

CHAPITRE 6 - ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 6.1

- Soit $0 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ une décomposition dans la somme $\sum_{i=1}^n E_i$. C'est aussi une décomposition de 0 dans la somme directe $\bigoplus_{i=1}^n F_i$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $e_i = 0$.
- On choisit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. par hypothèse $E_j \subset F_j$. On prouve l'inclusion contraire. Soit $x \in F_j$. Puisque $x \in E$, il se décompose en $x = x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in E_i$. Or cette décomposition est également une décomposition de x dans la somme directe $\bigoplus_{i=1}^n F_i$. Dans cette somme directe x se décompose également en $x = 0 + \dots + 0 + x + 0 + \dots + 0$ (où x est en position j , dans F_j). Par unicité de la décomposition, on a $x_i = 0$ si $i \neq j$ et $x_j = x$. Par construction $x_j \in E_j$.

Exercice 6.2

Soit $x \in G$. On a $x \in F + G$ donc $x \in F + H$. On peut le décomposer en $x = f + h$ avec $f \in F$ et $h \in H$, donc $h \in G$. Ainsi $f = x - h$ est aussi dans G . Cela donne $f \in F \cap G \subset F \cap H$. On obtient alors $f \in H$. Finalement $x = f + h \in H$.

Exercice 6.3

- Puisque $C \subset B$, on a $A + C \subset B + C$.
- On prouve l'inclusion inverse. Soit $x \in A + B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Puisque $b \in B = (A \cap B) \oplus C$, il se décompose en $b = \alpha + c$ où $\alpha \in A \cap B$, d'où $\alpha \in A$. Ainsi $x = a + \alpha + c \in A + C$. On a l'inclusion inverse. Finalement $A + C = A + B$.
- On prouve que la somme est directe. On sait que $(A \cap B) \cap C = \{0\} = A \cap B \cap C$. Or $C \subset B$, donc $B \cap C = C$. Ainsi $A \cap B \cap C = A \cap C = \{0\}$.

Finalement $A \oplus C = A + B$.

Exercice 6.4

On montre facilement que F est l'ensemble des multiples du polynôme $X(X-1)(X-2)$ de degré inférieur ou égal à 3, donc l'ensemble $\{\lambda X(X-1)(X-2), \lambda \in \mathbb{R}\}$. De même $G = \{\lambda(X-1)(X-2)(X-3), \lambda \in \mathbb{R}\}$. H est l'ensemble des polynômes pairs. La relation $P(X) = P(-X)$ donne P sous la forme $P = a + bX^2$. Finalement F et G sont de dimension 1, et H de dimension 2.

- La somme $F + G$ est directe : si un polynôme est dans l'intersection, il admet 4 racines en étant de degré au plus 3. Ce polynôme est donc nul. On note $K = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$. Il est immédiat que F et G sont des sous-espaces de K , ce qui donne $F \oplus G \subset K$. Pour l'inclusion réciproque, on peut le faire par dimension : $K = \{(aX + b)(X-1)(X-2), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((X-1)(X-2), X(X-1)(X-2))$, ce qui donne $\dim K = 2$. Puisque $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 2$, on obtient l'égalité. On peut aussi considérer un polynôme de K , $P = (aX + b)(X-1)(X-2)$ est le décomposer en

$$P = \lambda X(X-1)(X-2) + \mu(X-1)(X-2)(X-3) = (X-1)(X-2)((\lambda + \mu)X - 3\mu),$$

qui est réalisé pour $\mu = -b/3$ et $\lambda = a + b/3$.

- On montre que la somme est directe : un élément de l'intersection s'annule en 1, en 2, et, par parité, en -1 et -2 . Il admet 4 racines et est nul. Par des considérations de dimension, on obtient bien $\dim F \oplus G \oplus H = 4 = \dim E$, ce qui donne l'égalité des espaces.

Exercice 6.5

Soit $u \in F \cap G$. D'une part, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 1, 2, 3)$, c'est-à-dire

$$u = (\lambda, -\lambda + \mu, \lambda + 2\mu, \lambda + 3\mu),$$

et d'autre part ce vecteur est dans F , soit

$$(\lambda) + (-\lambda + \mu) + (\lambda + 2\mu) + (\lambda + 3\mu) = 0 = 2\lambda + 6\mu.$$

Ainsi, $u = \lambda(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 1, 2, 3) \in G$ est également dans F si, et seulement si, $\lambda = -3\mu$. On en déduit que

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{-3\mu(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 1, 2, 3), \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mu(-3, 4, -1, 0), \mu \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-3, 4, -1, 0)). \end{aligned}$$

Pour déterminer $F + G$, on sait que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4$ (F est un hyperplan, donc est de dimension 3, et la famille donnée pour définir G est bien entendu génératrice, mais également libre). Ainsi $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 6.6

- Le polynôme nul est dedans, et la stabilité par combinaisons linéaires se fait facilement
- P est dans H si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-1)^2 Q$ et $\deg P \leq n$. Cela est équivalent à $P = (X-1)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On a comme bases possibles $((X-1)^2 X^k)_{k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket}$ ou $((X-1)^k)_{k \in \llbracket 2; n \rrbracket}$ (en fait $(X-1)^2$ fois n'importe quelle base de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$). Ces bases comportent toutes $n-1$ éléments donc $\dim H = n-1$.

Exercice 6.7

- non vide et stable par combinaison linéaire.
- deux méthodes :
→ On montre facilement que la somme est directe. Par analyse synthèse : si $f \in E$, alors

$$f = \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \cdot 1_{\mathbb{R}} + \left(f - \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \cdot 1_{\mathbb{R}} \right)$$

est l'unique décomposition de f dans $F \oplus G$.

- l'application $f \mapsto \int_0^1 f(t)$ est une forme linéaire non nulle sur E . On a $F = \ker f$ et $f(1_{\mathbb{R}}) = 1 \neq 0$ donc $1_{\mathbb{R}} \notin F$ et $\text{Vect}(1_{\mathbb{R}})$ est un supplémentaire de F .

Exercice 6.8

- On considère une relation $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. On suppose qu'elle n'est pas triviale, et note k l'indice maximal tel que $\lambda_i \neq 0$ (on a $\lambda_k \neq 0$ et $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$). On va montrer une contradiction. On utilise le comportement en $+\infty$. La dernière fonction est celle qui domine toutes les autres. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + \lambda_k e^{\alpha_k x} = 0,$$

et, en divisant par $e^{\alpha_k x}$ on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_k)x} + \lambda_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_k)x} + \dots + \lambda_{k-1} e^{(\alpha_{k-1} - \alpha_k)x} + \lambda_k = 0.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, il reste $\lambda_k = 0$ (puisque $\alpha_i - \alpha_k < 0$ si $i < k$). Cela contredit la maximalité de k . Il n'y a donc pas de scalaire non nul dans la somme. La famille est libre.

- On peut le démontrer par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « pour toute famille de réels $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, les fonctions f_{α_i} sont linéairement indépendantes ». La proposition est vérifiée pour au rang 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$. On considère une famille de fonctions f_{α_i} à $n+1$ éléments (ordonnés comme au dessus). On considère une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. On dérive cette relation deux fois, ce qui donne la nouvelle relation $-\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \alpha_i^2 f_{\alpha_i} = 0$. On ajoute à cette relation la première relation multipliée par α_{n+1}^2 . Il reste

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i (\alpha_{n+1}^n - \alpha_i^2)) f_i = 0.$$

L'hypothèse au rang n donne, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_i (\alpha_{n+1}^n - \alpha_i^2) = 0$, et, puisque $\alpha_{n+1}^n - \alpha_i^2 \neq 0$, $\lambda_i = 0$. On repart de la première relation dans laquelle reste $\lambda_{n+1} f_{\alpha_{n+1}} = 0$. Le dernier scalaire est également nul. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée. Par récurrence le résultat est démontré.

- On part d'une relation $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. On regarde au voisinage d'un point a_i . En ce point la somme est nulle donc dérivable. Si le coefficient λ_i est non nul, la somme n'est pas dérivable en a_i d'où une contradiction (les autres termes sont localement \mathcal{C}^∞ au voisinage de a_i - on retire les valeurs absolues).

Exercice 6.9

Dans le cours

Exercice 6.10

On calcule $f(X^k)$ (l'application est bien entendu linéaire). On a $f(1) = f(X) = 0$, $f(X^2) = 2$ et $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + \dots$ si $k \geq 2$. On voit déjà que $\mathbb{R}_1[X] \subset \ker f$ et $\dim \ker f \geq 2$. On a également $\text{Im } f$ qui contient $f(X^2), \dots, f(X^n)$, ce qui donne une famille de polynômes de degré allant de 0 à $n-2$. On en déduit que $\mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \text{Im } f$ et $\text{rg } f \geq n-1$. Par le théorème du rang, les dimensions ne peuvent pas être supérieures. En conclusion $\text{Im } f = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\ker f = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 6.11

- On s'intéresse à l'application linéaire $g = f|_H \in \mathcal{L}(H, F)$. On a $\text{Im } g = f(H)$ et $\ker g = \{x \in H, f(x) = 0\} = \ker f \cap H$. On applique la formule du rang à g , ce qui donne

$$\dim H = \dim f(H) + \dim(\ker f \cap H).$$

On a obtenu la relation.

- On applique la relation précédente avec $H = f^{-1}(K)$. Puisque $0 \in K$, on a $\ker f = f^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(K)$, si bien que $\ker f \cap f^{-1}(K) = \ker f$. On a $y \in f(H)$ si et seulement s'il existe $x \in f^{-1}(K)$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(K)$ est équivalent à $f(x) = y \in K$. Ainsi $y \in f(H)$ si et seulement si $y \in \text{Im } f$ et $y \in K$, soit $y \in K \cap \text{Im } f$. On obtient la relation en remplaçant.

Exercice 6.12

Le théorème du rang nous donne que $\dim F + \dim G = \dim E$ lorsque F existe. C'est donc une condition nécessaire. Supposons que $\dim F + \dim G = \dim E$. On va construire f sur une base de E . Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F , complétée par (e_{p+1}, \dots, e_n) pour donner une base de E . Puisque $\dim G = n - p$, on peut considérer f_{p+1}, \dots, f_n des vecteurs formant une base de G . Considérons l'application linéaire f qui envoie e_1, \dots, e_p sur 0 et $f(e_i) = f_i$ lorsque $i = p+1, \dots, n$. L'image de f est engendrée par l'image d'une base de E , et l'image de la base e_1, \dots, e_n est f_{p+1}, \dots, f_n . Ainsi $\text{Im } f = G$. Si on note $H = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, la restriction de f de H vers G est un automorphisme. Ainsi $\text{rg } f \geq n - p$. Puisque $\dim \ker f \geq p$ avec $F \subset \ker f$, on a finalement $\ker f$ de dimension p , égal à F .

Exercice 6.13

1. Puisque $\text{rg } u = 1$, il existe $v \neq 0$, tel que $\text{Im } u = \text{Vect}(v)$. Pour tout $x \in E$, $u(x)$ est colinéaire à v et il existe un unique scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x \cdot v$. On note $\varphi : x \mapsto \lambda_x$. Il reste à montrer que l'application φ de E dans \mathbb{K} est linéaire. Soit $x, y, \lambda \in E \times E \times \mathbb{K}$. On a

$$u(x + \lambda y) = \varphi(x + \lambda y)v = u(x) + \lambda u(y) = (\varphi(x) + \lambda \varphi(y))v.$$

Puisque $v \neq 0$, on a $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$.

2. Pour $x \in E$, $u^2(x) = u(u(x)) = u(\varphi(x)v) = \varphi(x)u(v) = \varphi(x)\varphi(v)v = \varphi(x)u(x)$. On montre par récurrence que $u^n(x) = (\varphi(v))^{n-1}u(x)$ si $n \geq 1$, soit $u^n = (\varphi(v))^{n-1}u$.

Exercice 6.14

Considérons φ la restriction de f à $\ker(g \circ f)$:

$$\varphi : \begin{cases} \ker(g \circ f) & \rightarrow F \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$$

C'est possible puisque $\ker(g \circ f)$ est un sous-espace vectoriel de E . On étudie image et noyau :

$$x \in \ker \varphi \Leftrightarrow x \in \ker(g \circ f) \text{ et } f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ et } (g \circ f)(x) = 0,$$

puisque la première condition entraîne la seconde, on a $\ker \varphi = \ker f$. Soit y dans l'image de φ : il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$. On a notamment $g(y) = (g \circ f)(x) = 0$, d'où $y \in \ker g$. Ainsi $\text{Im } \varphi \subset \ker g$, et $\dim \text{Im } \varphi \leq \dim \ker g$. On écrit le théorème du rang pour φ :

$$\dim \ker(g \circ f) = \dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

Exercice 6.15

Si $\text{Im } u = \text{Vect}(x)$ et $\text{Im } v = \text{Vect}(y)$ alors $\text{Im } (u + v) \subset \text{Vect}(x, y)$. Cela donne $\text{rg } (u + v) \leq 2$. Toutes les situations peuvent arriver. Le cas $v = -u$ donne un rang nul, le cas $u = v$ un rang égal à 1 et le rang 2 peut s'obtenir avec des projecteurs bien choisis (par exemple).

Exercice 6.16

- On a rapidement $\text{Im } (u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$, d'où $\text{rg } (u + v) \leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$. En appliquant avec $u + v$ et $-v$, on obtient $\text{rg } u \leq \text{rg } (u + v) + \text{rg } (-v)$. Or $\text{Im } v = \text{Im } (-v)$, ce qui donne $\text{rg } (u + v) \geq \text{rg } u - \text{rg } v$. De même $\text{rg } (u + v) \geq \text{rg } v - \text{rg } u$, d'où $|\text{rg } u - \text{rg } v| \leq \text{rg } (u + v)$.
- Si on a $u \circ v = 0$, alors $\text{Im } v \subset \ker u$, donc $\text{rg } u \leq \dim \ker v = \dim E - \text{rg } v$. On a donc $\text{rg } u + \text{rg } v \leq \dim E$. De plus $\dim E = \text{rg } (u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$. Finalement $\text{rg } u + \text{rg } v = \dim E$.

Exercice 6.17

Soit e_1, \dots, e_p une base de E . Soit n_1, \dots, n_p des entiers tels que $f^{n_i}(e_i) = 0$. On considère n le plus grand de ces entiers. On a $f^n(e_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. L'endomorphisme f^n est nul sur une base donc partout.

Exercice 6.18

- Soit $y \in F_{i-1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = (f_1 \circ \dots \circ f_{i-1})(x)$. Alors $f_i(y) = (f_1 \circ \dots \circ f_{i-1})(f_i(x))$ avec les propriétés de commutativité. Puisque, pour tout $x \in E$, $f_i^n(x) = 0$, c'est entre autre vrai pour $x \in F_{i-1}$, et donc pour l'endomorphisme induit (le résultat est immédiat avec f_1 et F_0).
- On applique le théorème du rang à g_i la restriction de f_i à F_{i-1} si $F_{i-1} \neq \{0\}$. On a $\text{Im } g_i = f_i(F_{i-1}) = F_i$ et g_i n'est pas injective. On a donc $\dim F_i < \dim F_{i-1}$ tant que F_{i-1} n'est pas $\{0\}$. On montre alors que $\dim F_i \leq n - i$ et $\dim F_n = 0$. Cela donne bien que $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n = 0$.
- application directe du résultat précédent.

Exercice 6.19

- Tout vecteur x de E se décompose dans la base donnée. Ainsi $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k f^k(a) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k f^{k-1}(a)\right)$. L'application f est donc surjective. Puisque f est un endomorphisme en dimension finie, elle est bijective. L'image de la base $(f(a), f^2(a), \dots, f^n(a))$ par f^{-1} est une base, à

savoir $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$.

2. $f^n(a)$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$. Il existe des scalaires a_0, \dots, a_{n-1} tels que

$$f^n(a) + a_{n-1}f^{n-1}(a) + \dots + a_1f(a) + a_0a = 0.$$

Considérons g l'endomorphisme $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{Id}$. Il est nul en a . De plus g commute avec f (il n'y a qu'à écrire), si bien que $g(f^k(a)) = f^k(g(a)) = 0$ pour tout entier k . L'endomorphisme g est nul sur une base de E . Il est donc nul.

3. Même principe. Soit g un endomorphisme qui commute avec f . On peut trouver des constantes b_0, \dots, b_{n-1} telles que $g(a) = b_{n-1}f^{n-1}(a) + \dots + b_1f(a) + a_0a$. On considère alors $h = g - b_{n-1}f^{n-1} + \dots + b_1f + a_0\text{Id}$. Il commute avec f (car f et g commutent avec f). Il est nul en a , et comme dans la question précédente, on montre que $h(f^k(a)) = f^k(h(a)) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'endomorphisme h est donc nul sur une base de E et sur E .

Exercice 6.20

1. Puisqu'on est en dimension finie, on en profite (le résultat est aussi vrai en dimension infinie mais se fait différemment). On choisit une base (e_1, \dots, e_n) de E . Si x est non nul et que $(f(x), x)$ est liée alors il existe α et β pas tous nuls tels que $\alpha x + \beta f(x) = 0$. Le scalaire β est non nul sinon on aurait $\alpha x = 0$ d'où $x = 0$ ($\alpha \neq 0$ si $\beta = 0$). Ainsi, il existe λ tel que $f(x) = \lambda x$. On applique cela à e_i : il existe λ_i tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$, puis à $x = e_1 + \dots + e_n$: il existe λ tel que $f(x) = \lambda x$, ce qui donne $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \lambda \sum_{i=1}^n e_i$. Finalement $\lambda_i = \lambda$ pour tout i . Puisque f et λId coïncident sur une base, on a $f = \lambda \text{Id}$.
2. Soit f dans le commutant de $\mathcal{L}(E)$. Soit x un vecteur non nul de E , D la droite vectoriel dirigée par x et H un supplémentaire. Soit p le projecteur sur D de direction H . On a $f(p(x)) = p(f(x))$, soit $p(f(x)) = f(x)$. Or les seuls éléments invariants par p sont les vecteurs colinéaires à x , donc $f(x)$ est colinéaire à x . Finalement f est une homothétie.
3. On fait la même chose avec une symétrie par rapport à D parallèlement à H plutôt qu'un projecteur et on obtient le même résultat.

Exercice 6.21

On vérifie que $r \circ r = 0$ (calcul direct). On constate que, pour $x \in E$, $r(x) = p(x) + q(x) - q \circ p(x) = p(x) + q(x - p(x)) \in \text{Im } p + \text{Im } q$. Cela donne $\text{Im } r \subset \text{Im } p + \text{Im } q$. Pour montrer la réciproque, on choisit $z = p(x) + q(y) \in \text{Im } p + \text{Im } q$ et on vérifie que z est invariant par r (c'est plus simple). Pour le noyau, on a directement $\ker p \cap \ker q \subset \ker r$. Réciproquement, si $p(x) + q(x) - q \circ p(x) = 0$, en appliquant p , il reste $p(x) = 0$. En réinjectant, on a $q(x) = 0$ d'où l'inclusion réciproque.

Exercice 6.22

- *sens direct* : puisque $E = \ker f \oplus \text{Im } f = \ker g \oplus \text{Im } g$, il suffit de vérifier que f et $f \circ g$ coïncident sur deux espaces supplémentaires. Pour $x \in \ker f = \ker g$, on a $f(x) = 0 = f \circ g(x)$. Pour $x \in \text{Im } g$, on a $g(x) = x$ et $f \circ g(x) = f(x)$. Ainsi f et $f \circ g$ coïncident sur $\ker g$ et sur $\text{Im } g$ donc sur E . De même pour l'autre égalité.
- *sens réciproque* : on a $f = f \circ g$ donc $f \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ g = f$ et f est un projecteur (idem pour g). Si $x \in \ker f$ alors $g(x) = (g \circ f)(x) = 0$ donc $x \in \ker g$ c'est-à-dire $\ker f \subset \ker g$. De même pour l'inclusion réciproque.

Exercice 6.23

1. On a rapidement $p \circ q = q \circ p = 0$. De plus $p + q = \frac{1}{b-a}(u - a\text{Id}_E - u + b\text{Id}_E) = \text{Id}_E$. Ainsi $p \circ p = p \circ (\text{Id}_E - q) = p - 0 = p$ (et de même pour q). Les endomorphismes p et q sont donc des projecteurs (on peut également calculer $p \circ p$ directement en écrivant, pour le second $u - a\text{Id}_E = u - b\text{Id}_E + (b-a)\text{Id}_E$).
2. On a $u^0 = \text{Id}_E = p + q$. De plus $(b-a)p = u - a\text{Id}_E$ et $(a-b)q = u - b\text{Id}_E$. Par combinaison linéaire (pour éliminer Id_E), on obtient $(b-a)bp - (a-b)aq = (b-a)u$, soit $u = aq + bp$. Puisque p et q commutent avec $p \circ q = 0$, la formule du binôme donne alors

$$u^n = a^n q^n + b^n p^n = a^n q + b^n p.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On regarde si, par le plus grand des hasards, formule n'est pas valable pour $-n$. On effectue le produit u^{-n} par le candidat à l'inverse

$$u^{-n} \cdot (a^{-n}q + b^{-n}p) = (a^n q + b^n p)(a^{-n}q + b^{-n}p) = q^2 + 0 + p^2 = q + p = \text{Id}_E.$$

Ainsi l'inverse de u^n est bien $a^{-n}q + b^{-n}p$. La formule est donc valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. On commence par remarquer que, pour tout $x \in E$, $p(x) \in \ker(u - b\text{Id}_E)$ et $q(x) \in \ker(u - a\text{Id}_E)$. De plus $x = p(x) + q(x)$. De plus si $x \in \ker(u - b\text{Id}_E) \cap \ker(u - a\text{Id}_E)$, alors $u(x) = ax = bx$. Puisque $b \neq a$, alors $x = 0$. On a montré $E = E_a \oplus E_b$.

Exercice 6.24

- Tout d'abord $h = g \circ f$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^n . On a $h \circ h = g \circ f \circ g \circ f = g \circ (f \circ g) \circ f = h$, donc h est un projecteur.
- On détermine $\ker h$. Si $g(f(x)) = 0$, en composant par f , on a $f(x) = 0$ donc $x \in \ker f$, ce qui donne $\ker h \subset \ker f$. La réciproque est immédiate. On a $\ker h = \ker f$.
- Pour l'image, on a directement $\text{Im } h \subset \text{Im } g$. Réciproquement, si $y = g(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^p$, alors $y = (g \circ f)(g(x)) \in \text{Im } g \circ f$. Ainsi $\text{Im } h = \text{Im } g$.

→ On a $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}^p}$ si bien que g est injective. Le théorème du rang donne $\dim \mathbb{R}^p = \text{rg } g = p$. On a également f surjective, d'où $n = \text{rg } f + \dim \ker f$ donne $\dim \ker f = n - p$. Tout est cohérent puisqu'on retrouve $\text{rg } h + \dim \ker h = p + n - p = n$.

Exercice 6.25

1. On commence par remarquer que $\deg \Delta Q = \deg Q - 1$ pour tout polynôme Q (on écrit avec des coefficients ou on le fait matriciellement en écrivant la matrice de Δ dans la base canonique). Si $\deg P = n - 1$ alors $\Delta^n P = 0$. Il suffit de montrer la propriété pour les entiers $k < n$. On détermine alors $\Delta^k P$ et on montre que c'est une combinaison linéaire des $P(X + i)$ pour $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$. Le plus simple pour cela est de considérer l'application $T : P \mapsto P(X + 1)$. On a alors $\Delta = \text{Id} - T$. Puisque Id commute avec T , on peut appliquer la formule du binôme :

$$\Delta^k = (\text{Id} - T)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i T^i \text{ puis } \Delta^k P = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i P(X + i).$$

2. On a l'inclusion $F \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Réciproquement, on a $P, \Delta P, \dots, \Delta^{n-1} P$ tous dans F . Or $\Delta^k P$ est de degré $n - 1 - k$. La famille précédente forme donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $\text{Vect}(P, \dots, \Delta^{n-1} P) = \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset F$. Cela donne l'égalité. Puisque que la famille $(P(X), P(X + 1), \dots, P(X + n - 1))$ comporte n vecteurs et qu'elle est génératrice, elle forme bien une base de l'espace.
3. On a montré que $\Delta^n = 0$. De plus

$$\Delta^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i T^i = \text{Id} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i T^i$$

En notant $\alpha_k = (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$, on a $\text{Id} = \sum_{k=1}^n \alpha_k T^k$ et, pour tout polynôme Q ,

$$Q(X) = \sum_{k=1}^n \alpha_k Q(X + k)$$

Exercice 6.26

1. on vérifie que $f_\sigma^2(e_i) = e_i$ pour tout vecteur e_i lorsque σ est une transposition. Ainsi $f^2 = \text{Id}$ dans ce cas et f est une symétrie. Si $\tau = \tau_{ij}$ alors $f_\tau(e_k) = e_k$ si $k \neq i$ et j . On a également $f_\tau(e_i + e_j) = e_i + e_j$ et $f_\tau(e_i - e_j) = -(e_i - e_j)$. Les $n - 1$ vecteurs $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, e_n, e_i + e_j$ sont invariants et le vecteur $e_i - e_j$ transformé en son opposé. Ces n vecteurs forment une base et f_τ est la symétrie par rapport à $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, e_n, e_i + e_j)$ de direction $\text{Vect}(e_i - e_j)$.
2. si σ et σ' sont deux permutations alors $(f_\sigma \circ f_{\sigma'})(e_i) = f_\sigma(e_{\sigma'(i)}) = e_{(\sigma \circ \sigma')(e_i)}$. Ainsi $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \sigma'}$. En utilisant le fait que $\sigma \mapsto \sigma \sigma'$ est une permutation de \mathfrak{S}_n , on vérifie que $p \circ f_\sigma = p$ (et de même $f_\sigma \circ p = p$). On a alors

$$p \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p = p.$$

Finalement p est un projecteur.

→ avec $p \circ f_\tau = p$, on obtient $p \circ f_\tau(e_1) = p(e_1)$. À l'aide des différentes transpositions, on montre que tous les vecteurs $p(e_i)$ sont égaux.

→ on vérifie que $p(e_1) = \frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n)$ (parmi les $n!$ permutations, $(n - 1)!$ envoient e_1 sur e_1 , autant sur $e_2 \dots$ on note u le vecteur $\frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n)$)

→ Si $p(v) = v$ avec $f_\sigma \circ p(v) = p(v)$ soit $f_\sigma(v) = v$, on montre que toutes les coordonnées de v sont égales. On en déduit que $v = \lambda(e_1 + \dots + e_n)$. Réciproquement avec les résultats précédents, on vérifie que $p(u) = u$.

→ on déduit de tout cela que $\text{Im } p = \text{Vect } u$.

→ Les vecteurs $e_i - e_1$ sont dans le noyau de p . Par dimension, $\ker p = \text{Vect}(e_2 - e_1, \dots, e_n - e_1)$.

Matriciellement c'est presque plus simple : on peut montrer que la matrice de p dans la base (e_1, \dots, e_n) est la matrice dont tous les coefficients sont $\frac{1}{n}$ (ce qui permet, avec le chapitre sur la réduction, de retrouver les résultats précédents).

Exercice 6.27

1. Si $f = g \circ p$, alors $\ker p \subset \ker f$, de plus $\text{rg}(g \circ p) = \text{rg } p$. On en déduit que $\ker f = \ker p$. Considérons p un projecteur de noyau $\ker f$, d'image H un supplémentaire de $\ker f$. Soit (e_1, \dots, e_r) une base de H , complétée par (e_{r+1}, \dots, e_n) une base de $\ker p$. Quelle que soit g , on a déjà $f^i e_j = (g \circ p)(e_j)$ lorsque $i = r + 1, \dots, e_n$. On veut alors $f(e_i) = g(p(e_i)) = g(e_i)$ si $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. La famille $f_1 = f(e_1), \dots, f_r = f(e_r)$ est une base de $\text{Im } f$ (isomorphisme classique), qu'on peut compléter en f_{r+1}, \dots, f_n pour obtenir une base de E . Notons g l'endomorphisme de E qui envoie e_i sur f_i . Il envoie une base de E sur une autre base de E et est par conséquent un automorphisme de E . Il vérifie alors les bonnes conditions puisque f et $g \circ p$ coïncident sur une base.
2. On a cette fois $\text{Im } f = \text{Im } p$ (une inclusion et égalité des rangs). De plus $f(x) = 0$ si, et seulement si $g(x) \in \ker p$. On doit donc envoyer $\ker f$ sur $\ker p$ par g - la difficulté est de construire g bijective. On décompose l'espace de deux manières : au départ $E = H \oplus \ker f$, et à l'arrivée $E = \text{Im } f \oplus K$. On note (e_1, \dots, e_r) une base de H et (e_{r+1}, \dots, e_n) une base de $\ker f$. Par isomorphisme du rang, on a $(f_1 = f(e_1), f_2 = f(e_2), \dots, f_r = f(e_r))$ qui est une base de $\text{Im } f$, qu'on complète à l'aide d'une base de K , (f_{r+1}, \dots, f_n) . On considère g l'automorphisme qui envoie la première base sur la seconde, et p le projecteur d'image $\text{Im } f$, de noyau K . Alors, si $i = 1, \dots, r$, on a $p(g(e_i)) = p(f_i) = f_i = f(e_i)$. Si $i = r + 1, \dots, n$, alors $p(g(e_i)) = p(f_i) = 0$ car $f_i \in K = \ker p$. Pour ces entiers $f(e_i) = 0$. Les applications $p \circ g$ et f coïncident sur une base

de E donc sur E .

Exercice 6.28

1. Soit H un supplémentaire de $\ker g$ dans E et \tilde{g} l'isomorphisme canonique de H sur $\text{Im } g$:

$$\tilde{g} : \begin{cases} H & \rightarrow & \text{Im } g \\ x & \rightarrow & g(x) \end{cases}$$

On cherche h tel que $f = g \circ h$. On ne peut pas directement utiliser $h = g^{-1} \circ f$ puisque g n'est pas bijective, mais on peut utiliser \tilde{g} qui est une bijection entre H et $\text{Im } g$. Puisque, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im } f \subset \text{Im } g$, on peut définir $h(x) = \tilde{g}^{-1}(f(x))$. Pour tout $x \in E$, on a $h(x) \in H$ et $g(h(x)) = \tilde{g}(\tilde{g}^{-1}(f(x))) = f(x)$. Cela donne bien $f = g \circ h$. De plus $\text{Im } h = \tilde{g}^{-1}(f(E)) = \tilde{g}^{-1}(\text{Im } f)$ et puisque \tilde{g} est un isomorphisme linéaire, on a $\text{rg } h = \dim \text{Im } f = \text{rg } f$.

2. \rightarrow on suppose (i) et (ii). On a $\text{rg } f = \text{rg } (f \circ g \circ f) \leq \text{rg } (g \circ f) \leq \text{rg } g$ et de même $\text{rg } g \leq \text{rg } f$. On a bien $\text{rg } f = \text{rg } g$.
 \rightarrow on suppose (i) et (iii). On a $g \circ f \circ g \circ f = g \circ f$ et $f \circ g \circ f \circ g = f \circ f$, donc $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs. On a $\text{rg } (g \circ f) \leq \text{rg } f = \text{rg } g$. De plus $\text{rg } g = \text{rg } f = \text{rg } f \circ g \circ f \leq \text{rg } g \circ f$ (de même pour $\text{rg } f \circ g$). On a ainsi $\text{rg } g \circ f = \text{rg } f \circ g = \text{rg } f = \text{rg } g$. Puisque $\text{Im } (g \circ f) \subset \text{Im } g$, on a $\text{Im } (g \circ f) = \text{Im } g$. Finalement $g \circ f$ est un projecteur d'image $\text{Im } g$. Les éléments de $\text{Im } g$ sont invariants donc, pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(g(x)) = g(x)$, c'est-à-dire $g \circ f \circ g = g$.
 \rightarrow même principe avec (ii) et (iii).
3. On se donne f et on cherche g . Si g existe, on a montré que $f \circ g$ doit être un projecteur d'image $\text{Im } f$. On considère p un projecteur quelconque d'image $\text{Im } f$. On a $\text{Im } p \subset \text{Im } f$ (puisque $\text{Im } p = \text{Im } f$), donc il existe, d'après la première question, une application g (elle correspond à h dans la première question) de même rang que p telle que $p = f \circ g$. Puisque p est un projecteur d'image $\text{Im } f$, pour tout $x \in E$, $p(f(x)) = f(x)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $f(x) = p(f(x))(f \circ g)(f(x))$, ce qui donne $f \circ g \circ f = f$, sachant qu'on a $\text{rg } g = \text{rg } p = \text{rg } f$.

Exercice 6.29

1. Supposons que l'union des sous-espaces donne E . En retirant certains sous-espaces, on choisit une famille minimale dont l'union donne E (c'est-à-dire la plus petite famille en terme de nombre d'éléments telle que la réunion donne l'espace). On note E_1, \dots, E_k cette famille minimale. Quitte à supprimer les sous-espaces qui sont inclus dans l'un des autres, on peut supposer qu'il n'y a aucune inclusion entre les sous-espaces. Soit F l'union des $k-1$ premiers sous-espaces E_1, \dots, E_{k-1} (cette union est différente de E). On choisit $y \in F \setminus E_k$ et $x \in E_k \setminus F$ (c'est possible par la construction précédente). On considère les vecteurs $u_\lambda = y + \lambda x$. Aucun de ces vecteurs n'est dans E_k car sinon y le serait aussi (car $x \in E_k$) - ils sont donc tous dans F (puisque E est la réunion de ces deux ensembles). Pour $\lambda \neq \mu$, les vecteurs u_λ et u_μ ne peuvent pas être dans le même sous-espace E_i pour $i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$: si c'était le cas, on aurait

$$(y + \lambda x) - (y + \mu x) = (\lambda - \mu)x \in E_i$$

ce qui donne $x \in E_i$ puisque $\lambda \neq \mu$. Puisque \mathbb{R} comporte plus que k réels, on obtient une contradiction.

2. On fait une récurrence sur la codimension commune des sous-espaces (l'entier $p = n - r$). C'est immédiat lorsque $p = 0$. Supposons la propriété vraie pour un certain entier p et considérons k sous-espaces de dimension $n - (p + 1)$. La réunion de ces sous-espaces n'est pas tout l'espace E . Il existe donc un vecteur x qui n'est dans aucun de ces sous-espaces. Notons alors $G_i = F_i \oplus \text{Vect}(x)$. Ces k sous-espaces sont de même dimension $n - p$ et on peut appliquer la propriété de récurrence au rang précédent. Il existe ainsi un supplémentaire commun H pour ces différents sous-espaces : $G_i \oplus H = E$. On note alors $K = \text{Vect}(x) \oplus H$. Ce sous-espace vectoriel est un supplémentaire commun à tous les espaces F_i .

Exercice 6.30

1. Voir l'un des exercices précédents.
2. (a) Soit $H = F \cap G$. On note H_1 un supplémentaire de H dans F et H_2 un supplémentaire de H dans G . Les espaces H_1 et H_2 ont même dimension puisque F et G sont de même dimension. On note e_1, \dots, e_p une base du premier et f_1, \dots, f_p une base du second. On note $K = \text{Vect}(e_1 + f_1, \dots, e_p + f_p)$. On vérifie qu'il est en somme directe avec F et avec G et que c'est un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$. On note L un supplémentaire de $F + G$ dans E . Alors, $K \oplus L$ convient.
- (b) on considère l'ensemble des espaces qui sont en somme directe avec F et avec G . Cet ensemble est non vide. On en choisit un, H , de dimension maximale. Soit $F' = F \oplus H$ et $G' = G \oplus H$. Si ces espaces ne sont pas E , alors il existe un vecteur x en dehors de $F' \cup G'$. L'espace $H \oplus \text{Vect}(x)$ est en somme directe avec F et G . Cela contredit la maximalité. Ainsi $E = F \oplus h = G \oplus H$.
3. Supposons que $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, la famille étant libre. On note $F_i = \text{Vect}(e_i)$. On a directement $d(F) = \sum_{i=1}^k d(F_i)$. Si G_1 et G_2 sont deux droites non colinéaires, alors elles admettent un supplémentaire commun H . On a $d(E) = d(G_1) + d(H) = d(G_2) + d(H)$. Ainsi $d(G_1) = d(G_2)$. Notons α cette quantité commune à toutes les droites. On a alors $d(F) = k \cdot \alpha = \alpha \dim(F)$. Réciproquement une telle applications convient.

Exercice 6.31

- \rightarrow Le sens réciproque est simple. S'il existe $h \in \text{GL}(F)$ et $k \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h \circ g = f \circ k$, on a $\text{rg } (h \circ g) = \text{rg } g$ car h est bijective et $\text{rg } (f \circ k) \leq \text{rg } f$.
 \rightarrow On note $p = \text{rg } f$ et $q = \text{rg } g$ et on suppose que $q \leq p$.

- On considère (e_{p+1}, \dots, e_n) une base de $\ker f$ complétée en (e_1, \dots, e_n) base de E et $(\varepsilon_{q+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\ker g$ complétée en $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de E .
- La famille $(g(\varepsilon_1), \dots, g(\varepsilon_q))$ est alors une base de $\text{Im } g$ que l'on peut compléter en $(g(\varepsilon_1), \dots, g(\varepsilon_q), g_{q+1}, \dots, g_m)$ base de F . De même, $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de $\text{Im } f$ que l'on peut compléter en $(f(e_1), \dots, f(e_p), f_{p+1}, \dots, f_m)$ base de F .
- Considérons k l'endomorphisme de E défini par $k(e_1) = e_1, \dots, k(\varepsilon_q) = \varepsilon_q, k(\varepsilon_{q+1}) = \dots = h(\varepsilon_n) = 0$ et l'automorphisme de F qui transforme la base $(g(\varepsilon_1), \dots, g(\varepsilon_q), g_{q+1}, \dots, g_m)$ en la base $(f(e_1), \dots, f(e_p), f_{p+1}, \dots, f_m)$. On vérifie alors que si $1 \leq i \leq q$ $f \circ k(\varepsilon_i) = f(e_i)$ ce qui est égal à $h(g(\varepsilon_i)) = h \circ g(\varepsilon_i)$ car $i \leq q \leq p$ et pour $i > q$, $f \circ k(\varepsilon_i) = 0 = h \circ g(\varepsilon_i)$.
- On a bien $h \circ g = f \circ k$

Exercice 6.32

- On a $\dim \ker f = 2$ et $\dim \ker f \circ f \leq \dim \ker f + \dim \ker f = 4$. On a donc $\text{rg } f^2 \geq 1$ (totalement inutile puisque $f^2 \neq 0$).
- On a $f^3 = 0$ donc $\text{Im } f^2 \subset \ker f$, donc $\text{rg } f^2 \leq 2$. On a donc $\text{rg } f^2 = 1$ ou 2 .
- On note F un supplémentaire de $\text{Im } f^2$ dans $\text{Im } f$: $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \oplus F$. On a alors $f(\text{Im } f) = \text{Im } f^2 = f(\text{Im } f^2) + f(F) = \text{Im } f^3 + f(F)$. Ainsi $f(F) = \text{Im } f^2$. Si on avait $\text{rg } f^2 = 2$, alors $\dim F = 1$ et $\dim f(F) \leq 1$, cela donne une contradiction et $\text{rg } f^2 = 1$.

remarque : c'est une partie de la démonstration de la « convexité de la dimensions des images » ou du fait que les noyaux augmentent de moins en moins vite : si $\dim \ker f = 2$, alors au rang suivant on a augmenté d'au moins une dimension (sinon ça s'arrête) et d'au plus deux. Si on avait $\dim \ker f^2 = 3 = \dim \ker f + 1$, alors on aurait $\dim \ker f^3 - \dim \ker f^2 \leq 1$ ce qui contredit $f^3 = 0$.

Exercice 6.33

Puisque $H_1 \cup H_2$ n'est pas E tout entier, il existe un vecteur u en dehors de cette réunion. La droite $\text{Vect}(u)$ est alors une droite supplémentaire à la fois pour H_1 et pour H_2 .

Tout vecteur x de E se décompose de façon unique $x = x_1 + \lambda_1 u$ dans $H_1 \oplus \mathbb{K}u$ et $x = x_2 + \lambda_2 u$ dans $H_2 \oplus \mathbb{K}u$.

Soit $x \in H_1$. Il se décompose alors de façon unique en $x_2 + \lambda u$ avec $x_2 \in H_2$. On considère φ l'application de H_1 dans H_2 qui à $x \in H_1$ associe cet unique vecteur de H_2 . On vérifie alors que φ convient... cela peut se faire étape par étape (on vérifie la linéarité, la surjectivité et l'injectivité) ou plus simple :

Soit p la projection sur H_2 dans la direction de $\mathbb{K}u$. On vérifie que $p(H_1) = H_2$ et que la restriction de p à H_1 est injective (et ainsi cette restriction est bijective). La surjectivité vient du fait que si $x_2 \in H_2$, alors il existe $x_1 \in H_1$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $x_2 = x_1 + \mu u$. On a alors $p(x_1) = p(x_2) = x_2$. Si $x \in H_1$ et $p(x) = 0$ alors x est dans $H_1 \cap \text{Vect}(u) = \{0\}$.

Exercice 6.34

1. cours

2. On a $i \Rightarrow ii$: si $\psi = \sum_{k=1}^p \alpha_k \varphi_k$ et si $x \in \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k$ alors $\psi(x) = 0$, cela donne bien l'inclusion de ii. On a également $iii \Rightarrow ii$: si chaque $\varphi_k(x)$ est nul alors leur maximum également et $|\psi(x)| \leq 0$ donc $\psi(x) = 0$.

3. voir cours : on complète la famille libre $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E^* et on vérifie que l'application $f : x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ est une bijection de E dans \mathbb{C}^n . Elle est notamment surjective et pour tout $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{C}^p$, il existe $x \in E$ tel que $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$. Notamment θ est surjective. On en déduit que $\text{rg } \theta = p$ et que $\dim \ker \theta = n - p$. On note $F = \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k$. On a $F = \ker \theta$ et F est de dimension $n - p$. On note \mathcal{F} le sous-espace vectoriel des formes linéaires qui s'annulent sur F . Si on note e_{p+1}, \dots, e_n une base de F , complétée en une base de E , l'application $\psi \in \mathcal{F}$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs e_1, \dots, e_p . L'application $\psi \in \mathcal{F} \mapsto (\psi(e_1), \dots, \psi(e_p)) \in \mathbb{C}^p$ est donc bijective ce qui nous indique que \mathcal{F} est de dimension p . Puisque \mathcal{F} est de dimension p et qu'il contient la famille libre $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, on en déduit que $\mathcal{F} = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Remarque : cette rédaction est faite pour essayer de coller à l'indication... en plus simple, on réutilise l'application f précédente et on construit une famille de vecteurs e_1, \dots, e_n en tant qu'antécédent (unique pour chaque) des vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^n - c'est-à-dire des vecteurs e_i qui vérifient $\varphi_j(e_i) = \delta_{ij}$. On vérifie que $F = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On décompose ψ dans la base $\varphi_1, \dots, \varphi_n$; $\psi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j$.

En évaluant en e_k , on obtient $\psi(e_k) = \lambda_k$. Notamment λ_k est nul pour $k \in \llbracket p+1; n \rrbracket$ puisque $F \subset \ker \psi$.

4. il est plus simple de montrer que $i \Rightarrow iii$: si $\varphi = \sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_k$, alors

$$|\psi(x)| \leq \sum_{k=1}^p |\lambda_k| |\varphi_k(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^p |\lambda_k| \right) \max\{|\varphi_k(x)|, 1 \leq k \leq p\}$$