CHAPITRE 1 - INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Exercice 1.1

a) Par parité, $I = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+x^4}\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

b) On utilise le changement de variable « $x=\sqrt{t}$ » :

$$I = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\left[\arctan(x)\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathrm{e}^t\sin(2t)\mathrm{d}t &= \int_0^\pi e^t\mathrm{Im}\left(e^{2\mathrm{i}t}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi e^{(1+2\mathrm{i})t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{(1+2\mathrm{i})t}}{1+2\mathrm{i}}\right]_0^\pi = \mathrm{Im}\left[\frac{1-2\mathrm{i}}{5}e^t(\cos(2t)+\mathrm{i}\sin(2t))\right]_0^\pi\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1-2\mathrm{i}}{5}\left(e^\pi-1\right)\right) = \frac{2-2e^\pi}{5}\end{aligned}$$

d) On intègre par parties. Avec $u'(t)=\sin^3 t = \sin t(1-\cos^2 t)$, on a une primitive $u(t)=\frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t$. Cela donne

$$I = [tu(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\cos t - \frac{1}{3}\cos t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t = \left[\sin t - \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{9}\sin^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{7}{9}$$

On peut également linéariser $u'(t)$ en $u'(t) = \frac{3\sin(t)-\sin(3t)}{4}$ et effectuer un calcul similaire.

e) Puisque cosinus est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$,

$$I = \int_\pi^0 \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}(-\sin u)\mathrm{d}u = \int_0^\pi\sqrt{\frac{\sin^2(u/2)}{\cos^2(u/2)}}\sin u\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin(u/2)}{\cos(u/2)}(2\sin(u/2)\cos(u/2))\mathrm{d}u = \int_0^\pi 2\sin^2(u/2)\mathrm{d}u = \int_0^\pi(1-\cos u)\mathrm{d}u = \pi$$

f) On effectue le changement de variable « $u=\sqrt{1+t}$ » soit « $t=u^2-1=\varphi(u)$. On a $\varphi'(u)=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}$ et φ est $\mathscr{C}^1$ et bijective de $[1,\sqrt{2}]$ sur $[0,1]$. Cela donne

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} 2(u^2-1)^2\mathrm{d}u = 2\int_1^{\sqrt{2}} u^4-2u^2+1\mathrm{d}u = 2\left[\frac{1}{5}u^5-\frac{2}{3}u^3+u\right]_1^{\sqrt{2}} = 2(\frac{4}{5}\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1) = \frac{14\sqrt{2}-16}{15}$$

g) on veut poser « $t=\sin(x)$ »- on utilise la fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ où $\varphi(x)=\sin x$ pour $x\in[0,\pi/6]$ avec $\varphi([0,\pi/6])=[0,1/2]$. Cela donne

$$I = \int_0^{\pi/6}\frac{\cos x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/6}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

h)

$$I(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}\right]_0^x = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

i)

$$I = \int_0^{\pi/4}\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = [\ln|\cos t+\sin t|]_0^{\pi/4} = \ln\sqrt{2}$$

j) à l'aide d'un changement de variable $u=e^t$ ou $t=\ln u$:

$$I = \int_0^x \frac{2}{4+e^t+e^{-t}}\mathrm{d}t = \int_1^{e^x}\frac{2}{4+u+\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{e^x}\frac{2}{u^2+4u+1}\mathrm{d}u$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{2}{X^2+4X+1} = \frac{2}{(X+2)^2-3} = \frac{2}{(X+2+\sqrt{3})(X+2-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{X+2-\sqrt{3}}-\frac{1}{X+2+\sqrt{3}}\right)$$

et on obtient

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ln\frac{u+2+\sqrt{3}}{u+2-\sqrt{3}}\right]_1^{e^x}$$

Exercice 1.2

Par différence, on a $\int_0^1 (f - f^2) = 0$. La fonction $f - f^2$ est continue sur $[0,1]$ et positive (car f est à valeurs dans $[0,1]$ donc $0 \leqslant f^2 \leqslant f$). On en déduit que $f - f^2$ est la fonction nulle. Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) - f^2(x) = f(x)(1 - f(x)) = 0$ donc, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ ou 1. Or f est continue sur $[0,1]$ donc $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 1.3

a) on a directement une somme de Riemann
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, définie et continue sur $[0,1]$. La limite vaut alors $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

b) On ne parvient pas à faire apparaître une somme de Riemann. Ici un simple encadrement convient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$$
ce qui donne
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$
Par encadrement, la limite est 1.

c) On récrit l'expression sous la forme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$, somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. La limite vaut $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

d) Somme de Riemman pour $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. La limite est $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$ (pourquoi ?).

e) On encadre en utilisant $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. On note S_n la somme recherchée et on obtient
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{n}{n^{3/2}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}.$$
chaque coté converge vers $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$

Exercice 1.4

On note I_n l'intégrale à chaque question.

1. $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$. Par encadrement $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1-e^{-n}}{n}$. Par encadrement $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. même principe : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\tan 1}{n+1}$.
4. La majoration précédente donne $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{n}{n+1}\tan 1$. Elle ne permet pas de conclure. On intègre par parties pour augmenter la puissance de n au dénominateur.
$$\begin{aligned} I_n &= \left[n\frac{x^{n+1}}{n+1}\tan x \right]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1+\tan^2 x)\,dx \\ &= \frac{n}{n+1}\tan 1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1+\tan^2 x)\,dx. \end{aligned}$$
Comme précédemment la nouvelle intégrale tend vers 0. Finalement $\lim_{n\to+\infty} I_n = \tan 1$.

Exercice 1.5

1. Pour tout $x \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1$. On compare I_n à $\int_0^1 1\,dx$:
$$I_n - \int_0^1 dt = -\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx.$$
Ainsi $|I_n - 1| \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.
2. Cela revient à montre que $I_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{n}$, ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-I_n) = \ln 2$. On a
$$n(1-I_n) = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,dx = \left[x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$$
De plus $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, de limite nulle. On a montré ce que l'on souhaitait.

Exercice 1.6

→ On a $F(x) = \int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 xf(t)\,dt = \int_0^x tf(t)\,dt - x\int_1^x f(t)\,dt$. Cette expression permet de montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ (théorème sur les primitives) et
$$F'(x) = xf(x) - xf(x) - \int_1^x f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt.$$
On en déduit alors $F''(x) = -f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

→ On a déjà $F'(u) = \int_u^1 f(t)\,dt$ si $u \in [0,1]$. Puisque $F(0) = \int_0^1 \min(0,t)f(t)\,dt = 0$, la fonction F est la primitive de F' qui s'annule en 0, d'où $F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right)du$.

Exercice 1.7

1. → Soit $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet une primitive G sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(2x) - G(x)$, ce qui donne la définition, continuité et dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2g(2x) - g(x)$.
   → Par un changement de variable « $u = -t$ », on montre que f est impaire. On ne l'étudie que sur $\mathbb{R}^+$.
   → On résout, sur $\mathbb{R}^+$, $f'(x) \geqslant 0$. Cela équivaut à $2\sqrt{x^4+x^2+1} \geqslant \sqrt{16x^4+4x^2+1}$, on encore, en élevant au carré (tout est positif), $x^4 \leqslant \frac{1}{4}$. La fonction f est croissante sur $[0,1/\sqrt{2}]$, puis décroissante.
   → Pour $x > 0$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4}} = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2x}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. On a $g(0) = 1$ et $f'(0) = 2-1 = 1$. Puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) - f(x) = f(x) \underset{x\to 0}{\sim} xf'(0) = x$.
3. On a
$$f(\frac{1}{2x}) = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \underset{u=1/t}{=} \int_{2x}^{x} \frac{u^2}{\sqrt{u^4+u^2+1}}\,\frac{-du}{u^2} = f(x).$$
En combinant avec la question précédente, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Exercice 1.8

On note $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$.

→ Si $x > 0$, la fonction f est continue sur $[x, 2x]$ donc $g(x)$ est bien définie. Idem si $x < 0$ (en 0 l'écriture n'a pas de sens car f n'existe même pas en 0).

→ Sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F une primitive de f sur cet intervalle. Pour tout $x > 0$, on a alors $g(x) = F(2x) - F(x)$ est ainsi F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$. Puisque $-2x < -x$ et $e^{-2x} < e^{-x}$, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

→ sur $\mathbb{R}_-^*$, le calcul est identique en considérant F une primitive de F sur $\mathbb{R}_-^*$. La fonction est donc décroissante sur chacun des intervalles R_+^* et $\mathbb{R}_-^*$.

→ Étude en 0 : on a envie de dire que g se comporte comme $\int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ lorsque x est proche de 0. De plus $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$. On écrit la différence :
$$g(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t}\mathrm{d}t.$$
On note $h(t) = \frac{e^{-t}-1}{t}$ si $t \neq 0$, qu'on prolonge par continuité en 0 par la valeur $h(0) = 1$. On peut alors considérer une primitive H de h

sur $\mathbb{R}$ tout entier !!! Ainsi pour tout $x \neq 0$, $g(x) - \ln 2 = H(2x) - H(x)$ et puisque H est continue sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to 0} H(2x) - H(x) = H(0) - H(0) = 0$. On a donc $\lim_{x \to 0} g(x) = \ln 2$. La fonction g se prolonge par continuité en 0, elle devient décroissante en 0. De plus $g'(x) = \dfrac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$ si $x \neq 0$ et $g'(x) = \dfrac{1 - 2x - 1 + x + o(x)}{x} = -1 + o(1)$ de limite -1 en 0. Le prolongement est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ également, avec $g'(0) = -1$.

→ Étude en $+\infty$: on intègre par parties afin de faire apparaître une nouvelle intégrale négligeable

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t^2} \mathrm{d}t$$

Cela donne

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-2x}}{2x} \qquad (1)$$

Puisque $x > 0$, on a

$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{x.t} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} g(x)$$

Ainsi la seconde intégrale est négligeable devant $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Le terme de gauche dans (1) équivaut en $+\infty$ à $g(x)$. Finalement $g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$

→ Étude en $-\infty$: même calcul mais le terme de droite dans (1) équivaut cette fois, lorsque $x \to -\infty$, à $-\dfrac{e^{-2x}}{2x}$ (qui est bien positif et tend vers $+\infty$)

Exercice 1.9

La fonction $t \longmapsto \arcsin\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Soit A une de ses primitives sur ce segment. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $\sin^2 x \in [0,1]$), $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt = A(\sin^2 x)$, ce qui permet de dériver facilement (même chose pour le second terme). On obtient le fait que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = 2\sin x \cos x \arcsin\sqrt{\sin^2 x} - 2\sin x \cos x \arccos\sqrt{\cos^2(x)}.$$

La discussion sur les signes risque d'être pénible. Pour restreindre, on peut remarquer que F est paire et de période π. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi/2]$. Pour un tel x, on a

$$F'(x) = 2\sin x \cos x \arcsin(\sin x) - 2\sin x \cos x \arccos(\cos x) = 0.$$

La fonction est donc constante sur $[0, \pi/2]$ et par conséquent sur $\mathbb{R}$. La valeur demandée est $F(\pi/2)$. On cherche à évaluer ailleurs. Le calcul de $F(0)$ ne donne rien de bien simple. On se rappelle que $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$. Pour les regrouper, on calcule $F(\pi/4)$ qui donne $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\, dt = \frac{\pi}{4}$. D'où $\displaystyle\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 1.10

On est tenté d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela, il faudrait faire apparaître des carrés. On aimerait écrire $f = (\sqrt{f})^2$, mais on doit faire attention aux signes. Puisque $fg \geqslant 1$, les fonctions f et g ne s'annulent pas. Elles sont continues donc gardent un signe fixe, et le même, car $fg > 0$. Si f est constamment négative, comme g, on a

$$\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) = \left(\int_0^1 -f\right)\left(\int_0^1 -g\right).$$

On se ramène ainsi à deux fonctions strcitement positives. Dans ce cas

$$\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) = \left(\int_0^1 (\sqrt{f})^2\right)\left(\int_0^1 (\sqrt{g})^2\right) \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{fg}\right)^2 \geqslant 1.$$

Pour avoir égalité, il faut d'une part que $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ soient proportionnelles (pour Cauchy-Schwarz) et d'autre part que $\sqrt{fg}$ soit toujours égal à 1 (on a $\sqrt{fg} \geqslant 1$, d'intégrale valant 1). On a alors f et g proportionnelles et $fg = 1$. Si $f = \lambda g$, on obtient $fg = \lambda g^2 = 1$, d'où $g = 1/\sqrt{\lambda}$ et $f = \sqrt{\lambda}$. Si f est constante non nulle, et g égale à la constante inverse, on a la réciproque.

Exercice 1.11

On note g la fonction et on effectue le changement de variable « $u = x + t$ » (translation). Cela donne

$$g(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos(u - x)\, du = \cos(x) \int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos(u)\, du + \sin(x) \int_{a+x}^{b+x} f(u)\sin(u)\, du.$$

Sous cette forme, la fonction se dérive facilement (produit et théorème sur les primitives)...

Exercice 1.12

On note $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ pour $x > 0$, prolongée par continuité en 0 par 0. Alors $\frac{e^{-n/k}}{k^2} = \frac{1}{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)$. On a ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-n/k}}{k^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

On s'intéresse à la somme de Riemann. Elle converge vers $\int_0^1 f(t)\,dt$. Une primitive F de f sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto e^{-1/x}$, qu'on peut prolonger par continuité par 0 en 0 pour obtenir une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0) = 1/e$. On peut aussi utiliser le fait que $\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(t)\,dt$. Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\varepsilon^1 f(t)\,dt = \left[e^{-1/x}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{e} - e^{-1/\varepsilon},$$

ce qui redonne la valeur $1/e$ en limite. Finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{ne}$.

Exercice 1.13

1. Pour la première inégalité, une étude de la fonction différence suffit. On peut procéder de même pour la seconde inégalité ou utiliser la concavité de la fonction logarithme : la courbe d'équation $y = \ln(1+x)$ est situé sous sa tangente en 0, d'équation $y = x$. Cela donne l'inégalité pour tout $x > -1$.
2. On aimerait passer au logarithme, mais rien de garantit que les facteurs sont positifs. En revanche $\frac{k}{n} \in [0,1]$, f est continue sur $[0,1]$ donc est bornée et il existe $M > 0$ tel que $|f| \leqslant M$ sur $[0,1]$. On a alors $\left|\frac{x}{n}f(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{M|x|}{n}$ et ce nombre est inférieur à $1/2$ dès que n est supérieur à un certain n_0 (dès que $n > 2M|x|$). On peut travailler pour n suffisamment grand et ainsi tous les facteurs sont strictement positifs. On note P_n le produit de n termes. On a alors
$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}f(\frac{k}{n})\right)$$
Intuitivement, lorsque n est grand, le facteur $\ln\left(1+\frac{x}{n}f(\frac{k}{n})\right)$ se comporte comme $\frac{x}{n}f(\frac{k}{n})$, sauf qu'on ne peut pas utiliser d'équivalent n'importe comment (ne surtout pas les sommer). On utilise l'encadrement de la première question (pour n suffisamment grand toujours, afin d'avoir $\left|\frac{x}{n}f(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{1}{2}$)
$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2(\frac{k}{n}) \leqslant \ln P_n \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$
On applique le résultat sur les sommes de Riemann. Le terme de droite a pour limite $x\int_0^1 f(t)\,dt$. On majore le terme supplémentaire :
$$\left|\frac{x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{x^2}{n^2}n.M = \frac{Mx^2}{n},$$
de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement, par encadrement, on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} \ln P_n = x\int_0^1 f(t)\,dt,$$
et par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} P_n = \exp\left(x\int_0^1 f(t)\,dt\right)$.
3. Avec la fonction $f : u \mapsto \frac{1}{1+u}$, on a l'écriture générale. La limite cherchée est donc $\exp(x\ln 2) = 2^x$.

Exercice 1.14

On découpe l'intégrale en morceaux de longueur T. Soit $x > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \leqslant x < (n+1)T$. Plus précisément, on a $n = E(x/T)$, qu'on note $n(x)$. L'encadrement précédent donne $1 - \frac{T}{x} < \frac{n(x)T}{x} \leqslant 1$, ce qui donne $\lim_{x\to+\infty}\frac{n(x)}{x} = \frac{1}{T}$ (on s'en sert après). On a alors, en notant $I(x) = \int_0^x f(t)\,dt$,

$$\frac{1}{x}I(x) = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n(x)}\int_{(k-1)T}^{kT} f(t)\,dt + \int_{n(x)T}^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{n(x)}{x}\int_0^T f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_{n(x)T}^{x} f(t)\,dt,$$

en utilisant la périodicité de f. Le premier terme tend vers la valeur moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Pour le second terme, il suffit de majorer (on intègre sur un segment plus petit qu'une période). La fonction f est continue et donc bornée sur $[0,T]$ (et donc sur $\mathbb{R}$). On note M un majorant de $|f|$.

Alors
$$\left|\int_{n(x)T}^{x} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{n(x)T}^{x} |f(t)|\,dt \leqslant \int_{n(x)T}^{(n(x)+1)T} M\,dt = MT.$$
Par majoration, on obtient une limite nulle pour le second terme, ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{I(x)}{x} = \dfrac{I(T)}{T}$.

Exercice 1.15

Supposons que f change $p < n$ fois de signe sur $[a,b]$. On note $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_p \leqslant b$ les points où f s'annule en changeant de signe. On considère $P = \prod\limits_{k=1}^{p}(X - x_k)$ et $g(t) = f(t)P(t)$. Le polynôme P est de degré au plus $n-1$ et peut se développer en $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$. Par linéarité de l'intégrale, puisque $p \leqslant n-1$,
$$\int_a^b f(t)P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{p} a_k \int_a^b t^k f(t)\,dt = 0.$$
Or la fonction g est continue et de signe constant ($t - x_k$ est négatif à gauche de x_k et positif après donc change le signe d'un seul coté). Puisque g est d'intégrale nulle sur $[a,b]$, la fonction g est identiquement nulle sur $[a,b]$. Ainsi, pour tout t différent de l'un des x_k, on a $f(t)P(t) = 0$ et $P(t) \neq 0$ donc $f(t) = 0$. Finalement f est nulle partout ce qui contredit l'hypothèse.

Exercice 1.16

le terme dans la somme est petit, proche de $\frac{1}{k}$ lorsque k est grand (ce qui sera le cas puisque $k > n$). On note $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$ et on essaie d'étudier la différence $u_n - v_n$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$ (somme de Riemann - on a $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$). On regroupe les termes proches et on est amené à étudier la différence $\sin^2 x - x^2$ avec x compris entre $1/\sqrt{n+1}$ et $1/\sqrt{2n}$. On a
$$\sin^2 x - x^2 = (\sin x - x)(\sin x + x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}.(2x) = -\frac{x^4}{3},$$
on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = -\dfrac{1}{3}$. La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$ si $x \in]0,1]$ et $f(0) = -\frac{1}{3}$ est continue et donc bornée sur $[0,1]$. Il existe M tel que, pour tout $x \in]0,1]$, $\left|\sin^2 x - x^2\right| \leqslant Mx^4$ et cette relation est vraie pour $x = 0$.
remarque : on peut aussi utiliser la continuité de f en 0 afin d'obtenir $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,\alpha]$, $|f(x)| \leqslant 1$ (et alors travailler avec n de sorte que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \alpha$. On peut également utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour comparer $\sin^2 x$ à x^2, on encore obtenir - toujours avec la formule de Taylor - que $|\sin x - x| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$ et ainsi
$$\left|\sin^2 x - x^2\right| = |(\sin x - x)(\sin x + x)| \leqslant 2|x|.\frac{|x|^3}{6} = \frac{x^4}{3}$$
Ça laisse pas mal de façons différentes pour obtenir ces inégalités.

Une fois que cela est fait, on a (on peut remplacer le terme $\frac{1}{3}$ par 1 ou par M selon ce qu'on a fait avant)
$$|u_n - v_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{3k^2} \leqslant \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n}$$
cela donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 1.17

On remarque qu'il y a deux facteurs bien différents : le terme en $\sin\left(\dfrac{k}{n}\right)$ qui prend des valeurs entre 0 et $\sin 1$ et celui en $\sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ qui lui est de plus en plus petit ($k/n^2 \leqslant 1/n$) et par conséquent proche de $\dfrac{k}{n^2}$. On s'intéresse alors à
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n},$$
somme de Riemann attachée à la fonction continue sur $[0,1]$, $x \mapsto x\sin x$. On a ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 x\sin x\,dx$. On montrer alors que $v_n - u_n$ est de limite nulle. On a besoin de contrôler la différence $\sin x - x$ pour $x \in [0,1]$. Avec la formule de Riemann (reste intégrale), on a
$$\sin x = x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2(-\cos t)\,dt,$$

et $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{x^3}{2}$ (on peut même obtenir $x^3/6$ en majorant moins grossièrement). On en déduit

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k^3}{n^6} \leqslant \frac{1}{2}n.\frac{1}{n^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

Finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x \sin x \, dx$.

Exercice 1.18

1. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = M$. Par continuité, il existe $[A,B] \subset [a,b]$ contenant x_0 et avec $B > A$ tel que $f(x) \geqslant M - \varepsilon$ si $x \in [A,B]$. On a alors
$$\int_a^b f(t)^n \, dt \geqslant \int_A^B f(t)^n \, dt \geqslant (B-A)(M-\varepsilon)^n.$$
on a le résultat avec$\alpha = B - A > 0$.
2. Soit $\varepsilon \in]0, M[$. On utilise α comme dans la question précédente et on a alors
$$\alpha(M-\varepsilon)^n \leqslant \int_a^b f(t)^n \, dt \leqslant (b-a)M^n$$
puis
$$\alpha^{1/n}(M-\varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b f(t)^n \, dt\right)^{1/n} \leqslant (b-a)^{1/n} M.$$
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \alpha^{1/n}(M-\varepsilon) = M - \varepsilon$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $M - 2\varepsilon \leqslant \alpha^{1/n}(M-\varepsilon)$. De même il existe n_2 tel que, pour $n \geqslant n_2$, $(b-a)^{1/n} M \leqslant M + 2\varepsilon$. On déduit qu'il existe $n_0 = \max(n_1, n_2)$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,
$$M - 2\varepsilon \leqslant \left(\int_a^b f(t)^n \, dt\right)^{1/n} \leqslant M + 2\varepsilon,$$
On a bien obtenu $\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n \, dt\right)^{1/n} = M$.

Exercice 1.19

1. Si la fonction g existe, alors $f'(t) = g'(t) f(t)$ et $g'(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$. On a donc, si $t_0 \in I$, $g(t) = g(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} \, du$. Réciproquement, notons $g : t \mapsto \alpha + \displaystyle\int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} \, du$. On choisit α de sorte que $g(t_0) = \alpha$ vérifie $f(t_0) = \exp(\alpha)$ (la fonction est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$). On considère $h = f.\exp(-g)$. On a $h' = (f' - fg')\exp(-g) = 0$ car $g' = f'/f$. Ainsi h est constante et $h(t_0) = 1$ donc, pour tout $t \in I$, $h(t) = f(t)\exp(-g(t)) = 1$ et $f(t) = \exp(g(t))$.
2. on reprend les calculs précédents. On a $g(2\pi) = g(0) + \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(u)}{f(u)} \, du$. Or $f(2\pi) = f(0)$, ce qui donne $\exp(g(2\pi) - g(0)) = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt = 2ik\pi$.

Exercice 1.20

1. On peut effectuer le changement de variable « $x = \lambda t$ ». Cela donne
$$\int_0^u |\sin(\lambda t)| \, dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda u} |\sin(x)| \, dx = u \frac{1}{\lambda u}\int_0^{\lambda u} |\sin(x)| \, dx.$$
La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est π périodique. On montre (voir autre exercice) que
$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\int_0^X |\sin x| \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin x| \, dx = \frac{2}{\pi}.$$
Finalement, $\lim_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_0^u |\sin(\lambda t)| \, dt = \frac{2}{\pi} u$. Par différence, pour tout $\alpha, \beta > 0$,
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)| \, dt = \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha).$$
2. On commence par traiter le cas d'une fonction en escalier puis on étend le résultat aux fonctions continues par morceaux.

→ soit f en escalier sur $[a,b]$ et $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision associée avec $f = m_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a

$$\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} m_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin(\lambda t)|\,dt.$$

Par linéarité, $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} m_i(a_{i+1}-a_i) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt$.

→ Soit $\varepsilon > 0$ et g une fonction en escaliers telle que $|f-g| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ (le dénominateur apparaît à la fin des majorations... on l'a modifié a posteriori). On a trois quantités qui sont « proches » : les intégrales de f et g, celles multipliées par $|\sin|$ et le lien entre la fonction de λ pour g et sa limite en fonction de g. On va donc faire intervenir ces trois différences :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt\right| \\
&\quad + \left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| + \left|\frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)||\sin(\lambda t)|\,dt \\
&\quad + \left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| + \frac{2}{\pi}\int_a^b |f(t)-g(t)||\sin(\lambda t)|\,dt \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geqslant A$, on ait

$$\left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et ainsi, pour tout $\lambda > A$,

$$\left|\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

On a bien prouvé que le résultat subsiste si f est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exercice 1.21

1. La fonction f est continue par morceaux sur $[0,1]$ donc bornée. Il existe M tel que $|f| \leqslant M$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|q^n f(q^n)\right| \leqslant M q^n$. Puisque $q \in]0,1[$, la série $\sum q^n f(q^n)$ converge absolument.
2. On commence par écrire

$$(1-q)J(q) = \sum_{n=0}^{+\infty}(q^n - q^{n+1})f(q^n)$$

Cela fait penser à une somme de Riemann avec des points de subdivision q^n, sauf qu'on en a un nombre infini. On propose plusieurs méthodes :

(a) <u>version 1</u> (déborde un peu du programme) : on note $S_N(q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(q^n - q^{n+1})f(q^n)$. Cette fois on a bien une somme de Riemann associée à la subdivision $0 < q^{N+1} < q^N < \ldots < q^2 < q < 1$ (somme à droite). Son pas est le plus grand écart entre deux points consécutifs donc le maximum entre $1-q$ et q^{N+1}. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, dès que le pas d'une subdivision est inférieur à α. On choisit $q < 1$ tel que que $1-q < \alpha$ et N_0 tel que $q^{N_0+1} < \alpha$ $\left|S_N(q) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $N \geqslant N_0$, et puisque la série précédente converge, on a alors en passant à la limite sur $N \to +\infty$,

$$\forall q \in]0,1[, 1-q < \alpha, \left|(1-q)J(q) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

(b) <u>version 2</u> : c'est moins général, on suppose que f est continue et donc uniformément continue sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x-y| < \alpha$. Si $0 < 1-q < \alpha$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|(q^n - q^{n+1})f(q^n) - \int_{q^n}^{q^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{q^n}^{q^{n+1}} \big(f(q^n) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon(q^n - q^{n+1})$$

puisque, pour tout $t \in [q^{n+1}, q^n]$, $|t - q^n| \leqslant |q^n - q^{n+1}| \leqslant 1-q < \alpha$.

On a alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\int_{q^n}^{q^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{q^{N+1}}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ de limite $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ lorsque N tend vers $+\infty$. Cela donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{q^n}^{q^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Finalement $\displaystyle(1-q)J(q) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left((q^n - q^{n+1})f(q^n) - \int_{q^n}^{q^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t\right)$ et

$$\left|(1-q)J(q) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon(q^n - q^{n+1}) = \varepsilon \text{ pour tout } q \in]1-\alpha, 1[.$$

(c) version 3 (par les fonctions en escaliers) : on commence par montrer que le résultat est vrai pour une fonction $\mathbb{1}_{[a,b]}$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. On remarque que $(1-q)J(q)$ pour une telle fonction vaut $q^{n_0} - q^{n_1+1}$ si on a $q^{n_1+1} < a \leqslant q^{n_1} \leqslant q^{n_0} \leqslant b < q_{n_0-1}$. Lorsque q tend vers 1 (n_0 et n_1 dépendent de q), on aura une limite $b - a = \displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\mathrm{d}t$. On généralise aux fonctions en escaliers par linéarité. On fixe alors f, $\varepsilon > 0$ et h en escaliers telle que $\|f-h\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$. On a alors (on notera $J(q,f)$ pour savoir à quelle fonction on se rapporte) :

$$(1-q)J(q,f) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \big((1-q)J(q,f) - (1-q)J(q,h)\big) + \left((1-q)J(q,h) - \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\right) + \left(\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)$$

On a $\big|(1-q)J(q,f) - (1-q)J(q,h)\big| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$, $\left|\displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$ et dès que q suffisamment proche de 1, $\left|(1-q)J(q,h) - \displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$; Finalement $\left|(1-q)J(q,f) - \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$ dès que q suffisamment proche de 1.

Exercice 1.22

On a $f + a \geqslant 0$ et $b - f \geqslant 0$ donc $(f+a)(b-f) = -f^2 + (b-a)f + ab \geqslant 0$. En intégrant sur $[0,1]$, cela donne $ab - \displaystyle\int_0^1 f^2 \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 f^2 \leqslant ab$.

Exercice 1.23

1. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Puisque $\displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P(t)\mathrm{d}t = 0$, P ne garde pas un signe constant (strict) sur $[x_i, y_i]$ donc P s'annule sur $[x_i, y_i]$. Puisque les segments $[x_i, y_i]$ sont deux à deux disjoints, P admet au moins n racines réelles distinctes donc P est nul.
2. On considère φ l'application

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & \left(\displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P(t)\mathrm{d}t\right)_{i=1,\dots,n}\end{array}\right.$$

On vérifie qu'elle est linéaire. On a alors $\dim\ker\varphi = n+1-\mathrm{rg}(\varphi) \geqslant n+1-n = 1$ puisque $\mathrm{rg}\,\varphi \leqslant n$. Il existe bien un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie les conditions demandées.

Exercice 1.24

Supposons que cela soit le cas : on a $e^{t^2} = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ pour $t \in \mathbb{R}$, soit $Q(t)e^{t^2} = P(t)$. On dérive la relation $n+1$ fois où n est le degré de P. Le terme de droite est nul. La dérivée de $t \mapsto Q(t)e^{t^2} = (2tQ(t) + Q'(t))e^{t^2}$ est de la forme $\tilde{Q}(t)e^{t^2}$ avec $\deg\tilde{Q} = \deg Q + 1$. En dérivant $n+1$ fois, il apparaît une expression $R(t)e^{t^2}$ avec $\deg R = \deg Q + n + 1$. On a alors $R(t)e^{t^2} = 0$ pour tout t réel, donc R est nul, d'où une contradiction.

Exercice 1.25

→ L'idée est de voir que $f'(t) - f(t)$ se retrouve dans la dérivation de $g : t \mapsto f(t)e^{-t}$. On a en effet, $g'(t) = e^{-t}(f'(t) - f(t))$. On sait également intégrer g' puisque $\displaystyle\int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t = g(1) - g(0) = e^{-1}$. En combinant tout cela

$$e^{-1} = \left|\int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |g'(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t}|f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 1 \times |f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t$$

Cela donne bien $\displaystyle\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t \geqslant e^{-1}$

→ on cherche les cas d'égalités dans les différentes inégalités utilisées. La première nous dit que g' doit être de signe constant. Pour la seconde, il faut que e^{-t} soit égal à 1 partout où $f' - f$ est non nulle... Cela voudrait dire que $f' - f$ est nulle sauf en 0, soit $f(t) = \lambda e^t$ sur $]0,1]$. On a également la contrainte $f(1) = 1$ donc $\lambda = e^{-1}$ (ça c'est bien) mais le problème est alors en 0 où f doit être nulle... on raccorde la fonction idéale à 0 au voisinage de 0. On considère f_n la fonction qui vaut $e^{-1}e^t$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et $f_n(t) = nte^{-1}e^{1/n}$ sur $[0, \frac{1}{n}]$ (ainsi f_n est continue sur $[0,1]$... mais hélas pas $\mathscr{C}^1$). Avec cette fonction, on a $\int_{1/n}^{1} |f_n' - f_n| = 0$ et

$$\int_0^{1/n]} |f_n' - f_n| = \int_0^{1/n} n(1-t)e^{-1}e^{1/n}\mathrm{d}t = n\left((\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) e^{-1}e^{1/n} = (1 - \frac{1}{2n})e^{-1}e^{1/n}$$

On a alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n' - f_n[= e^{-1}$. Ce qui nous indique que la constante est optimale... il n'y a plus qu'à modifier l'exemple pour transformer la fonction en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$: cela rajoute une contrainte sur la dérivée en $1/n$ et donc il faut s'orienter sur une fonction du second degré avec les trois conditions $f_n(0) = 0$, $f_n(1/n) = f_n'(1/n) = e^{-1}e^{1/n}$.

→ Pour ceux qui veulent terminer les calculs, on obtient (calculs à confirmer quand même) en posant $\mu = e^{-1}e^{1/n}$, $f_n(t) = \mu\big(-n(n-1)t^2 + (2n-1)t\big)$ (sur $[0, 1/n]$), puis $f_n'(t) - f_n(t) = -\mu t\big((2n^2-1) - n(n-1)t\big)$ qui reste négatif sur $[0,1]$ donc sur $[0,1/n]$ et le calcul de $\int_0^{1/n} |f_n' - f_n|$ donne un terme « principal » en $\mu\dfrac{2n^2-1}{2n^2}$ qui tend vers e^{-1} lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 1.26

v1) on note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a $f(x) = F(ax)$. Par récurrence, on montre que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a notamment $f'(x) = af(ax)$, $f''(x) = a^2f'(ax) = a^3f(a^2x)$ et, par récurrence $f^{(n)}(x) = a^{1+2+\cdots+n}f(a^nx)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0) = 0$. On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre, ce qui donne

$$f(x) = 0 + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Si on note $M_x = \sup_{t\in[0,x]} |f(t)|$, en utilisant la relation $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant |f(a^{n+1}t)| \leqslant M_x$, on obtient $|f(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M_x$. Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, si bien que $f(x) = 0$ - cela pour tout $x \in \mathbb{R}$.

v2) Plus simplement (mais ça ressemble beaucoup), on fixe $A > 0$ et on note $M = \sup_{x\in[-A,A]} |f(x)|$. On a alors, pour $x \in [-A, A]$, $|f(x)| \leqslant \left|\int_0^{ax} M\,dt\right| = Ma|x| \leqslant M|x|$, puis en reportant dans la même équation, $|f(x)| \leqslant \left|\int_0^{ax} Mt\,dt\right| = M\dfrac{a^2x^2}{2} \leqslant \dfrac{Mx^2}{2}$. Par récurrence, on a $|f(x)| \leqslant M\dfrac{|x|^n}{n!}$. Pour tout $x \in [-A, A]$, on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = 0$ ce qui donne $f(x) = 0$. La fonction f est nulle sur tout segment $[-A, A]$ donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.27

1. Puisque $|\varphi'| \geqslant \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on a notamment que φ' ne s'annule pas et garde donc un signe constant sur $[a, b]$. On intègre par parties :

$$\int_a^b e^{i\varphi} = \int_a^b i\varphi' e^{i\varphi} \times \frac{1}{i\varphi'} = \int_a^b \left(e^{i\varphi}\right)' \times \frac{1}{i\varphi'} = \left[\frac{e^{i\varphi}}{i\varphi'}\right]_a^b + \frac{1}{i}\int_a^b \frac{e^{i\varphi}\varphi''}{(\varphi')^2}$$

Pour le premier terme :

$$\left|\left[\frac{e^{i\varphi}}{i\varphi'}\right]_a^b\right| \leqslant \frac{1}{|\varphi'(a)|} + \frac{1}{|\varphi'(b)|} \leqslant \frac{2}{\lambda}$$

Pour le second terme on utilise le fait que φ'' garde un signe constant : si $\varphi'' \geqslant 0$, on a

$$\left|\frac{1}{i}\int_a^b e^{i\varphi}\frac{\varphi''}{(\varphi')^2}\right| \leqslant \int_a^b \frac{\varphi''}{\varphi'^2} = \left[-\frac{1}{\varphi'}\right]_a^b = \frac{1}{\varphi'(a)} - \frac{1}{\varphi' b)} \leqslant \frac{2}{\lambda}$$

et si $\varphi'' \leqslant 0$, le début devient

$$\left|\frac{1}{i}\int_a^b e^{i\varphi}\frac{|\varphi''|}{(\varphi')^2}\right| = -\int_a^b \frac{\varphi''}{\varphi'^2}$$

et on obtient une majoration identique. Finalement en combinant les deux inégalités, on a, pour tout $\lambda > 0$ et φ vérifiant les hypothèses données :

$$\left|\int_a^b e^{i\varphi}\right| \leqslant \frac{4}{\lambda}$$

2. On va étendre le résultat en utilisant une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, φ_k sur lesquelles on peut appliquer la première question (et qui va bien converger vers φ). Plus précisément, on va établir que si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie $|\varphi'| \geqslant \lambda$ et φ' croissante, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\geqslant1}$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\varphi_k'| \geqslant \lambda, \varphi_k'$ croissante, et que $(\varphi_k)_{k\geqslant1}$ converge uniformément vers φ sur $[a,b]$.
En effet, l'inégalité des accroissements finis

$$\left|e^{i\varphi k} - e^{i\varphi}\right| \leqslant |\varphi_k - \varphi|$$

entraîne alors que $\left(e^{i\varphi_k}\right)$ converge uniformément vers $e^{i\varphi}$ sur $[a,b]$, donc que

$$\int_a^b e^{i\varphi k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b e^{i\varphi}$$

Il faut donc construire $(\varphi_k)_{k\geqslant 1}$. L'idée est de « lisser » la fonction φ' pour l'approcher par des fonctions au moins $\mathscr{C}^1$ - on pourrait tenter un théorème de Weierstrass pour approcher φ' uniformément par une suite de fonctions polynomiales mais on va perdre la contrainte $\varphi' \geqslant \lambda$. On va plutôt lisser en prenant la valeur moyenne sur un petit intervalle : soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
→ $\psi(t) = \varphi'(a)$ si $t \in]-\infty, a[$,
→ $\psi(t) = \varphi'(t)$ si $t \in [a,b]$
→ $\psi(t) = \varphi'(b)$ si $t \in [b,+\infty[$
Pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}$, soient

$$\psi_k(t) = k\int_t^{t+1/k}\psi = k\int_0^{1/k}\psi(t+s)\mathrm{d}s, \quad \varphi_k(t) = \varphi(a) + \int_a^t \psi_k.$$

La première expression, par le théorème fondamental, montre que ψ_k est de classe $\mathscr{C}^1$, la seconde montre que ψ_k est croissante et que $\left|\psi'_k\right| \geqslant \lambda$ (car on a soit $\psi\geqslant\lambda$ soit $\psi\leqslant-\lambda$). La suite de fonction (ψ_k) converge uniformément vers ψ sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que (φ_k) converge uniformément vers φ sur $[a,b]$: on a

$$\left|\psi_k(t)-\psi(t)\right| = \left|k\int_t^{t+1/k}\big(\psi(u)-\psi(t)\big)\mathrm{d}u\right| \leqslant k\int_t^{t+1/k}\left|\psi(u)-\psi(t)\right|\mathrm{d}u$$

En utilisant la continuité uniforme de ψ sur $\mathbb{R}$ (comprendre pourquoi c'est bien le cas...), si on se donne $\varepsilon>0$, on trouve $\alpha>0$ tel que $\left|\psi(v)-\psi(w)\right|\leqslant\varepsilon$ si $|v-w|\leqslant\alpha$ et ainsi, si $1/k\leqslant\alpha$, on aura $|u-t|\leqslant\alpha$ pour tout $u\in[t,t+1/k]$ et ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\left|\psi_k(t)-\psi(t)\right|\leqslant\varepsilon$.

Exercice 1.28

On utilisera le résultat : si g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite ℓ en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \ell$ (ou encore $\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell x$ lorsque $\ell\neq 0$).
On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x h^n(t)\mathrm{d}t$ pour $x\in\mathbb{R}^+$. On a $F'(x) = h^n(x)$. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} h^n(x)F^n(x) = \ell^n \text{ soit } \lim_{x\to+\infty} F'(x)F^n(x) = \ell^n.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^x F'(t)F^n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}F^{n+1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell^n.x$. On en déduit que $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}((n+1)\ell^n x)^{1/(n+1)}$. Puisque $h(x)F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ell$, on obtient finalement

$$h(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\ell}{\ell^{\frac{n}{n+1}}}\frac{1}{((n+1)x)^{1/n+1}} = \sqrt[n+1]{\frac{\ell}{(n+1)x}}$$