CHAPITRE 2 - DL, ÉQUIVALENTS ET SUITES

Exercice 2.1

On détermine la limite de f/g en $+\infty$. Pour $x>0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln^\alpha x}{x^{\beta-\gamma}}$.

- si $\gamma > \beta$, alors $g(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$,
- si $\gamma < \beta$, alors $f(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(g(x))$,
- si $\beta = \gamma$ et $\alpha > 0$, alors $g(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$,
- si $\beta = \gamma$ et $\alpha < 0$, alors $f(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(g(x))$,
- si $\beta = \gamma$ et $\alpha = 0$, $f = g$.

Exercice 2.2

a) $\frac{(1-\cos x)\arcsin x}{x\tan^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2/2.x}{x.x^2} = \frac{1}{2}$.

b) $(\ln x)^{1/x} = \exp(\frac{1}{x}\ln\ln(x))$. On a $\ln(u) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(u)$ donc $\ln(\ln x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(\ln x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x)$. Finalement $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x} = 1$.

c) $(\sin x)^x - 1 = \exp(x\ln\sin x) - 1$. Or $\sin x \underset{0}{\sim} x$ de limite nulle donc $\ln\sin x \underset{0}{\sim} \ln x$ et $x\ln(\sin x)$ tend vers 0 llorsque x tend vers 0. En utilisant $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on en déduit que $(\sin x)^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$. De même pour le dénominateur. La limite est 1.

d) On pose $x = 1+h$. Cela donne $\frac{(1+h)\ln(1+h)}{2h+h^2} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2.3

On note $f(x) = \frac{a}{\sin(x)} - \frac{b}{\ln(1-x)}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a\ln(1-x) - b\sin x}{\sin(x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{a(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)) - b(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3))}{\sin(x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{-(a+b)x - \frac{a}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{\sin(x)\ln(1-x)} \end{aligned}$$

Si $a+b \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{(a+b)x}{-x^2} = \frac{a+b}{x}$. Si $b = -a$ et $a \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-(a/2)x^2}{-x^2} = a/2$. Sinon $a = b = 0$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$.

Exercice 2.4

a) $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

b) $\ln 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

c) $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$.

d) $1 - \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

e) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

f) $-\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \mathrm{o}(1/x^2)$.

Exercice 2.5

a) $u_n \sim \frac{n^2}{3n^2} = 1/3$

b) $u_n \sim \frac{3^n}{3^n} = 1$

c) $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{1}{2n}$ et $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$

d) $u_n \sim 2\frac{\ln n}{n}$

e) $u_n \sim \frac{n!}{3^n}$

f) $u_n = \sqrt{\ln(1+1/n)} \sim \sqrt{1/n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

g) puisque $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ de limite nulle, on a $u_n \sim \ln\frac{1}{n} = -\ln n$

h) $u_n = n^{\frac{1}{n}}\left(1 - n^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\right) = e^{\frac{\ln n}{n}}\left(1-\exp(-\frac{\ln n}{n(n+1)})\right)$. En utilisant la relation $e^u - 1 \sim u$ en 0, on obtient $u_n \sim \frac{\ln n}{n(n+1)} \sim \frac{\ln n}{n^2}$

i) $\sqrt{n^2+n+1} = n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = n\left(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{8}\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$, ce qui donne $\sqrt{n^2+n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. On a alors

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

donc $u_n \sim (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$.

j) Si $a \in]0,1]$, $u_n \sim \frac{n^a}{n^{2a}} = \frac{1}{n^a}$ et si $a > 1$, $u_n \sim \frac{1}{a^n}$.

Exercice 2.8

La fonction est évidemment de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I\backslash\{0\}$.

→ On commence par la continuité : $f(x) = \frac{\sin x - x}{x\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3/6}{x\times x} = -\frac{x}{6}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et que f est continue en 0.

→ On peut étudier la dérivabilité en 0 (pas vraiment utile) : avec le calcul précédent, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6},$$

ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{6}$. Cela ne garantit pas la continuité de f' en 0.

→ On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$. On cherche la limite en 0. Le dénominateur est équivalent à x^4 en 0. On a

$$\begin{aligned} x^2\cos x - \sin^2 x &= x^2(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)) - (x - \frac{x^3}{6}+O(x^5))^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{2x^4}{6} + O(x^6) = -\frac{1}{6}x^4 + O(x^6) \end{aligned}$$

On a alors $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{6} = f'(0)$ et la continuité de f'. Finalement f est $\mathscr{C}^1$ sur I

remarque : on aurait pu se passer de l'étude de la dérivabilité en 0 en utilisant le théorème de prolongement du caractère $\mathscr{C}^1$: si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ et si f' admet une limite finie ℓ en a alors f est dérivable sur $[a,b]$ avec $f'(a) = \ell$ et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
Attention : ce n'est pas un théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ de f puisqu'il n'y a pas à prolonger f - elle admet déjà une valeur en a.

Exercice 2.9

Soit $u = \arccos(x)$ avec x proche de 1 (par valeurs inférieures). On a $\lim\limits_{x\to 1}\arccos(x) = 0$ et $\cos(u) = x = 1 - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$. Ainsi $2(1-x) = u^2 + \mathrm{o}(u^2)$, ce qui donne $2(1-x) \underset{x\to 1}{\sim} u^2$. Puisque $u > 0$, cela donne $u \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

Exercice 2.10

On n'a pas de théorème qui permet d'intégrer entre 2 bornes un DL. On note $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ (F est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ qui s'annule en 0 - elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On a $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$ et $F(0) = 0$. On permet obtenir alors le DL de F en 0 : $F(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$. On a alors

$$f(x) = F(x^2) - F(x) = (x^2 + \mathrm{O}(x^6)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)) = -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

Exercice 2.11

La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, sa dérivée est $f' : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ qui est strictement positive. La fonction f réalise une bijection strictement croissante de $]-1,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$. La fonction admet une réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et $f^{-1}(0) = 0$ puisque $f(0) = 0$) - cela garantit l'existence d'un DL de f^{-1} en 0 à tout ordre. On écrit $f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + \mathrm{o}(y^3)$. On a $f^{-1}(f(x)) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$ (par exemple). Or $f(x) = x + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$. Par composition (on a bien $f(x)$ de limite nulle lorsque x tend vers 0), on peut substituer y par le DL de $f(x)$ en 0 (on a alors $y^3 \underset{x\to 0}{\sim} 8x^3$ et ainsi le terme en $\mathrm{o}(y^3)$ est un terme en $\mathrm{o}(x^3)$. On développe, regroupe et on utilise l'unicité du DL pour obtenir les équations (termes en x, x^2 et x^3 dans le DL de $f^{-1}(f(x))$) :

$$2a = 1, 4b - \frac{a}{2} = 0 \text{ et } 8c - 2b + \frac{a}{3} = 0.$$

On trouve $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}y^2 - \frac{1}{192}y^3 + \mathrm{o}(y^3)$.

Exercice 2.12

1. Soit $Q(x) = x^2 - 2tx + 1$. Son discriminant est $\Delta = 4(t^2 - 1)$. Lorsque $t \in]0, 1[$, Q reste strictement positif et $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}$. Si $t = 1$, $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Lorsque $t > 1$, Q admet deux racines strictement positives $x_1 = t - \sqrt{t^2 - 1} < x_2 = t + \sqrt{t^2 - 1}$ (la somme est $2t > 0$, le produit 1). Alors $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}\backslash[x_1, x_2]$.
2. Dans toutes les situations, il existe $\alpha > 0$ tel que f_t est définie et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$. La fonction admet alors un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. On note $u = x^2 - 2xt = x(x - 2t)$. Cette quantité tend vers 0 lorsque x tend vers 0. De plus $u \underset{x \to 0}{\sim} x$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors
$$f_t(x) = (1 + u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(u^n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k (x - 2t)^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$
En développant, le terme u^k donne des termes en x^m pour $m \in [\![k; 2k]\!]$, avec des coefficients polynomiaux en t. En regroupant les termes de même degré, on obtient une expression comme demandée.
3. On cherche une expression permettant d'écrire l'unicité des coefficients d'un développement limité. On remarque que
$$f_t'(x) = \frac{t - x}{(1 - 2xt + x^2)^{3/2}} = \frac{t - x}{1 - 2xt + t^2} f_t(x),$$
ce qui donne la relation $(1 - 2xt + x^2) f_t'(x) = (t - x) f_t(x)$ (au voisinage de 0). Soit $k \geqslant 1$. On écrit un développement limité à un ordre suffisant des deux cotés (afin d'à voir un ordre final d'au moins $k + 1$), et on regarde les termes en x^k. Par unicité, on obtient
$$(k + 1)P_{k+1}(t) - 2tkP_k(t) + (k - 1)P_{k-1}(t) = tP_k(t) - P_{k-1}(t).$$
On récrit cela en
$$(k + 1)P_{k+1}(t) = (2k + 1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t).$$
Cela donne une relation de récurrence entre les polynômes P_k, ce qui permet de les calculer facilement (on montre notamment que P_k est de degré k).

Exercice 2.13

On écrit $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. On a alors $z_{n+1} = r_n \left(\frac{e^{i\theta_n} + 1}{2}\right) = r_n e^{i\theta_n/2} \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$. On obtient les relations $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$ et $r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$. On obtient facilement $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ et

$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = r_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(\theta_0/2^{k-1})}{2\sin(\theta_0/2^k)} = r_0 \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin(\theta_0/2^n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} r_0 \frac{\sin\theta_0}{2^n \theta_0/2^n}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = r_0 \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

Exercice 2.14

1. On a $P_n'(x) = nx^{n-1} + 1$ et P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $P_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(x) = +\infty$, on en déduit l'existence d'une unique racine positive x_n. On remarque également que $P_n(1) = 2 - 1 = 1$, on a donc $x_n \in]0, 1[$.
2. On a $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 < x_n^n - x_n + 1 = 0$. Ainsi $P_{n+1}(x_n) < 0$ et $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Par croissance de P_{n+1}, on obtient $x_n < x_{n+1}$ et la suite (x_n) est strictement croissante. Puisqu'elle est majorée par 1, elle converge vers $\ell \in]0, 1]$. Supposons $\ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant \ell$ et $x_n^n \leqslant \ell^n$, ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n = 0$. Puisque $P_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un passage à la limite donne $0 + \ell - 1 = 0$ et une contradiction. On en déduit que $\ell = 1$.

Exercice 2.15

1. On montre les proposition par récurrence
2. On cherche des solutions sous la forme r^n. Une telle suite (r^n), avec $r \neq 0$, est solution si et seulement si $r^2 = r + 1$. Cela donne $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Il existe donc α et β tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. On détermine alors α et β avec u_0 et u_1 :

$$\alpha + \beta = 1 \text{ et } \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$$

Cela donne $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

3. On a $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1,0[$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. (a) On a $v_2 = 2$ et ainsi $v_2 \geqslant v_1 \geqslant v_0$. On montre par récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $v_{k+1} \geqslant v_k$ ». La propriété est vraie aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie à un rang $n \geqslant 1$, alors

   $$v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1}^\alpha - v_{n-1}^\alpha$$

   or $v_{n+1} \geqslant v_n \geqslant v_{n-1} > 0$ et la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $v_{n+2} \geqslant v_{n+1}$. Par récurrence, on obtient le résultat.

   (b) Une éventuelle limite vérifie $\ell = 2\ell^\alpha$ d'où $\ell^{1-\alpha} = 2$ et $\ell = 2^{1/(1-\alpha)}$.

   (c) si $\alpha \in]0,1[$ alors $1/(1-\alpha) > 1$ et $\ell > 2$. On montre par récurrence que $v_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour les rangs 0, 1 (et 2). Si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a v_n et v_{n+1} inférieurs à ℓ alors $v_{n+2} \leqslant 2\ell^\alpha = \ell$. La suite est croissante, majorée par ℓ et converge. la seule limite possible étant ℓ, elle converge vers ℓ.

   (d) Si $\alpha > 1$ alors $1/(1-\alpha) < 0$ et $\ell < 1$. La suite étant croissante, si elle convergeait, elle le ferait vers $\ell \geqslant v_2 = 2$. La suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 2.16

→ Soit $f : x \mapsto e^x + x$. On montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Cela donne l'existence et l'unicité du réel x_n, avec, de plus, $x_n = f^{-1}(n)$ (relation importante - on trouve plein de propriétés avec elle). Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ (bijection réciproque de f qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. On peut également montrer, puisque f et donc f^{-1} sont croissantes, que (x_n) est croissante (par vraiment utile mais bon).

→ Puisque x_n est de limite infini et que $x = \underset{x\to+\infty}{o} e^x$, on a $n = e^{x_n} + x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{x_n}$. Les limites étant infinies, on peut composer par le logarithme, si bien que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

→ On écrit $x_n = \ln n + y_n$ avec $y_n = \underset{n\to+\infty}{o} \ln n$. On reporte dans l'équation. Cela donne

$$e^{\ln n + y_n} + \ln n + y_n = n = ne^{y_n} + \ln n + y_n.$$

On a donc $n(1 - e^{y_n}) = \ln n + y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et $1 - e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$, de limite nulle. Cela donne d'une part le fait que y_n tend vers 0, puis $1 - e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -y_n$. Finalement $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n}$.

→ On recommence avec $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n$ avec $z_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$... mais ça devient pénible. On trouve $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$.

On peut aussi transformer l'équation en $x_n = \ln(n - x_n)$ et effectuer le même genre de calculs, mais cette fois en un peu plus simple

Exercice 2.18

1. (a) Puisque G n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un élément non nul dans G. Si cet élément $x \in G$ est strictement négatif alors $-x \in G$ et ainsi G contient un élément strictement positif. Ainsi $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide, minoré par 0 et admet une borne inférieure.

   (b) Supposons que $a \notin G$. Il existe un élément $b \in]a, 2a[$ et $b \in G$. Puisque $b > a$, il existe un élément $c \in a, b[$ avec $c \in G$. Alors $b - c \in G$, $b - c > 0$ et $b - c < 2a - a = a$. Cela contredit la définition de a. Finalement $a \in G$. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n.a \in G$ et par symétrie, $a\mathbb{Z} \subset G$. réciproquemet, soit $x \in G$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$. Alors $x - na \in G$ et $0 \leqslant x - na < a$. Ainsi $x - na = 0$ et $x \in a\mathbb{Z}$.

   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in G$ et $y \in]0, \varepsilon[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$. Alors $z = ny \in G$ et $|x - z| < \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe $z \in G$ tel que $|x - z| < \varepsilon$. Ainsi G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. On considère $G = \theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n\theta + 2m\pi, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$. G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Supposons qu'il est discret, sous la forme $a\mathbb{Z}$. Il existe alors $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = k_1 a$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi = k_2 a$. Alors $\frac{\theta}{\pi} = 2\frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. Le sous-groupe G est donc dense dans $\mathbb{R}$. De plus $\sin(n\theta + 2m\pi) = \sin(n\theta)$ si bien que $\{\sin(n\theta + 2m\pi), (n,m) \in \mathbb{Z}^2\} = \{\sin(n\theta), n \in \mathbb{Z}\}$. Puisque G est dense dans $\mathbb{R}$, $\sin(G)$ est dense dans $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Le principe : on fixe x et $\varepsilon > 0$, on choisit n_0 tel que $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ si $n \geqslant n_0$, on descend sous x puis on remonte jusqu'à dépasser x pour la première fois... soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ et n_0 comme au dessus. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} - v_p < x$ puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n_0} - v_p = -\infty$. On considère alors la suite $(u_n - v_p)_{n \geqslant n_0}$. Cette suite diverge vers $+\infty$. Considérons le premier entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $z = u_{n_1+1} - v_p > x$ et soit $y = u_{n_1} - v_p$. On a $y \leqslant x < z$ et $|z - y| = |u_{n_1+1} - u_{n_1}| < \varepsilon$. On a bien trouvé un élément de $h \in H$ tel que $|x - h| < \varepsilon$. L'ensemble est

dense dans $\mathbb{R}$.

4. On applique alors le même principe qu'au dessus avec $u_n = \pi\sqrt{n}$ et $v_p = 2p\pi$ (on a bien $u_{n+1} - u_n$ de limite nulle).

Exercice 2.19

L'idée est de se dire que $f(n+1) - f(n) = \int_n^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t$ va être petit donc la suite $(f(n))$ va aller lentement vers $+\infty$ et s'approcher d'un réel $\alpha + 2k\pi$.
Soit $\beta \in \mathbb{U}$ et $\alpha \in [0, 2\pi]$ tel que $\beta = e^{i\alpha}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $u \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, $\left|e^{iu} - \beta\right| < \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ avec $\frac{1}{N} \leqslant \eta$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, $|f'(t)| \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \eta$. Pour tout $m \geqslant A$, $\left|f(m+1) - f(m)\right| \leqslant \eta$. On pose $n_0 = \lceil A \rceil$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*\ f(n_0 + p) = f(n_0) + \sum_{k=0}^{p-1} \int_k^{k+1} f'(t)\mathrm{d}t$$

Soit $K \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha + 2K\pi > f(n_0)$. Puisque $\lim\limits_{p \to +\infty} f(n_0 + p) = +\infty$, il existe un entier $p_0 > 0$ tel que $f(n_0 + p) > \alpha + 2K\pi$. On prend le plus petit. On a alors $f(n_0 + p - 1) \leqslant \alpha + 2K\pi < f(n_0 + p)$ avec $f(n_0 + p) - f(n_0 + p - 1) \leqslant \eta$. On a donc $\left|f(n_0 + p) - (\alpha + 2K\pi)\right| = \left|f(n_0 + p) - 2K\pi - \alpha\right| \leqslant \eta$ et par périodicité $\left|e^{i \cdot f(n_0 + p)} - \beta\right| < \varepsilon$.

Exercice 2.21

→ L'équation équivaut à $\tan(x) - \frac{1}{x} = 0$. La fonction $x \mapsto \tan(x) - \frac{1}{x}$ est continue, strictement croissante sur I_n avec des limites infinies aux bornes de I_n. Par bijection, l'équation admet une unique solution sur I_n.

→ On a $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, et, par encadrement, $\frac{x_n}{n\pi}$ tend vers 1. On a donc $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n\pi$.

→ On écrit $x_n = n\pi + y_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$. On reporte dans l'équation, ce qui donne

$$1 = (n\pi + y_n)\tan(n\pi + y_n) = (n\pi + y_n)\tan(y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\pi y_n.$$

On en déduit $y_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$.

→ De même $x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n$ avec $z_n = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(y_n)$, soit $z = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n})$. On reporte de nouveau et on effectue un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} 1 &= (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n)\tan(\frac{1}{n\pi} + z_n) = (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n)(\frac{1}{n\pi} + z_n + \frac{1}{3\pi^3 n^3} + \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^3}) \\ &= 1 + n\pi z_n + \frac{1}{3\pi^2 n^2} + \frac{1}{n^2\pi^2} + \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

d'où

$$n\pi z_n = -\frac{4}{3n^2\pi^2} + \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^2}) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^2\pi^2}.$$

On en déduit que $z_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^3\pi^3}$, et

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{4}{3n^3\pi^3} + \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^3}).$$

Exercice 2.23

1. Démonstration classique du lemme de Cesàro. On se ramène au cas d'une limite nulle en posant $v_n = u_n - \ell$ (plus simple).

2. On a évidemment $f(0) = 0$ donc 0 est bien un point fixe. On a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^\alpha} = -\lambda$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \varepsilon]$, $\left|\frac{f(x) - x}{x^\alpha}\right| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda|$ et $f(x) - x$ ne peut donc pas s'annuler sur $]0, \varepsilon]$. Ainsi 0 est le seul point fixe de f sur $[0, \varepsilon]$.

3. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas sur $]0, \varepsilon]$ donc garde un signe constant. Puisque $f(x) - x \underset{x \to 0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$, $f(x) - x$ est négative sur un voisinage de 0. Ne changeant pas de signe sur $[0, \varepsilon]$, on a $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[0, \varepsilon]$ (et même $f(x) - x < 0$ sur $]0, \varepsilon]$). Pour tout $x \in [0, \varepsilon]$, on a donc $0 \leqslant f(x) \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Le segment $[0, \varepsilon]$ est donc stable. Cela garantit que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[0, \varepsilon]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$. La suite est décroissante, à valeurs dans $[0, \varepsilon]$ donc converge vers $\ell \in [0, \varepsilon]$. La limite vérifie $\ell = f(\ell)$ donc ℓ est un point fixe de f dans $[0, \varepsilon]$ donc (u_n) est de limite nulle.

4. On a

$$f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} = x^{1-\alpha}\left(\left(1 - \lambda x^{\alpha-1} + \mathrm{o}(x^{\alpha-1})\right)^{1-\alpha} - 1\right) \underset{x \to 0}{\sim} x^{1-\alpha}\left((1-\alpha)(-\lambda x^{\alpha-1} + \mathrm{o}(x^{\alpha-1}))\right) \underset{x \to 0}{\sim} (1-\alpha)x^{1-\alpha}(-\lambda x^{\alpha-1})$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} = \lambda(\alpha - 1)$.

5. Si $u_0 = 0$, tous les termes sont nuls et $u_n \sim 0$ (si si!). On suppose dans la suite que $u_0 > 0$. Puisque $u_n \to 0$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{u_n^{\alpha-1}} = \lambda(\alpha-1)$$

En notant $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{u_n^{\alpha-1}}$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n^{\alpha-1}} - \frac{1}{u_0^{\alpha-1}}$. Première question donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^{\alpha-1}} - \frac{1}{u_0^{\alpha-1}}\right) = \lambda(\alpha-1)$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n^{\alpha-1}} = \lambda(\alpha-1)$. On a finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\lambda(\alpha-1)n)^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.

6. Avec $f(x) = \sin x = x - dfrac16x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0 (et par exemple $[0, \frac{\pi}{2}]$ qui est stable), on a $\lambda = \frac{1}{6}$, $\alpha = 3$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$. Avec $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $a = 1$, $\alpha = 2$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Exercice 2.24

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ était bornée alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le serait aussi (il n'y a qu'un nombre fini de termes avant n_0). On a donc $U_n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\limsup u_n = +\infty$.
2. la suite est bornée - ainsi U_n et V_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Puisque $\{u_k, k \geqslant n+1\} \subset \{u_k, k \geqslant n\}$, on a $U_{n+1} \leqslant U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante. Elle est minorée par tout minorant de u. On en déduit qu'elle converge. De même $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc converge.
   (b) Avec les notations précédentes : soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant V_n \leqslant V_N$. Ainsi $U_N \leqslant V_N$. Cela étant vrai pour tout N, l'existence des limites donne $\limsup u_n \leqslant \limsup v_n$.
   (c) Soit φ une valeur d'adhérence de la suite et ψ une extractrice telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{\psi(n)} = \varphi$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit n_0 tel que $\psi(n_0) \geqslant N$. Par croissance de ψ, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\psi(n) \geqslant N$ et ainsi $u_{\psi(n)} \leqslant U_N$. On en déduit, lorsque n tend vers $+\infty$ que $\varphi \leqslant U_N$. On a donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\varphi \leqslant U_N$ donc $\varphi \leqslant \limsup u_n$. De même pour l'autre inégalité.
   (d) Si $\limsup u_n = \liminf u_n = \ell$, alors la seule valeur d'adhérence de u est ℓ. La suite étant bornée, elle converge vers son unique valeur d'adhérence. Réciproquement, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On se donne $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. On en déduit que $U_{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon$ et par décroissance de la suite U, sa limite est aussi inférieure à $\ell + \varepsilon$. On a donc $\limsup u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\limsup u_n \leqslant \ell$. De la même façon, $\liminf u_n \geqslant \ell$. En combinant avec l'inégalité entre limsup et liminf, on en déduit qu'elles sont toutes les deux égales à ℓ.
   (e) il reste à montrer que $a = \limsup u_n$ est une valeur d'adhérence de la suite u et pour cela, on doit construire une extractrice ψ telle que $\lim u_{\psi(n)} = a$. On va construire ψ, strictement croissante, telle que $|u_{\psi(n)} - a| \leqslant \frac{1}{n}$ (par exemple). On peut choisir $\psi(0) = 0$. On suppose avoir construit $\psi(0) < \psi(1) < \ldots < \psi(n-1)$ avec $|u_{\psi(k)} - a| \leqslant \frac{1}{k}$ pour k allant de 1 à $n-1$. On note $N = \psi(n-1)$. Il existe $m > N$ tel que $a \leqslant U_m < a + \frac{1}{n}$. Par définition de U_m, il existe $k \geqslant m$ tel que $u_k \geqslant U_m - \frac{1}{n} \geqslant a - \frac{1}{n}$. On a également, puisque $k \geqslant m$, $u_k \leqslant U_m \leqslant a + \frac{1}{n}$. On a donc construit un entier $k \geqslant m > N = \psi(n-1)$ tel que $|u_k - a| \leqslant \frac{1}{n}$. On note $\psi(n) = k$ et on a bien $\psi(n) > \psi(n-1)$ et $\left|u_{\psi(n)} - a\right| \leqslant \frac{1}{n}$.
3. (a) On a $m = qn + r$. On a donc $u_m \leqslant u_{qn} + u_r$. On montre par récurrence simple que $u_n \leqslant q.u_n$. Cela donne le résultat.
   (b) On a par récurrence $u_m \leqslant m.u_1$ donc $\frac{u_m}{m} \leqslant u_1$. La suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, ce qui suffit pour définir sa limite supérieure. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on reprend la division euclidienne de m par n : $m = qn + r$. On a $u_m \leqslant qu_n + u_r$. Ainsi

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{q}{m} u_n + \frac{u_r}{m}$$

   On note $M = \max(u_0, u_{n+1}, \ldots, u_{n-1})$. On a $m \geqslant qn$ donc $\frac{q}{m} \leqslant \frac{1}{n}$. On a donc, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n} + \frac{M}{m}$$

   Puisque $\lim_{m\to+\infty} \frac{u_n}{n} + \frac{M}{m} = \frac{u_n}{n}$, les résultats précédents (comparaison des limsup et égalité avec la limite en cas de convergence), donnent $\limsup \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}$.
   (c) On a donc montré que $\limsup \frac{u_m}{m}$ était un minorant de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$. On a donc $\limsup \frac{u_m}{m} \leqslant \liminf \frac{u_m}{m}$. Sachant qu'on a l'autre inégalité, on obtient l'égalité et la convergence.
   (d) La borne inférieure existe bien puisque la suite est à termes positifs. Pour tout $m \geqslant 1$, $\ell \leqslant \frac{u_m}{m}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_{n_0}}{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon$. Avec le raisonnement précédent, pour tout $m \geqslant 1$, il existe $r \in [\![0; n_0 - 1]\!]$ et $q_m \in \mathbb{N}$ tel que $m = q_m n_0 + r$ et

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{q_m}{m} \frac{u_{n_0}}{n_0} + \frac{u_r}{m}$$

On majore les termes $u_0, \dots, u_{n_0-1}$ par une constante M. La suite de terme général $\frac{q_m}{m}\frac{u_{n_0}}{n_0} + \frac{u_r}{m}$ tend vers $\frac{u_{n_0}}{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon$ donc il existe un rang m_0 à partir duquel les termes sont inférieurs à $\ell + 2\varepsilon$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geqslant m_0, \ell \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \ell + 2\varepsilon.$$

On a bien prouvé que $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} = \ell$.

4. Notons $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des chemins simples issus de $(0,0)$ de longueur $n+1$.
   - → Tout d'abord, l'ensemble des suites $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ telles que $x_0 = (0,0)$ et, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{k+1} - x_k \in \{(1,0),(0,1)\}$, est une partie de $\mathscr{A}_n$ de cardinal 2^n, tandis que le nombre total de n-chemins issus de $(0,0)$ est égal à 4^n, on a $2^n \leqslant A_n \leqslant 4^n$
   - → L'application qui à $x \in \mathscr{A}_{n+m}$ associe le couple $(y,z) \in \mathscr{A}_n \times \mathscr{A}_m$, où

     $$\forall k \in [\![0,n]\!], y_k = x_k, \quad \forall k \in [\![0,m]\!], z_k = x_{n+k} - x_n$$

     est clairement bien définie et injective. Donc $A_{n+m} \leqslant A_n A_m$ et la suite $(\ln(A_n))_n$ est sous-additive. De plus, d'après le premier point, $2 \leqslant \frac{\ln(A_n)}{n} \leqslant 4$. D'après les parties précédentes, la suite $\left(\frac{\ln(A_n)}{n}\right)_n$ converge vers un certain $\gamma \in [2,4]$.
   - → Enfin, on peut écrire, pour tout $t > \gamma$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(A_n)}{n} - t = \gamma - t < 0$, donc

     $$\lim_{n\to+\infty} \ln(A_n) - nt = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{A_n}{t^n} = -\infty.$$

     Par composition de limites avec l'exponentielle, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{A_n}{t^n} = 0$ et $A_n = o(t^n)$. On montre l'autre limite de la même manière.

Exercice 2.25

1. Soit q un nombre premier divisant $p_1 \cdots p_{n-1} + p_n$. Alors $q \leqslant p_1 \cdots p_{n-1} + p_n$. De plus, $q \geqslant p_{n+1}$ puisqu'aucun des nombres premiers $p_1, \dots, p_n$ ne divise $p_1 \cdots p_{n-1} + p_n$. On a donc

   $$\frac{p_{n+1}}{p_1 \cdots p_n} \leqslant \frac{q}{p_1 \cdots p_n} \leqslant \frac{p_1 \cdots p_{n-1} + p_n}{p_1 \cdots p_n} \leqslant \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n-1}}$$

   ce qui permet de conclure.
2. Notons $p_1, \dots, p_k$ la liste des nombres premiers strictement inférieurs à q_n (ici, on abrège $k(n)$ en k). Ces entiers divisent tous n, donc leur produit le divise aussi. Par conséquent, $n \geqslant p_1 \cdots p_k$. En outre, $q_n = p_{k+1}$. Donc

   $$\frac{q_n}{n} \leqslant \frac{p_{k+1}}{p_1 \cdots p_k}$$

   Soit alors $\epsilon > 0$. Il existe K tel que, si $k > K$, alors $\frac{p_{k+1}}{p_1 \cdots p_k} \leqslant \epsilon$. Il existe alors N tel que, si $n \geqslant N$, $\frac{p_{K+1}}{n} \leqslant \epsilon$. Pour ces valeurs de n, deux cas se présentent. Ou bien $k \leqslant K$, et alors

   $$\frac{q_n}{n} = \frac{p_{k+1}}{n} \leqslant \frac{p_{K+1}}{n} \leqslant \epsilon$$

   ou bien $k \geqslant K+1$ et alors

   $$\frac{q_n}{n} = \frac{p_{k+1}}{n} \leqslant \frac{p_{k+1}}{p_1 \cdots p_k} \leqslant \epsilon$$

   ce qui donne le résultat attendu.