$. Il existe un élément $b \in]a, 2a[$ et $b \in G$. Puisque $b > a$, il existe un élément $c \in a, b[$ avec $c \in G$. Alors $b - c \in G$, $b - c > 0$ et $b - c < 2a - a = a$. Cela contredit la définition de a. Finalement $a \in G$. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n.a \in G$ et par symétrie, $a\mathbb{Z} \subset G$. réciproquemet, soit $x \in G$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$. Alors $x - na \in G$ et $0 \leqslant x - na < a$. Ainsi $x - na = 0$ et $x \in a\mathbb{Z}$.
   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in G$ et $y \in]0, \varepsilon[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$. Alors $z = ny \in G$ et $|x - z| < \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe $z \in G$ tel que $|x - z| < \varepsilon$. Ainsi G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. On considère $G = \theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n\theta + 2m\pi, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$. G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Supposons qu'il est discret, sous la forme $a\mathbb{Z}$. Il existe alors $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = k_1 a$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi = k_2 a$. Alors $\frac{\theta}{\pi} = 2\frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. Le sous-groupe G est donc dense dans $\mathbb{R}$. De plus $\sin(n\theta + 2m\pi) = \sin(n\theta)$ si bien que $\{\sin(n\theta + 2m\pi), (n,m) \in \mathbb{Z}^2\} = \{\sin(n\theta), n \in \mathbb{Z}\}$. Puisque G est dense dans $\mathbb{R}$, $\sin(G)$ est dense dans $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Le principe : on fixe x et $\varepsilon > 0$, on choisit n_0 tel que $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ si $n \geqslant n_0$, on descend sous x puis on remonte jusqu'à dépasser x pour la première fois... soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ et n_0 comme au dessus. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} - v_p < x$ puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n_0} - v_p = -\infty$. On considère alors la suite $(u_n - v_p)_{n \geqslant n_0}$. Cette suite diverge vers $+\infty$. Considérons le premier entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $z = u_{n_1+1} - v_p > x$ et soit $y = u_{n_1} - v_p$. On a $y \leqslant x < z$ et $|z - y| = |u_{n_1+1} - u_{n_1}| < \varepsilon$. On a bien trouvé un élément de $h \in H$ tel que $|x - h| < \varepsilon$. L'ensemble est dense dans $\mathbb{R}$.
4. On applique alors le même principe qu'au dessus avec $u_n = \pi\sqrt{n}$ et $v_p = 2p\pi$ (on a bien $u_{n+1} - u_n$ de limite nulle).

Exercice 1.21

1. Démonstration classique du lemme de Cesàro. On se ramène au cas d'une limite nulle en posant $v_n = u_n - \ell$ (plus simple).
2. On a évidemment $f(0) = 0$ donc 0 est bien un point fixe. On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^\alpha} = -\lambda$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \varepsilon]$, $\left|\frac{f(x) - x}{x^\alpha}\right| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda|$ et $f(x) - x$ ne peut donc pas s'annuler sur $]0, \varepsilon]$. Ainsi 0 est le seul point fixe de f sur $[0, \varepsilon]$.
3. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas sur $]0, \varepsilon]$ donc garde un signe constant. Puisque $f(x) - x \underset{x\to 0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$, $f(x) - x$ est négative sur un voisinage de 0. Ne changeant pas de signe sur $[0, \varepsilon]$, on a $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[0, \varepsilon]$ (et même $f(x) - x < 0$ sur $]0, \varepsilon]$). Pour tout $x \in [0, \varepsilon]$, on a donc $0 \leqslant f(x) \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Le segment $[0, \varepsilon]$ est donc stable. Cela garantit que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[0, \varepsilon]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$. La suite est décroissante, à valeurs dans $[0, \varepsilon]$ donc converge vers $\ell \in [0, \varepsilon]$. La limite vérifie $\ell = f(\ell)$ donc ℓ est un point fixe de f dans $[0, \varepsilon]$ donc (u_n) est de limite nulle.
4. On a
$$f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} = x^{1-\alpha}\left(\left(1 - \lambda x^{\alpha-1} + \mathrm{o}(x^{\alpha-1})\right)^{1-\alpha} - 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} x^{1-\alpha}\left((1-\alpha)(-\lambda x^{\alpha-1} + \mathrm{o}(x^{\alpha-1}))\right) \underset{x\to 0}{\sim} (1-\alpha)x^{1-\alpha}(-\lambda x^{\alpha-1})$$
donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} = \lambda(\alpha - 1)$.
5. Si $u_0 = 0$, tous les termes sont nuls et $u_n \sim 0$ (si si!). On suppose dans la suite que $u_0 > 0$. Puisque $u_n \to 0$, on a alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{u_n^{\alpha-1}} = \lambda(\alpha - 1)$$
En notant $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{u_n^{\alpha-1}}$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n^{\alpha-1}} - \frac{1}{u_0^{\alpha-1}}$. Première question donne
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^{\alpha-1}} - \frac{1}{u_0^{\alpha-1}}\right) = \lambda(\alpha - 1)$$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n^{\alpha-1}} = \lambda(\alpha - 1)$. On a finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\lambda(\alpha-1)n)^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.

6. Avec $f(x)=\sin x = x - dfrac16x^3+\mathrm{o}(x^3)$ au voisinage de 0 (et par exemple $[0,\frac{\pi}{2}]$ qui est stable), on a $\lambda=\frac{1}{6}$, $\alpha=3$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$. Avec $f(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)$ et $a=1$, $\alpha=2$ et $\lambda=\frac{1}{2}$, on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Exercice 1.22

1. La fonction $t\mapsto |P(t)Q(t)|$ est continue et positive sur $[-1,1]$ d'où l'existence et la positivité de $N_Q(P)$. Une fois cela fait, on utilise les propriétés de la norme infinie sur $[-1,1]$ pour obtenir :
   → $N_Q(P)=0 \Leftrightarrow \|PQ\|_\infty=0 \Leftrightarrow PQ=0 \Leftrightarrow P=0$ puisque Q n'est pas le polynôme nul,
   → $N_Q(\lambda P)=\|\lambda PQ\|_\infty=|\lambda|\,\|PQ\|_\infty=|\lambda|N_Q(P)$,
   → $N_Q(P_1+P_2)=\|P_1Q+P_2Q\|_\infty \leqslant \|P_1Q\|_\infty+\|P_2Q\|_\infty=N_Q(P_1)+N_Q(P_2)$.
2. Supposons que Q ne s'annule pas sur $[-1,1]$. Il existe $m,M>0$ tels que, pour tout $t\in[-1,1]$, $m\leqslant |Q(t)|\leqslant M$ et ainsi $m|P(t)|\leqslant |PQ(t)|\leqslant M|P(t)|$
   → pour tout $t\in[-1,1]$, $|PQ(t)|\leqslant M|P(t)|\leqslant MN_1(P)$ donc $N_Q(P)\leqslant MN_1(P)$
   → pour tout $t\in[-1,1]$, $m|P(t)|\leqslant |PQ(t)|\leqslant N_Q(P)$ donc $mN_1(P)\leqslant N_Q(P)$
   Dans ce cas les normes sont équivalentes.

   Supposons maintenant que Q s'annule en $a\in]-1,1[$ (le principe est le même si c'est en ±1 avec une gestion du côté). On a toujours $N_Q(P)\leqslant MN_1(P)$. On va construite un polynôme P telle que $N_1(P)=\|P\|_\infty=1$ et $N_Q(P)$ aussi proche de 0 que souhaité. On se donne $\varepsilon>0$. Puisque $Q(a)=0$, il existe $\eta>0$ tel que $I=[a-\eta,a+\eta]\subset[-1,1]$ et, pour tout $t\in I$, $|Q(t)|\leqslant\varepsilon$. Soit $R=1-\lambda(X-a)^2$ avec $\lambda>0$. On a $R(a)=1$ et $R\leqslant 1$. On prend λ suffisamment petit de sorte que $R(1)=1-\lambda(1-a)^2$ et $R(-1)$ soient positifs. On a alors pour tout $t\in[-1,1]$ avec $t\neq a$, $0\leqslant R(t)<1$. On note alors $P_n=R^n$. On a alors

   $$\mathbb{N}_Q(P_n)\leqslant \sup_{t\in[-1,1]\setminus I}|P_nQ(t)|+\sup_{t\in I}|P_nQ(t)|\leqslant M(1-\lambda\eta^2)^n+\varepsilon.$$

   sur $[-1,1]\setminus I$, R et P_n sont maximaux en $a\pm\eta$. Il existe donc n_0 tel que $N_Q(P_{n_0}\leqslant 2\varepsilon$ et $\dfrac{N_A(P_{n_0})}{N_1(P_{n_0}}\leqslant 2\varepsilon$. On a donc la non-équivalence des normes.

Exercice 1.23

1. Soit q un nombre premier divisant $p_1\cdots p_{n-1}+p_n$. Alors $q\leqslant p_1\cdots p_{n-1}+p_n$. De plus, $q\geqslant p_{n+1}$ puisqu'aucun des nombres premiers $p_1,\ldots,p_n$ ne divise $p_1\cdots p_{n-1}+p_n$. On a donc

   $$\frac{p_{n+1}}{p_1\cdots p_n}\leqslant\frac{q}{p_1\cdots p_n}\leqslant\frac{p_1\cdots p_{n-1}+p_n}{p_1\cdots p_n}\leqslant\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_{n-1}}$$

   ce qui permet de conclure.
2. Notons $p_1,\ldots,p_k$ la liste des nombres premiers strictement inférieurs à q_n (ici, on abrège $k(n)$ en k). Ces entiers divisent tous n, donc leur produit le divise aussi. Par conséquent, $n\geqslant p_1\cdots p_k$. En outre, $q_n=p_{k+1}$. Donc

   $$\frac{q_n}{n}\leqslant\frac{p_{k+1}}{p_1\cdots p_k}$$

   Soit alors $\epsilon>0$. Il existe K tel que, si $k>K$, alors $\frac{p_{k+1}}{p_1\cdots p_k}\leqslant\epsilon$. Il existe alors N tel que, si $n\geqslant N$, $\frac{p_{K+1}}{n}\leqslant\epsilon$. Pour ces valeurs de n, deux cas se présentent. Ou bien $k\leqslant K$, et alors

   $$\frac{q_n}{n}=\frac{p_{k+1}}{n}\leqslant\frac{p_{K+1}}{n}\leqslant\epsilon$$

   ou bien $k\geqslant K+1$ et alors

   $$\frac{q_n}{n}=\frac{p_{k+1}}{n}\leqslant\frac{p_{k+1}}{p_1\cdots p_k}\leqslant\epsilon$$

   On a donc démontré le résultat attendu.