CHAPITRE 5 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Exercice 5.3

a) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$

d) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Exercice 5.4

a) -4

b) $n!$

c) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Exercice 5.5

Le changement de variable proposé ne convient pas sur $[0,\pi]$, il faut changer l'intervalle d'intégration. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+a\sin^2 x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est également paire et de période π. Ainsi $I = 2\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$. On peut exprimer $\sin^2 x$ assez facilement à l'aide de $\tan^2 x$ puisque $\sin^2 x = \cos^2 x \tan^2 x$ soit $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ si $x \in [0,\pi/2[$. La fonction $\varphi : t \mapsto \arctan t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,+\infty[$ sur $[0,\pi/2[$ et f est intégrable sur $[0,\pi/2]$ donc sur $[0,\pi/2[$ ce qui permet d'effectuer le changement de variable dans l'intégrale

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(a+1)t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{a+1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\frac{1}{a+1}}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $t \mapsto \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{t}{\alpha}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{1}{t^2+\alpha^2}$ si $\alpha \neq 0$ et que par conséquent, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\alpha^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\alpha}$ si $\alpha > 0$, on obtient

$$I = \frac{2}{a+1}\frac{\pi\sqrt{a+1}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a+1}}.$$

Exercice 5.6

Dans le cas où f est intégrable sur $[1,+\infty[$, la majoration $\left|\frac{f(t)}{t^\alpha}\right| \leqslant |f(t)|$ si $t \geqslant 1$ permet de conclure. Sinon on revient à la définition de la convergence. Appelons F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1 : $\forall x \in [1,+\infty[$, on a $F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$. La convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ signifie, par définition, que F admet une limite finie en $+\infty$. Pour tout $x \geqslant 1$, par intégration par parties sur $[1,x]$ (les fonctions sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce segment),

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{F(x)}{x^\alpha} - \frac{F(1)}{1} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$$

De plus F est continue sur $[1,+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$ donc F est bornée sur $[1,+\infty[$. Notons M un majorant de $|F|$ sur $[1,+\infty[$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x^\alpha} = 0$, et pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\left|\frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \frac{M}{t^{\alpha+1}}$. Donc $t \mapsto \frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$ est donc convergente et finalement, $\int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui signifie bien que $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge. On obtient, de plus, $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}$.

Exercice 5.8

La fonction f est continue sur $]0,1[$. On étudie l'intégrabilité sur $]0,1/2]$ puis sur $[1/2,1[$.
On a $f(x) \underset{x\to0}{\sim} |\ln x|^\beta = \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(1/\sqrt{x}\right)$ (car $\sqrt{x}|\ln x|^\beta$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, par croissances comparées si $\beta > 0$, directement sinon), donc f est intégrable sur $]0,1/2]$. De plus, $|f(x)| \underset{x\to1}{\sim} \frac{|x-1|^\beta}{|x-1|^\alpha} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha-\beta}}$, donc f est donc intégrable sur $[1/2,1[$ si et seulement si $\alpha-\beta<1$.
La fonction f est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $\alpha-\beta<1$.

Exercice 5.9

→ La fonction f est continue sur $]0,1[$. On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$, ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $]0,1/2]$. Par ailleurs, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \ln((1-x)(1+x)) = \ln(1-x)+\ln(1+x) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(1-x)$. La fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0,1/2]$, donc par symétrie, f est intégrable sur $[1/2,1[$. Donc f est intégrable sur $]0,1[$.

→ Soit $0<a<b<1$. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \left[-\frac{1}{x}\ln(1-x^2)\right]_a^b - \int_a^b \frac{2x}{x(1-x^2)}\,dx\\ &= -\frac{\ln(1-b)+\ln(1+b)}{b} + \frac{\ln(1-a^2)}{a} - \int_a^b \frac{2}{(1-x)(1+x)}\,dx.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ donc

$$\int_a^b \frac{2}{(1-x)(1+x)}\,dx = \ln(1+b)-\ln(1+a)-(\ln(1-b)-\ln(1-a)).$$

On regroupe les termes qui ont une limite infinie :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \left(-\frac{\ln(1-b)}{b}+\ln(1-b)\right)\\ &\quad+\left(-\frac{\ln(1+b)}{b}+\frac{\ln(1-a^2)}{a}+\ln(1+a)-\ln(1+b)-\ln(1-a)\right)\end{aligned}$$

Or $\ln(1-b)-\dfrac{\ln(1-b)}{b} = \dfrac{(b-1)\ln(1-b)}{b}$ tend vers 0 par croissances comparées lorsque b tend vers 1. Finalement, en faisant tendre a vers 0 et b vers 1, on obtient

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\ln 2+0+0-\ln 2-0 = -2\ln 2.$$

Exercice 5.10

1. → Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$. Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[$, de limite finie 1 en 0 (d'où l'intégrabilité sur $]0,1[$) et est négligeable devant $1/x^{3/2}$ en $+\infty$. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   → Soit $0<\varepsilon<a$. On a

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^a f(x)\,dx &= \left[-\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right]_\varepsilon^a + \int_\varepsilon^a \frac{2x}{x(1+x^2)}\,dx\\ &= \frac{\ln(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon} - \frac{\ln(1+a^2)}{a} + 2(\arctan(a)-\arctan\varepsilon)\end{aligned}$$

   Par équivalent (en 0) et croissances comparées en $+\infty$, on peut passer aux limites et obtenir $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx = \pi$.

2. L'application f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. On obtient, via ce changement de variable,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx = -\int_{+\infty}^0 \ln(1+\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t = \pi.$$

Exercice 5.11

1. Soit $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur tout intervalle $[x,+\infty[$ et $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Donc f est intégrable sur tout intervalle $[x,+\infty[$ si $x>0$. Pour $x>0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, l'application $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (c'est la primitive de f qui s'annule en 1). Donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $-f$.
2. On va intégrer par parties afin d'augmenter le degré du dénominateur dans l'intégrale. Soit $A>x>0$,

$$\int_x^A \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t^2}\right]_x^A - 2\int_x^A \frac{\cos t}{t^3}\mathrm{d}t,$$

   ce qui donne, lorsque A tend vers $+\infty$, $F(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\mathrm{d}t$. On a bien le premier terme demandé. Il reste à montrer que la nouvelle intégrale est un $O(1/x^3)$. La première idée consiste à écrire

$$\left|2\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\int_x^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^3}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}$$

mais la majoration est trop forte. On doit réintégrer par parties comme précédemment,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3} \mathrm{d}t = -\frac{\sin x}{x^3} + 3\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4} \mathrm{d}t.$$

Le premier terme est un $O(1/x^3)$, le second aussi en majorant la valeur absolue de l'intégrale par $\int_x^{+\infty} \frac{3}{t^4} \mathrm{d}t = \frac{1}{x^3}$.

3. On propose deux méthodes...
   → On cherche d'abord à comprendre comment va apparaître le $\ln x$. On sépare l'intégrale en 2 afin de ne pas conserver une difficulté en $+\infty$ en écrivant $F(x) = \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ et on étudie cette seconde intégrale. On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ et on s'attend donc à ce que $\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ se comporte comme $\int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\ln x$. On évalue la différence :

$$\int_x^1 \left(\frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}\right) = \int_x^1 \left(\frac{\sin t - t}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

   On note $g : t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$ pour tout $t \in]0,1]$ prolongée par continuité en 0 par 0. On note de nouveau g la fonction prolongée sur $[0,1]$, elle est continue sur $[0,1]$ ce qui implique que $\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t$ tend vers la constante $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$. Ainsi $\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t - (-\ln x)$ tend vers une constante, et $\ln x$ admet une limite $-\infty$ lorsque x tend vers 0 donc

$$\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t \underset{t\to 0}{\sim} -\ln x$$

   Puisque $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est constant et donc négligeable devant $-\ln x$ en 0, on a le résultat souhaité.
   → On utilise tout simplement les résultats sur l'intégration des relations de comparaison. Au voisinage de 0, on a $\frac{\sin t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$. On ne peut pas l'utiliser directement sur $]x,+\infty]$. On découpe en 1. L'équivalent précédent, la continuité et la positivité des fonctions sur $]0,1]$ et la non-intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t}$ permet d'appliquer le théorème, ce qui donne

$$\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x.$$

   Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ est une constante, on a

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

4. La fonction F est continue sur $]0,+\infty[$. On a $F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$ et ln est intégrable sur $]0,1]$ donc F également. De plus, $|F(x)| = O(1/x^2)$ en $+\infty$ donc F est intégrable sur $[1,+\infty[$. Finalement F est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le résultat le plus simple concernant F est la valeur de sa dérivée. On imagine donc qu'on va intégrer par partie. Soit $0 < \varepsilon < A$,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A F(x)\,dx &= [xF(x)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A xF'(x)\,dx \\ &= AF(A) - \varepsilon F(\varepsilon) + \int_\varepsilon^A x\frac{\sin x}{x^2}\,dx\end{aligned}$$

Or $\varepsilon F(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\varepsilon\ln\varepsilon$ de limite nulle lorsque A tend vers $+\infty$, $AF(A) = \frac{\cos A}{A} + O(1/A^2)$ de limite nulle, ce qui donne en limite

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Exercice 5.12

On cherche simplement à majorer $|g|$. Pour tout $x \in I$, $|g(x)| \leqslant \max(|f(x)|,|h(x)|)$ et plus simplement, pour se débarrasser des valeurs absolues (elles sont positives), $|g(x)| \leqslant |f(x)| + |h(x)|$. La fonction $|f| + |h|$ est intégrable sur I, par comparaison g aussi.

Exercice 5.13

1. La fonction f est décroissante donc admet une limite finie ℓ ou $-\infty$ en $+\infty$. Dans le cas où la limite est infinie, on peut majorer f par -1, d'où la non-intégrabilité. Dans le cas d'une limite finie $\ell \neq 0$, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell$, non intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En conclusion ℓ est nécessairement nulle (ce n'est pas suffisant). On en déduit également que f est à valeurs positives.
2. On écrit $\int_{x/2}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{x/2} f(t)\mathrm{d}t$. Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, chacune des deux intégrales a la même limite finie lorsque

x tend vers $+\infty$. Par différence, $\lim_{x\to+\infty}\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

3. Par décroissante (et positivité de f),
$$0 \leqslant \int_{x/2}^{x} f(x)\mathrm{d}t \leqslant \int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$
Or $\int_{x/2}^{x} f(x)\mathrm{d}t = \frac{x}{2}f(x)$. par encadrement, on obtient $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

Exercice 5.14

1. On a l'inégalité classique $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |f''|^2\right)$. Par hypothèse, chacune des fonctions est intégrable, donc ff'' aussi.
   (a) On intègre par parties pour faire apparaître les termes demandés. Soit $X > 0$,
   $$\int_0^X f'(t)f'(t)\mathrm{d}t = \left[f(t)f'(t)\right]_0^X - \int_0^X ff''(t)\mathrm{d}t.$$
   Puisque ff'' est intégrable, l'intégrale $\int_0^X ff''(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. Si f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, la fonction étant positive, on a $\lim_{X\to+\infty} f'^2 = +\infty$. L'égalité précédente montre que ff' tend vers $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$.
   (b) On écrit simplement que $2\int_0^X ff' = f^2(X) - f^2(0)$, ce qui donne le résultat.
   (c) Si f^2 tend vers $+\infty$, elle ne peut pas être intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On obtient une contradiction. L'hypothèse de non-intégrabilité de f'^2 est donc impossible.
2. On reprend la première intégration par parties. Elle donne alors
$$\int_0^X f'^2(t)\mathrm{d}t = f(X)f'(X) - \int_0^X ff''(t)\mathrm{d}t.$$
On en déduit notamment l'existence d'une limite finie pour $ff'(X)$ en $+\infty$ (les deux intégrales convergent). Si cette limite est non nulle, la question 3 redonne une limite infinie pour f^2 et de nouveau la non-intégrabilité. Ainsi ff' tend vers 0 en $+\infty$. On obtient ainsi
$$\int_0^{+\infty} f'^2(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} ff''(t)\mathrm{d}t.$$
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\int_0^X ff''(t)\mathrm{d}t$, on passe à la limite $X \to +\infty$, ce qui donne une inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left|\int_0^{+\infty} ff''(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t.\int_0^{+\infty} f''^2(t)\mathrm{d}t.$$
On peut alors terminer avec ce résultat.

Exercice 5.15

1. Si $x > 0$, alors $ax < bx$. Puisque f est décroissante, on en déduit que g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est bien évidemment continue sur cet intervalle. Pour justifier l'intégabilité, il suffit de prouver la convergence de l'intégrale sur $]0,+\infty[$. Soit $0 < \varepsilon < A$. On a
$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx &= \int_\varepsilon^A \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^A \frac{f(bx)}{x}\,dx\\ &= \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{b\varepsilon}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,dx\\ &= \int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx.\end{aligned}$$
On s'intéresse aux deux nouvelles intégrales. Par encadrement, on a (f est décroissante),
$$\int_{aA}^{bA} \frac{f(bA)}{x}\,dx \leqslant \int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,dx \leqslant \int_{aA}^{bA} \frac{f(aA)}{x}\,dx$$
c'est-à-dire
$$f(bA)\ln\frac{bA}{aA} \leqslant \int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,dx \leqslant f(aA)\ln\frac{bA}{aA}.$$
Par encadrement, on en déduit l'existence de la limite $\lim_{A\to+\infty}\int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,dx = \ell\ln\frac{b}{a}$. On opére de même avec l'autre intégrale, ce qui donne une limite $f(0)\ln\frac{b}{a}$. Finalement
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (\ell - f(0))\ln\frac{b}{a}.$$

2. La fonction $f : x \mapsto -\arctan x$ est décroissante mais négative, ce qui n'est finalement pas contrariant car on n'a jamais utilisé le signe de f, seulement l'existence d'une limite finie en $+\infty$ (on peut sinon considérer $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arctan x$). On peut donc écrire l'intégrale demandée sous la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(3x)}{x}\,dx$. La valeur est $\frac{\pi}{2}\ln 3$. On peut refaire le même type de calculs sur ce cas particulier, ou les refaire avec la fonction croissante $x \mapsto \arctan x$.
3. On peut refaire le même type de calculs pour prouver la convergence de l'intégrale (pas l'intégrabilité cette fois puisque le signe n'est plus fixe). L'encadrement utilisé à la fin de fonctionne plus. On utilise la continuité en 0 ou la limite en $+\infty$. On traite le cas de $+\infty$. Soit $\varepsilon' > 0$, il existe $B > 0$ tel que, pour $u > B$, $|f(u) - \ell| < \varepsilon'$. Alors, pour $aA > B$ (i.e. pour $A > B/a$), on a (car si $x \in [aA, bA]$, alors $x > B$)
$$\left|\int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{aA}^{bA} \frac{\ell}{x}\,dx\right| \leqslant \int_{aA}^{bA} \frac{|f(x) - \ell|}{x}\,dx \leqslant \varepsilon'.\ln\frac{b}{a}.$$
On en déduit que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{aA}^{bA} \frac{\ell}{x}\,dx\right) = 0$. Puisque $\displaystyle\int_{aA}^{bA} \frac{\ell}{x}\,dx = \ell.\ln\frac{b}{a}$, on retrouve la limite. On conclut avec le même résultat.
4. C'est une version déguisée de l'exercice précédent : on pose $F(x) = -\displaystyle\int_0^x f(u)\,du$. On se retrouve dans la situation de la première question avec $g(x) = \dfrac{F(x) - F(2x)}{x}$. Cela donne l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \left(\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right)\ln 2$. Évidemment, la question était seule. On doit donc refaire le même style de calculs (tant qu'à faire directement sans le signe $-$ dans F).

Exercice 5.16

On note $f(t) = \ln\left(1 + \dfrac{\sin t}{t^a}\right)$. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. On va utiliser les résultats suivants (voir ou adapter le cours) :
- → $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^a}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$,
- → $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$.

1. Étude sur $]0, 1]$: on a $\dfrac{\sin t}{t^a} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t^a} = t^{1-a}$.
   - → si $a = 1$, la fonction f se prolonge par continuité en 0 (par la valeur $\ln 2$) et f est intégrable sur $]0, 1]$,
   - → si $a < 1$, on a $f(t)$ tend vers 0 en 0 et f est intégrable sur $]0, 1]$,
   - → si $a > 1$, on a $\ln(1 + \frac{\sin t}{t^a}) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t^{1-a}) = (1-a)\ln t = \mathrm{o}(\frac{1}{\sqrt{t}})$ et f est intégrable sur $]0, 1]$.
2. Étude sur $[1, +\infty[$:
   - → On a $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{|\sin t|}{t^a}$ et les deux fonctions sont intégrables sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$.
   - → Si on s'intéresse à la convergence de l'intégrale. On effectue un développement asymptotique :
   $$f(t) = \frac{\sin t}{t^a} - \frac{\sin^2 t}{2t^{2a}} + \mathrm{o}\left(\frac{\sin^2 t}{t^{2a}}\right).$$
   On note $g(t) = f(t) - \dfrac{\sin t}{t^a}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}\mathrm{d}t$ converge. Puisque $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\sin^2 t}{2t^{2a}} \leqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si g est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc si et seulement si $2a > 1$ ou $a > 1/2$.

Exercice 5.17

On commence par écrire, pour $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x) - f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bigl(\cos(xt) - \cos(yt)\bigr)\,\mathrm{d}t.$$
Par l'inégalité des accroissements finis, on peut majorer $\bigl|\cos(xt) - \cos(yt)\bigr| \leqslant |xt - yt|$, mais t peut être grand et on ne sait pas si $t \mapsto tf(t)$ est intégrable. On va découper l'intégrale et « éliminer » les extrémités. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$, ainsi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$ (Par définition de l'intégrabilité, il existe A tel que $\displaystyle\int_{[-A,A]} |f|$ soit égal à l'intégrale sur $\mathbb{R}$ à ε près. On a alors, en découpant en plusieurs morceaux, (4 aux extrémités et le morceaux central), et en majorant $|\cos|$ par 1,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant \int_A^A |tf(t)||x - y|\mathrm{d}t + 4\varepsilon.$$
On note $K = \displaystyle\int_A^A |tf(t)|\mathrm{d}t$. Dès que $|x - y| < \dfrac{\varepsilon}{K+1}$, on a $|f(x) - f(y)| < 5\varepsilon$. On a prouvé la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.18

1. On suppose que f est décroissante sur $]0,1]$. On encadre les termes par comparaison à une intégrale. Pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, on a
$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$
ce qui donne, en sommant
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
De même, en sommant, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t$, on obtient
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t.$$
On obtient finalement l'encadrement
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{n} f(1) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t.$$
Puisque f est intégrable, lorsque n tend vers $+\infty$, on a la limite par encadrement.

2. On note u_n le logarithme de ce terme. Il vaut, en écrivant $\frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$,
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n}.$$
On se retrouve dans la situation précédente avec la fonction logarithme. Elle est bien décroissante et intégrable sur $]0,1]$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_0^1 = -1$. La limite cherchée vaut $\frac{1}{e}$.

3. Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, on obtient comme limite $\exp\left(\int_0^1 \ln\sin\frac{\pi t}{2}\mathrm{d}t\right)$ qui vaut également, après changement de variable linéaire $\exp\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,\mathrm{d}t\right)$ (on doit montrer que la fonction est bien décroissante et intégrable). Il reste la seconde méthode de calcul... c'est une autre histoire puisqu'il faut effectivement calculer le produit des sinus. Le moyen le plus simple est de considérer le polynôme
$$P = \frac{X^n-1}{X-1} = 1 + X + \ldots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right),$$
de l'évaluer en 1 et de faire apparaître les sinus en factorisant $1-e^{2ik\pi/n}$ par $e^{ik\pi/n}$. On trouve finalement $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$. Cela donne $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,\mathrm{d}t = -\ln 2$ et $\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 5.19

1. Tout est basé sur un développement asymptotique de la fonction (f est continue sur $[1,+\infty[$) :
$$f(t) = \sqrt{t-\cos t} - \sqrt{t} = \sqrt{t}\left((1-\frac{\cos t}{t})^{1/2} - 1\right) = -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$
On note $f_1(t) = -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}$ et $f_2 = f - f_1$. La fonction f_2 est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc f l'est si et seulement si f_1 l'est. Ce n'est pas le cas (voir cours ou autres exercices). En revanche l'intégrale de f_1 sur $[1,+\infty[$ est convergente (par intégration par parties), donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ l'est également.

2. On a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} f_1(t)$ et $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}$. On va utiliser le théorème de sommation des équivalents : les fonctions $|f|$ et $|f_1|$ sont non intégrables et équivalentes en $+\infty$ donc
$$\int_1^x |f(t)|\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$
Pour trouver un équivalent, on se contente d'obtenir celui de $\int_{\pi/2}^{x} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

→ méthode 1 : on note $G(x) = \int_{\pi/2}^{x} |\cos t|\mathrm{d}t$. si $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, on a $G(-\frac{\pi}{2}+n\pi) \leqslant G(x) < G(\frac{\pi}{2}+n\pi)$. Par encadrement, il suffit d'avoir un équivalent de $G(x)$ lorsque $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Un calcul simple donne $\int_{\pi/2}^{\pi/2+n\pi} |\cos t|\mathrm{d}t = 2n \sim \frac{2}{\pi}x$ si $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. On en déduit par encadrement que $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}x$. On intègre par parties :

$$\int_{\pi/2}^{x} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{G(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{x} \frac{G(t)}{t^{3/2}}\mathrm{d}t.$$

Le premier terme est équivalent à $\frac{\sqrt{x}}{\pi}$. Pour la seconde intégrale, on a $\frac{G(t)}{4t^{3/2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}$. Le théorème de sommation des équivalents donne un équivalent en $\frac{\sqrt{x}}{\pi}$. Finalement, $\int_{\pi/2}^{x} |f(t)|\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\sqrt{x}$.

→ méthode 2 : on commence par un équivalent de $\int_{\pi/2}^{\pi/2+n\pi} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ en sommant sur les différentes arches qui apparaissent. On découpe

$$I_n = \int_{\pi/2}^{\pi/2+n\pi} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\pi/2+k\pi}^{\pi/2+(k+1)\pi} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t+k\pi}}\mathrm{d}t.$$

Par encadrement du dénominateur, on obtient

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t+k\pi}}\mathrm{d}t \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{k\pi}}.$$

Enfin par sommation des équivalents sur les séries, et puisque

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n},$$

on trouve finalement

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\sqrt{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}.$$

Pour x quelconque, on l'encadre en $\frac{\pi}{2}+n\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2}+(n+1)\pi$, on utilise l'équivalent précédent et on trouve $\int_1^x |f(t)|\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\sqrt{x}$.

Exercice 5.20

0 et $2\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$.

Exercice 5.21

1. D'abord f est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque $0 \leqslant e^{-x^2/2} \leqslant e^{-x/2}$ pour tout $x \geqslant 1$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On intègre par parties :

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty}\frac{-te^{-\frac{t^2}{2}}}{-t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}e^{-t^2/2}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2/2}}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2/2}}{t^2}\mathrm{d}t$$

le calcul étant justifié par l'existence de la limite du terme entre crochets. Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{x} - e^{x^2/2}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2/2}}{t^2}\mathrm{d}t < \frac{1}{x}$$

2. La fonction f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t - e^{\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}} = xf(x) - 1$$

Posons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$, qui est elle-même dérivable, et remarquons que $g'(x) > xg(x) - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Fixons en effet $x \in \mathbb{R}$ et calculons

$$\begin{aligned} g'(x) - xg(x) + 1 &= \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{2} - \frac{4x}{2\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)} + 1 \\ &= \frac{1}{2}\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)^2}{\sqrt{x^2+4}} > 0 \end{aligned}$$

car $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+4}$. Par suite, en posant $h = g - f$, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) > xh(x)$$

On écrit cela sous forme d'une équation différentielle. En notant $u(x) = h'(x) - xh(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $h'(x) - xh(x) = u(x)$. On résout cette équation différentielle par la méthode de variation de la constante, ce qui donne

$$h(x) = Ce^{x^2/2} + e^{x^2/2}\int_0^x u(t)e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = e^{x^2/2}\left(C + \int_0^x u(t)e^{-t^2/2}\mathrm{d}t\right).$$

L'inégalité de la première question donne $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et on vérifie facilement que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} h(x)e^{-x^2/2} = 0$ et finalement $C + \int_0^{+\infty} u(t)e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = 0$ (avec la convergence de l'intégrale). En reportant, on obtient

$$\forall x \geqslant 0, h(x) = -e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} u(t)e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$$

Puisque u est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, $h < 0$ sur cet intervalle.

3. Nous reprenons l'intégration par parties de la question a) en la repoussant plus loin. Considérons plus généralement un entier naturel n : la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2/2}}{t^{2n}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ car continue par morceaux et dominée par $t \mapsto e^{-t^2/2}$ au voisinage de $+\infty$. Ensuite

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^{2n}}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{e^{-t^2/2}}{t^{2n+1}}\right]_x^{+\infty} - (2n+1)\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^{2n+2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-x^2/2}}{x^{2n+1}} - (2n+1)\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^{2n+2}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

De plus, comme $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2/2}}{t^{2n+2}}$ est négligeable devant $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2/2}}{t^{2n}}$ au voisinage de $+\infty$, laquelle est positive et intégrable en $+\infty$, on trouve

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^{2n+2}}\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^{2n}}\mathrm{d}t\right) \quad \text{quand } x \to +\infty$$

et l'intégration par parties précédente assure donc que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^{2n}}\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-x^2/2}}{x^{2n+1}} \quad \text{quand } x \to +\infty$$

Pour conclure, il suffit de dérouler la formule précédente pour obtenir

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} - 15e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^6}\mathrm{d}t$$

et par ailleurs

$$e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^6}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right) \quad \text{quand } x \to +\infty$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} - \frac{15}{x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right) \quad \text{quand } x \to +\infty$$

Exercice 5.22

1. comparaison série intégrale classique
2. La fonction I est décroissante et admet une limite finie en 0 si et seulement si f est intégrable sur $]0,1]$ (sinon sa limite est infinie). Dans ce cas, $\lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right)$.
   → on a $I(1/n) \leqslant r_n$. Si la suite (r_n) converge alors elle est bornée. La suite $(I(1/n))$ est également bornée. D'après les remarques précédentes, elle admet une limite finie et f est intégrable sur $]0,1]$.
   → si f est intégrable sur $]0,1]$, alors, puisqu'elle est décroissante, $\lim_{x\to 0} xf(x) = 0$ (voir un autre exercice). On en déduit, par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} r_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$
3. On obtient $r_n = -\ln \dfrac{(n!)^{1/n}}{n}$ et $\int_0^1 -\ln x\mathrm{d}x = 1$. Cela donne $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n!)^{1/n}}{n} = e^{-1}$.

Exercice 5.23

Si on note, pour $x \geqslant 1$, $F(x) = \int_1^x \dfrac{f(t) - f(t+1)}{f(t)}\mathrm{d}t$, alors F est positive, strictement croissante et admet soit une limite finie en $+\infty$ soit une limite $+\infty$. On suppose que la limite est finie. Soient a et b deux entiers tels que $b > a \geqslant 0$. On a

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)=\int_a^b \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x &= \sum_{k=a}^{b-1}\int_0^1 \frac{f(x+k)-f(x+k+1)}{f(x+k)}\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_0^1 \sum_{k=a}^{b-1}\frac{f(x+k)-f(x+k+1)}{f(x+a)}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{f(x+a)-f(x+b)}{f(x+a)}\mathrm{d}x = \int_0^1 1-\frac{f(x+b)}{f(x+a)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, pour tout $x\in[0,1]$, $\dfrac{f(x+b)}{f(x+a)}\leqslant\dfrac{f(b)}{f(a+1)}$. Cela donne $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 1-\frac{f(b)}{f(a+1)}$.

Puisque F admet une limite finie en $+\infty$, il existe un entier $a>1$ tel que $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}$. On fixe cet entier a. Pour tout $b>a$, on a

$$\int_a^b \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{+\infty}\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}.$$

On a également $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 1-\frac{f(b)}{f(a+1)}$ de limite 1 lorsque b tend vers $+\infty$. Cela donne une contradiction et ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

Exercice 5.24

1. Comme g est la primitive de $-f$ qui tend vers 0 en $+\infty$, on réalise une intégration par parties : pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = xg(x)+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge, alors

$$0\leqslant xg(x)=x\int_x^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t$ converge avec l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t$.

Réciproquement si $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors comme g est décroissante et positive, on a $0\leqslant\frac{x}{2}g(x)\leqslant\displaystyle\int_{x/2}^x g(t)\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et on conclut comme ci-dessus que $\displaystyle\int_0^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t$ converge. Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty}g=\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ dans $\overline{\mathbb{R}}$

2. Comme f est continue et positive, $x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, valant 0 en 0 et tendant vers 1 en l'infini. Par théorème des valeurs intermédiaires, on dispose donc d'un $m\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\int_0^m f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Par l'absurde, si on disposait de $m<m'$ vérifiant tous deux cette propriété, $\displaystyle\int_m^{m'}f=0$ et (f étant continue et positive) f serait nécessairement nulle sur $[m,m']$. Comme elle est décroissante et positive, elle serait nulle sur $[m,+\infty[$ et on aurait alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+}f=1/2$. On a donc bien l'unicité de m.

3. Comme $g'=-f$ est croissante, g est convexe. Elle est donc au-dessus de sa tangente en m : pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $g(x)\geqslant g(m)+g'(m)(x-m)=\frac{1}{2}-f(m)(x-m)$. On intègre cette inégalité sur $[0,2m]$ et on obtient :

$$\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}g\geqslant\int_0^{2m}g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{2m}\left(\frac{1}{2}-f(m)(x-m)\right)\mathrm{d}x=m$$