## CHAPITRE 4 - DL, ÉQUIVALENTS

### Exercice 4.1

On détermine la limite de $f/g$ en $+\infty$. Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ln^\alpha x}{x^{\beta-\gamma}}$.

- → si $\gamma>\beta$, alors $g(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$,
- → si $\gamma<\beta$, alors $f(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(g(x))$,
- → si $\beta=\gamma$ et $\alpha>0$, alors $g(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$,
- → si $\beta=\gamma$ et $\alpha<0$, alors $f(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(g(x))$,
- → si $\beta=\gamma$ et $\alpha=0$, $f=g$.

### Exercice 4.2

a) $\dfrac{(1-\cos x)\arcsin x}{x\tan^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2/2.x}{x.x^2} = \dfrac{1}{2}$.

b) $(\ln x)^{1/x} = \exp(\frac{1}{x}\ln\ln(x))$. On a $\ln(u) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(u)$ donc $\ln(\ln x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(\ln x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x)$. Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/x} = 1$.

c) $(\sin x)^x - 1 = \exp(x\ln\sin x) - 1$. Or $\sin x \underset{0}{\sim} x$ de limite nulle donc $\ln\sin x \underset{0}{\sim} \ln x$ et $x\ln(\sin x)$ tend vers 0 llorsque $x$ tend vers 0. En utilisant $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on en déduit que $(\sin x)^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$. De même pour le dénominateur. La limite est 1.

d) On pose $x = 1+h$. Cela donne $\dfrac{(1+h)\ln(1+h)}{2h+h^2} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h}{2h} = \dfrac{1}{2}$.

### Exercice 4.3

On note $f(x) = \dfrac{a}{\sin(x)} - \dfrac{b}{\ln(1-x)}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a\ln(1-x) - b\sin x}{\sin(x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{a(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)) - b(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3))}{\sin(x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{-(a+b)x - \frac{a}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{\sin(x)\ln(1-x)} \end{aligned}$$

Si $a+b\neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{(a+b)x}{-x^2} = \dfrac{a+b}{x}$. Si $b=-a$ et $a\neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-(a/2)x^2}{-x^2} = a/2$. Sinon $a=b=0$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$.

### Exercice 4.4

a) $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

b) $\ln 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

c) $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$.

d) $1 - \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

e) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

f) $-\ln x + 1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x^2} + \mathrm{o}(1/x^2)$.

### Exercice 4.5

a) $u_n \sim \dfrac{n^2}{3n^2} = 1/3$

b) $u_n \sim \dfrac{3^n}{3^n} = 1$

c) $\sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \dfrac{1}{2n}$ et $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$

d) $u_n \sim 2\dfrac{\ln n}{n}$

e) $u_n \sim \dfrac{n!}{3^n}$

f) $u_n = \sqrt{\ln(1+1/n)} \sim \sqrt{1/n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

g) puisque $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ de limite nulle, on a $u_n \sim \ln\frac{1}{n} = -\ln n$

h) $u_n = n^{\frac{1}{n}}\left(1 - n^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\right) = e^{\frac{\ln n}{n}}\left(1 - \exp(-\frac{\ln n}{n(n+1)})\right)$. En utilisant la relation $e^u - 1 \sim u$ en 0, on obtient $u_n \sim \frac{\ln n}{n(n+1)} \sim \frac{\ln n}{n^2}$

i) $\sqrt{n^2+n+1} = n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = n\left(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{8}\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$, ce qui donne $\sqrt{n^2+n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. On a alors

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

donc $u_n \sim (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$.

j) Si $a \in ]0,1]$, $u_n \sim \frac{n^a}{n^{2a}} = \frac{1}{n^a}$ et si $a > 1$, $u_n \sim \frac{1}{a^n}$.

**Exercice 4.8**

La fonction est évicemment de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I\backslash\{0\}$.

→ On commence par la continuité : $f(x) = \frac{\sin x - x}{x\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3/6}{x\times x} = -\frac{x}{6}$. On en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et que $f$ est continue en 0.

→ On peut étudier la dérivabilité en 0 (pas vraiment utile) : avec le calcul précédent, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6},$$

ainsi $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{6}$. Cela ne garantit pas la continuité de $f'$ en 0.

→ On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$. On cherche la limite en 0. Le dénominateur est équivalent à $x^4$ en 0. On a

$$\begin{aligned} x^2\cos x - \sin^2 x &= x^2(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)) - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{2x^4}{6} + O(x^6) = -\frac{1}{6}x^4 + O(x^6) \end{aligned}$$

On a alors $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}$. On en déduit que $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{6} = f'(0)$ et la continuité de $f'$. Finalement $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $I$

*remarque :* on aurait pu se passer de l'étude de la dérivabilité en 0 en utilisant le théorème de prolongement du caractère $\mathscr{C}^1$ : si $f$ est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ et si $f'$ admet une limite finie $\ell$ en $a$ alors $f$ est dérivable sur $[a,b]$ avec $f'(a) = \ell$ et $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
**Attention** : ce n'est pas un théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ de $f$ puisqu'il n'y a pas à prolonger $f$ - elle admet déjà une valeur en $a$.

**Exercice 4.9**

Soit $u = \arccos(x)$ avec $x$ proche de 1 (par valeurs inférieures). On a $\lim_{x\to 1}\arccos(x) = 0$ et $\cos(u) = x = 1 - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$. Ainsi $2(1-x) = u^2 + \mathrm{o}(u^2)$, ce qui donne $2(1-x) \underset{x\to 1}{\sim} u^2$. Puisque $u > 0$, cela donne $u \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

**Exercice 4.10**

On n'a pas de théorème qui permet d'intégrer entre 2 bornes un DL. On note $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ ($F$ est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ qui s'annule en 0 - elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On a $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$ et $F(0) = 0$. On permet obtenir alors le DL de $F$ en 0 : $F(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$. On a alors

$$f(x) = F(x^2) - F(x) = (x^2 + \mathrm{O}(x^6)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)) = -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

**Exercice 4.11**

La fonction $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, sa dérivée est $f' : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ qui est strictement positive. La fonction $f$ réalise une bijection strictement croissante de $]-1,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$. La fonction admet une réciproque $f^{-1}$ sur $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et $f^{-1}(0) = 0$ puisque $f(0) = 0$) - cela garantit l'existence d'un DL de $f^{-1}$ en 0 à tout ordre. On écrit $f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + \mathrm{o}(y^3)$. On a $f^{-1}(f(x)) = 0$ pour tout $x \in ]-1,1[$ (par exemple). Or $f(x) = x + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$. Par composition (on a bien $f(x)$ de limite nulle lorsque $x$ tend vers 0), on peut substituer $y$ par le DL de $f(x)$ en 0 (on a alors $y^3 \underset{x\to 0}{\sim} 8x^3$ et ainsi le terme en $\mathrm{o}(y^3)$ est un terme en $\mathrm{o}(x^3)$. On développe, regroupe et on utilise l'unicité du DL pour obtenir les équations (termes en $x, x^2$ et $x^3$ dans le DL de $f^{-1}(f(x))$) :

$$2a = 1, 4b - \frac{a}{2} = 0 \text{ et } 8c - 2b + \frac{a}{3} = 0.$$

On trouve $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}y^2 - \frac{1}{192}y^3 + \mathrm{o}(y^3)$.

**Exercice 4.12**

- → L'équation équivaut à $\tan(x) - \frac{1}{x} = 0$. La fonction $x \mapsto \tan(x) - \frac{1}{x}$ est continue, strictement croissante sur $I_n$ avec des limites infinies aux bornes de $I_n$. Par bijection, l'équation admet une unique solution sur $I_n$.
- → On a $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, et, par encadrement, $\frac{x_n}{n\pi}$ tend vers 1. On a donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.
- → On écrit $x_n = n\pi + y_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. On reporte dans l'équation, ce qui donne

$$1 = (n\pi + y_n)\tan(n\pi + y_n) = (n\pi + y_n)\tan(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi y_n.$$

On en déduit $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$.

- → De même $x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n$ avec $z_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(y_n)$, soit $z_= \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n})$. On reporte de nouveau et on effectue un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} 1 &= (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n)\tan(\frac{1}{n\pi} + z_n) = (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n)(\frac{1}{n\pi} + z_n + \frac{1}{3\pi^3 n^3} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^3}) \\ &= 1 + n\pi z_n + \frac{1}{3\pi^2 n^2} + \frac{1}{n^2\pi^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

d'où

$$n\pi z_n = -\frac{4}{3n^2\pi^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^2\pi^2}.$$

On en déduit que $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^3\pi^3}$, et

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{4}{3n^3\pi^3} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^3}).$$

**Exercice 4.13**

1. Soit $Q(x) = x^2 - 2tx + 1$. Son discrimant est $\Delta = 4(t^2 - 1)$. Lorsque $t \in ]0,1[$, $Q$ reste strictement positif et $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}$. Si $t = 1$, $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Lorsque $t > 1$, $Q$ admet deux racines strictement positives $x_1 = t - \sqrt{t^2 - 1} < x_2 = t + \sqrt{t^2 - 1}$ (la somme est $2t > 0$, le produit 1). Alors $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}\backslash[x_1, x_2]$.
2. Dans toutes les situations, il existe $\alpha > 0$ tel que $f_t$ est définie et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$. La fonction admet alors un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. On note $u = x^2 - 2xt = x(x - 2t)$. Cette quantité tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0. De plus $u \underset{x\to 0}{\sim} x$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$f_t(x) = (1+u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(u^n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k (x - 2t)^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

   En développant, le terme $u^k$ donne des termes en $x^m$ pour $m \in [\![k; 2k]\!]$, avec des coefficients polynomiaux en $t$. En regroupant les termes de même degré, on obtient une expression comme demandée.
3. On cherche une expression permettant d'écrire l'unicité des coefficients d'un développement limité. On remarque que

$$f_t'(x) = \frac{t - x}{(1 - 2xt + x^2)^{3/2}} = \frac{t - x}{1 - 2xt + t^2} f_t(x),$$

   ce qui donne la relation $(1 - 2xt + x^2) f_t'(x) = (t - x) f_t(x)$ (au voisinage de 0). Soit $k \geqslant 1$. On écrit un développement limité à un ordre suffisant des deux cotés (afin d'à voir un ordre final d'au moins $k+1$), et on regarde les termes en $x^k$. Par unicité, on obtient

$$(k+1)P_{k+1}(t) - 2tkP_k(t) + (k-1)P_{k-1}(t) = tP_k(t) - P_{k-1}(t).$$

   On récrit cela en

$$(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t).$$

   Cela donne une relation de récurrence entre les polynômes $P_k$, ce qui permet de les calculer facilement (on montre notamment que $P_k$ est de degré $k$).