

## CHAPITRE 7 - MATRICES

## Exercice 7.1

→ On peut calculer les premières puissances et trouver une relation de récurrence. On peut aussi décomposer  $A$  sous la forme  $A = I_3 + B$  et

on constate que  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B^3 = 0$ . Pour  $n \geq 2$ , on a alors

$$(I_3 + B)^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la formule est valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ . Finalement on a  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

→ On peut inverser cette matrice (par les moyens usuels). On peut imaginer que la formule est encore vraie pour  $n = -m$  où  $m \in \mathbb{N}$ . On

pose  $B_{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-n(-n-1)}{2} & 1 & -n \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on effectue le produit  $AB_{-n}$  pour constater qu'il vaut  $I_3$ . Ainsi  $A^{-n} = B_{-n}$  si  $n \in \mathbb{N}$  et l'expression est valable pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

## Exercice 7.2

Soit  $(X, Y)$  une solution. On a alors le système

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(X) = n + \operatorname{tr}(Y)\operatorname{tr}(A) \\ \operatorname{tr}(Y) = n + \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(B) \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tr}(X) - \operatorname{tr}(Y)\operatorname{tr}(A) = n \\ -\operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(Y) = n \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est  $1 - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) \neq 0$ . Il admet donc une unique solution  $\operatorname{tr}(X) = n \frac{1 + \operatorname{tr}(A)}{1 - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}$  et  $\operatorname{tr}(Y) = n \frac{1 + \operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}$ . On obtient alors

$$X = I_n + n \frac{1 + \operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)} A \text{ et } Y = I_n + n \frac{1 + \operatorname{tr}(A)}{1 - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)} B.$$

On vérifie ensuite que ces matrices conviennent.

## Exercice 7.3

- Si  $A$  est de rang 1, alors ses colonnes sont toutes proportionnelles à un même vecteur  $V$  non nul de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a  $A = (u_1 V \quad u_2 V \quad \cdots \quad u_n V)$ . On note  $U$  le vecteur colonne  ${}^t(u_1, \dots, u_n)$  et on a  $A = UV^T$ . Réciproquement si  $A = UV^T$ , on a  $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(V) = 1$ . Le terme général de  $A$  est  $a_{ij} = u_i v_j$ . L'un de ces termes au moins est non nul puisque  $U$  et  $V$  sont des vecteurs non nuls.
- (a) On a  $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \sum_{k=1}^n u_k v_k = U^T V$  - en fait on identifie la matrice  $U^T V$  de taille  $(1, 1)$  à son seul coefficient. On a ainsi  $A^2 = U^t(V)UV^T = U(\operatorname{tr}(A)V^T) = \operatorname{tr}(A)A$ . Par récurrence, on a  $A^k = (\operatorname{tr}(A))^{k-1}A$  si  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $A^0 = I_n$ .  
(b) On sait qu'on obtient un hyperplan. On résout  $AX = 0 = U(V^T X)$ . En écrivant ce système, on obtient plusieurs fois une équation proportionnelle à  $VX = 0$ . Le noyau de  $A$  est l'hyperplan d'équation  $VX = 0$ .
- On a  $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$ , donc  $(AB - BA)^2 = 0$ .

## Exercice 7.5

- Un vecteur directeur de  $D$  est  $(1, 2, 3)$ . Ce vecteur n'est pas dans le plan  $H$  donc les deux espaces sont supplémentaires (tout vecteur en dehors d'un hyperplan définit un supplémentaire).
- Soit  $u = (x, y, z)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $v = (x', y', z')$  sont image. On a  $v = p(u)$  si et seulement si  $v \in H$  et  $v - u \in D$ , c'est-à-dire si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v - u = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$  et  $v \in H$ . On a donc  $x' = x + \lambda$ ,  $y' = y + 2\lambda$ ,  $z' = z + 3\lambda$  et  $(x + y + z) + 6\lambda = 0$ . Cela donne  $\lambda = -\frac{1}{6}(x + y + z)$  et enfin

$$\begin{cases} x' = \frac{5x - y - z}{6} \\ y' = \frac{-2x + 4y - 2z}{6} \\ z' = \frac{-3x - 3y + 3z}{6} \end{cases}$$

cela se réécrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

et on obtient ainsi la matrice de la projection.

**Exercice 7.6**

Supposons qu'il existe  $X \neq 0$  tel que  $AX = 0$ . On note  $i_0$  l'indice tel que  $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ . On a  $|x_{i_0}| > 0$  puisque  $X \neq 0$ . On écrit la ligne  $i_0$  :

$$a_{i_0, i_0} x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} x_j = 0,$$

soit  $a_{i_0, i_0} x_{i_0} = - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} x_j$ . On obtient alors

$$|a_{i_0, i_0} x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| |x_j| \leq \left( \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| \right) |x_{i_0}|.$$

Puisque  $x_{i_0} \neq 0$ , on obtient  $|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}|$ , d'où une contradiction.

**Exercice 7.8**

Il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  telles que  $A = PJ_r Q$  où  $J_r$  est diagonale avec  $r$  termes égaux à 1 au début, puis des 0. Cela s'écrit  $J_r = \sum_{i=1}^r E_{ii}$ . Alors

$$A = \sum_{i=1}^r P E_{ii} Q.$$

Puisque  $P$  et  $Q$  sont inversibles, on a  $\text{rg}(P E_{ii} Q) = \text{rg}(E_{ii}) = 1$ . Ainsi  $A$  est somme de matrices de rang 1.

**Exercice 7.9**

Le déterminant vaut  $\det(A) \cdot \det(C) \neq 0$ . La matrice est inversible. On cherche l'inverse sous la forme

$$N = \begin{pmatrix} A^{-1} & D \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le produit donne

$$MN = \begin{pmatrix} I_n & AD + BC^{-1} \\ 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

Il suffit de prendre  $D = -A^{-1}BC^{-1}$  pour obtenir l'inverse.

**Exercice 7.10**

- Le plus simple est de passer par un produit matriciel. Soit  $r$  le rang de  $C$  et  $P, Q$  deux matrices de  $GL_p(\mathbb{K})$  telles que  $PCQ = J_r$ . On considère la matrice diagonale par blocs  $\tilde{P} = \text{diag}(I_n, P)$  et  $\tilde{Q} = \text{diag}(I_n, Q)$ . Elles sont toutes les deux inversibles et  $\tilde{P} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_n & B' \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$  est de rang  $n+r$ .
- Soit  $N = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -A & I_n \end{pmatrix}$ . Cette matrice est inversible et  $M \cdot N = \begin{pmatrix} I_p - AB & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ . Cela donne (on ne change pas le rang en multipliant par une matrice inversible) en utilisant la question précédente (à moduler),  $\text{rg} M = \text{rg}(I_p - BA) + n$ . En multipliant à droite par  $\begin{pmatrix} I_p & -B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ , on obtient la matrice  $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ A & I_n - AB \end{pmatrix}$  et de même  $\text{rg} M = p + \text{rg}(I_n - AB)$ . Si  $\text{rg}(I_n - AB) = n - p$ , alors  $\text{rg}(I_p - BA) = 0$  donc  $BA = I_p$ .

**Exercice 7.11**

- Les colonnes sont toutes proportionnelles donc  $A$  est de rang au plus 1. Puisque les coefficients ne sont pas tous nuls,  $A$  est de rang 1.
- On effectue le calcul de  $A^2$  et on obtient  $A^2 = (a_1 + \dots + a_n)A$  (ce qui est général car lorsque  $A$  est de rang 1, on a  $A^2 = (\text{tr} A)A$ ). La matrice est donc la matrice d'un projecteur si et seulement si  $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_i = 1$ .
- On note  $s$  la trace de  $A$ . On calcule le déterminant de  $B$  en sommant toutes les lignes dans la première. On peut alors factoriser par  $2(a_1 + \dots + a_n) - s = s$  et obtenir une première ligne de 1. On effectue alors les opérations  $L_i \leftarrow L_i - a_i L_1$  pour  $i$  allant de 2 à  $n$ . Il reste alors un déterminant

$$s \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -s \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} s^n$$

La matrice est inversible si et seulement si  $s = \text{tr} A \neq 0$ .

4. On a  $B^2 = 4A^2 - 4\text{tr}(A)A + \text{tr}(A)^2 I_n = 4sA - 4sA + s^2 I_n = s^2 I_n$ . Dans le cas où  $s$  est non nul, on a  $B^{-1} = \frac{1}{s^2} B$ .

### Exercice 7.12

1. On vérifie rapidement que si  $M$  et  $N$  sont dans  $C(J)$  alors  $M + \lambda N$  également (et aussi  $MN$ ) donc  $C(J)$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$  (et même une sous-algèbre). On prend une matrice  $M$  avec 9 coefficients quelconques, on calcule les produits  $MJ$  et  $JM$  et on a égalité si et seulement si il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = aI_3 + bJ + cJ^2.$$

La famille  $(I_3, J, J^2)$  est une base de  $C(J)$ .

2. Si  $Y^2 = J$  alors  $YJ = Y^3 = JY$  donc  $D(J) \subset C(J)$ . On cherche donc les éléments de  $D(J)$  sous la forme  $Y = aI + bJ + cJ^2$ . En utilisant la relation  $J^2 = I_3$ , on a

$$Y^2 = (a^2 + 2bc)I + (2ab + c^2)J + (b^2 + 2ac)J^2$$

donc  $Y^2 = J$  si et seulement si  $a^2 + 2bc = 0$ ,  $b^2 + 2ac = 0$  et  $c^2 + 2ab = 1$ . En multipliant la première équation par  $a$  et la seconde par  $b$ , on obtient  $a^3 = b^3$  donc  $a = b$ . Si  $a = b = 0$ , il reste  $c^2 = 1$  d'où  $M = \pm J^2$ . Sinon, on a  $a = b$ ,  $a + 2c = 0$  et  $c^2 + 2a^2 = 1$  donc  $a = b = -2c$  et  $9c^2 = 1$ . Cela donne  $M = \pm \frac{1}{3}(2I_3 + 2J - J^2)$ . Si on écrit bien la résolution des systèmes, le raisonnement est fait par équivalence. Sinon, on peut se contenter de vérifier que les 4 matrices obtenues conviennent.

### Exercice 7.14

Le but est de construire une base de vecteurs  $(e_1, \dots, e_{3n})$  de  $E$  telle que  $f(e_i) = e_{n+i}$ ,  $f(e_{n+i}) = e_{2n+i}$  et  $f(e_{2n+i}) = 0$  pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On doit tout d'abord étudier les dimensions des différentes espaces entrant en jeu.

- On a  $f \circ f^2 = 0$ , donc  $\text{Im } f^2 \subset \ker f$ . De même  $f^2 \circ f = 0$  donne  $\text{Im } f \subset \ker f^2$ . On sait que  $\dim \text{Im } f = 2n$  par hypothèse et  $\dim \ker f = n$  par le théorème du rang. On en déduit notamment  $\dim \ker f^2 \geq 2n$  et  $\dim \text{Im } f^2 \leq n$ . Le théorème du rang appliqué à  $f^2$  ne donne rien de plus.
- On a besoin des égalités. On peut par exemple montrer que  $\dim \ker f^2 \leq 2 \dim \ker f$  (cas particulier de  $\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker f + \dim \ker g$  - dans cette situation, on peut considérer  $g$  la restriction de  $f$  à  $\ker f^2$  et appliquer le théorème du rang, en montrant que  $\text{Im } g \subset \ker f$ ). Cela donne  $\dim \ker f^2 \leq 2n$ . Finalement on a  $\ker f^2 = \text{Im } f$  de dimension commune  $2n$  et  $\text{Im } f^2 = \ker f$  de dimension  $n$ .
- On doit construire la famille de vecteurs. On a plusieurs possibilités. En voici une. On commence par choisir une base de  $\ker f$  : elle comporte  $n$  vecteurs qu'on note  $e_{2n+1}, \dots, e_{3n}$ . Puisque  $\text{Im } f^2 = \ker f$ , chacun de ces vecteurs est dans  $\text{Im } f^2$ . Il existe des vecteurs  $(e_1, \dots, e_n)$  tels que  $f^2(e_i) = e_{2n+i}$  pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On pose alors  $e_{n+1} = f(e_1), \dots, e_{2n} = f(e_n)$ . En utilisant la définition des  $n$  premiers  $e_k$ , on a  $f(e_{n+k}) = f^2(e_k) = e_{2n+k}$  (toujours avec  $1 \leq k \leq n$ ). Si on prouve que la famille de vecteurs est libre, on aura une base. Dans cette base, la matrice de  $f$  sera exactement celle qu'on attend (tout est fait pour).
- Considérons une combinaison linéaire

$$(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) + (\lambda_{n+1} e_{n+1} + \dots + \lambda_{2n} e_{2n}) + (\lambda_{2n+1} e_{2n+1} + \dots + \lambda_{3n} e_{3n}) = 0.$$

On peut la réécrire

$$(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) + (\lambda_{n+1} f(e_1) + \dots + \lambda_{2n} f(e_n)) + (\lambda_{2n+1} f^2(e_1) + \dots + \lambda_{3n} f^2(e_n)) = 0.$$

On applique  $f^2$ , il vient  $\lambda_1 e_{2n+1} + \dots + \lambda_n e_{3n} = 0$ . Puisque la famille est une base de  $\ker f$ , chaque scalaire est nul. On reprend la première relation avec ces coefficients nuls. On applique  $f$  et on obtient de même  $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0$ . Enfin les termes restants donnent la valeur 0 pour les  $n$  derniers scalaires.

### Exercice 7.15

1. Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\alpha a + \beta f(a) = 0$ . En appliquant  $f$ , on obtient  $\alpha f(a) - \beta a = 0$ . Alors  $\alpha(\alpha a + \beta f(a)) - \beta(\alpha f(a) - \beta a) = (\alpha^2 + \beta^2)a = 0$ , et puisque  $a \neq 0$ , on en déduit  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , d'où  $\alpha = \beta = 0$ . Le système  $(a, f(a))$  est donc libre.
2. Si  $f^2 = -\text{Id}$ , on a  $\det f^2 = (\det f)^2 = (-1)^n$ , ce qui n'est possible que si  $n$  est pair.
3. Soit  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ , et soit  $(a_1, \dots, a_k)$  dans  $E^k$  tels que la somme  $F_k = F(a_1) + \dots + F(a_k)$  soit directe. Montrons la propriété suivante : Si  $a_{k+1}$  n'appartient pas à  $F_k$ , alors la somme  $F(a_1) + \dots + F(a_k) + F(a_{k+1})$  est directe. Montrons que  $F(a_{k+1}) \cap F_k = \{0\}$ . Soit  $x$  dans  $F(a_{k+1}) \cap F_k$ . Il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $x = \lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})$ . Comme  $F_k$  est stable par  $f$ , on a  $f(x) = f(\lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})) = \lambda f(a_{k+1}) - \mu a_{k+1} \in F_k$ , puis  $\lambda(\lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})) - \mu(\lambda f(a_{k+1}) - \mu a_{k+1}) = (\lambda^2 + \mu^2)a_{k+1} \in F_k$ . Mais puisque  $a_{k+1}$  n'est pas dans  $F_k$  cela implique  $\lambda = \mu = 0$ . Il en résulte que  $F(a_{k+1}) \cap F_k = \{0\}$ . La somme  $F(a_{k+1}) + F_k$  est donc directe, d'où l'on déduit que la somme  $F(a_1) + \dots + F(a_k) + F(a_{k+1})$  est directe. Alors  $\dim(F(a_1) + \dots + F(a_k) + F(a_{k+1})) = 2k + 2$ . En partant de  $F(a_1)$  où  $a_1 \neq 0$ , on construit ainsi une suite de sous-espaces  $F(a_1), \dots, F(a_p)$  tels que  $\dim(F(a_1) + \dots + F(a_k) + F(a_p)) = 2p$ . Alors  $F(a_1) \oplus \dots \oplus F(a_k) \oplus F(a_p) = E$ , ce qui donne le résultat.

4. Notons  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Dans la base  $(a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_p, f(a_p))$ , l'application  $f$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} J & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J \end{pmatrix}.$$

### Exercice 7.16

On note respectivement  $A$  et  $B$  ces matrices.

- Lorsque  $a = b = 0$ , elles sont bien évidemment semblables.
- Lorsque  $a = 0$  et  $b \neq 0$  (ou le contraire), on a  $A = I_2$ . La seule matrice semblable à  $I_2$  est  $I_2$ . Elles ne sont pas semblables.
- On suppose que  $ab \neq 0$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à  $A$ , dans la base  $(e_1, e_2)$ . On a  $f(e_1) = e_1$  et  $f(e_2) = e_2 + ae_1$ . Considérons la base  $(e'_1, e_2)$  avec  $e'_1 = \lambda e_1$ . On a toujours  $f(e'_1) = e'_1$ , et  $f(e_2) = e_2 + \frac{a}{\lambda} e'_1$ . On choisit  $\lambda = a/b$ , alors la matrice de  $f$  dans la nouvelle base est  $B$ .

### Exercice 7.17

Dans ce type d'exercice où  $A$  et  $B$  sont deux matrices quelconques vérifiant une même propriété, on essaie de montrer qu'une telle matrice est semblable à une matrice fixe de référence (et ainsi  $A$  et  $B$  seront semblables par transitivité). On ne travaille que sur  $A$  ou sur  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . On cherche une base dans laquelle la matrice de  $f$  est simple.

- On a  $f^2 = 0$  donc  $\text{Im } f \subset \ker f$ . Par le théorème du rang, on a  $\dim \ker f + \text{rg } f = 3$ . On a  $1 \leq \text{rg } f \leq \dim \ker f$ . Cela ne laisse qu'une possibilité :  $\dim \ker f = 2$  et  $\text{rg } f = 1$  (avec  $\text{Im } f \subset \ker f$ ). Soit  $e_2$  un vecteur format une base de  $\text{Im } f$  et  $e_1$  tel que  $f(e_1) = e_2$ . Puisque  $e_2$  est dans  $\ker f$ , on peut lui adjoindre un vecteur  $e_3$  tel que  $(e_2, e_3)$  est une base de  $\ker f$ .
- Montrons que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Soit une combinaison  $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$ . On applique  $f$ , ce qui donne  $\alpha f(e_1) = \alpha e_2 = 0$ , donc  $\alpha = 0$ . Il reste alors  $\beta e_2 + \gamma e_3 = 0$ , et  $\beta = \gamma = 0$  puisque  $(e_2, e_3)$  est libre.
- Dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ , la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Toutes les matrices avec les propriétés de l'énoncé sont semblables à cette dernière matrice.

### Exercice 7.18

1.  $\mathcal{U}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{L}(E, F)$  qui contient l'application linéaire nulle. Si  $f, g \in \mathcal{U}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors pour tout  $x \in G$ ,  $f(x) = g(x) = 0$  et  $(f + \lambda g)(x) = 0$  donc  $f + \lambda g \in \mathcal{U}$ . On en déduit que  $\mathcal{U}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$ .
2. On note  $p = \dim E$ ,  $q = \dim F$  et  $r = \dim G$ .
  - Une fois fixée une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et  $\mathcal{C}$  de  $F$ , on a une bijection entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $M_{qp}(\mathbb{K})$ . On fixe une base de  $E$  commençant par  $r$  vecteurs formant une base de  $G$  et une base quelconque de  $F$ . On montre alors que  $f \in \mathcal{U}$  si et seulement si la matrice  $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  a ses  $r$  premières colonnes nulles ( $f$  est nulle sur  $G$  si et seulement si  $f$  est nulle sur une base de  $G$ ). On en déduit que  $\mathcal{U}$  est en bijection avec les matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & B \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  où  $B$  est une matrice quelconque de  $M_{q, p-r}(\mathbb{K})$ . Finalement  $\dim \mathcal{U} = q(p-r)$ .
  - L'application est bien définie, linéaire. Elle est bijective puisque  $u$  est entièrement déterminée par sa restriction à deux sous-espaces supplémentaires, ici  $G$  (sur lequel  $u$  est nulle) et  $H$ . On en déduit que  $\dim \mathcal{U} = q(p-r)$ .

### Exercice 7.19

1. On effectue les calculs et on trouve que  $(AB)^2 = AB$ . On a  $\det(AB) = 0$  et les deux premières colonnes de  $AB$  ne sont pas colinéaires donc  $\text{rg}(AB) = 2$ .
2. On a  $(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = BABA$ . Si on note  $C = BA$ , on a  $C^3 = C^2$ . La matrice  $C$  est dans  $M_2(\mathbb{R})$ . On va justifier que  $C$  est inversible et ainsi  $C^3 = C^2$  donnera  $C = I_2$ . On a  $\text{rg}(ABAB) = \text{rg}(AB) = 2$  et  $\text{rg}(ABAB) = \text{rg}(ACB) \leq \text{rg}(C)$ . Ainsi  $\text{rg}(C) \geq 2$ . Finalement  $\text{rg}(C) = 2$  et  $C$  est inversible.

### Exercice 7.20

1. Par manipulation sur les lignes et les colonnes de  $M$ , on trouve :

$$\text{rg } M = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array} \right) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array} \right).$$

On en déduit que  $\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg}(B-A)$ .

2. Puisque  $\text{rg } A \leq n$  et  $\text{rg}(B-A) \leq n$ , on a  $\text{rg } M = 2n$  si et seulement si  $\text{rg } A = \text{rg}(B-A) = n$ . Il en résulte que la matrice  $M$  est inversible si et seulement si  $A$  et  $B-A$  sont inversibles. Supposons que les matrices  $A$  et  $A-B$  sont inversibles et déterminons l'inverse de la matrice  $M$ . On vous propose deux méthodes pour déterminer l'inverse de  $M$ .

→ *Première méthode* : les manipulations précédentes peuvent être traduites en termes de produits par des matrices inversibles :

$$\left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array} \right).$$

En s'inspirant de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on a  $\left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array} \right)$  et  $\left( \begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right)^{-1} &= \left( \begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array} \right)^{-1} \\ &= \left( \begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & (B-A)^{-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} + (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ \hline -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{array} \right). \end{aligned}$$

→ *Deuxième méthode* : Etant donnés  $X$  et  $Y$  deux vecteurs colonnes de  $\mathbb{C}^n$ , résolvons le système d'équations  $M \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , d'inconnues

$U$  et  $V$  où  $U$  et  $V$  sont deux vecteurs colonnes de  $\mathbb{C}^n$ . Ce système est équivalent au système  $\begin{cases} AU + AV = X \\ AU + BV = Y \end{cases}$  qui équivaut successivement aux systèmes suivants :  $\begin{cases} A(U+V) = X \\ A(U+V) + (B-A)V = Y \end{cases}$ , puis  $\begin{cases} A(U+V) = X \\ (B-A)V = Y - X \end{cases}$ , ou encore  $\begin{cases} U+V = A^{-1}X \\ V = (B-A)^{-1}(Y-X) \end{cases}$  et enfin

$$\begin{cases} U = A^{-1}X - (B-A)^{-1}(Y-X) \\ V = (B-A)^{-1}(Y-X) \end{cases}.$$

Comme le système  $M \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  est équivalent à  $M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ , on en déduit  $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}$ .

### Exercice 7.21

Si  $A$  est inversible, alors  $AB = 0$  entraîne  $B = 0$ . On a donc le sens direct. Supposons  $A$  non-inversible et notons  $r = \text{rg}(A) < n$ . Il existe  $P$  et  $Q$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PJ_rQ$ . On a alors  $AB = PJ_rQB$  et  $BA = BPJ_rQ$ . Soit  $C$  telle que  $QBP = C$ . On a alors  $AB = P(J_rC)P^{-1}$  et  $BA = Q^{-1}(CJ_r)Q$  (on effectue les changements de bases dans l'autre sens : on peut interpréter  $A$  comme la matrice d'une application linéaire  $f$  entre deux espaces vectoriels  $F$  et  $G$  munis de bases respectivement  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ ,  $B$  comme celle d'une application dans « l'autre sens »). Il suffit alors de prendre  $C$  telle que  $CJ_r = J_rC = 0$ , par exemple  $C = I_n - J_r$ .

### Exercice 7.23

- On sait que  $x \mapsto \sqrt{1+x}$  admet un dl à tout ordre en 0. Il existe un polynôme  $P_n$  de degré  $n$  tel que  $\sqrt{1+x} = P_n(x) + o(x^n)$  au voisinage de 0. En élevant au carré, on obtient (règles de calcul sur les dl),  $1+x = P_n(x)^2 + o(x^n)$ . Notons  $Q_n = 1+x - P_n^2$  - c'est un polynôme. Puisque  $Q_n(x) = x^n \varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon$  de limite nulle en 0, on en déduit que le terme de plus petit degré dans  $Q$  est au moins de degré  $n$  (sinon  $Q_n(x)/x^n$  ne serait pas de limite nulle). Ainsi  $Q$  se factorise par  $X^n$ . On a donc un polynôme  $R_n$  tel que  $1+x - P_n^2 = X^n R_n$ .
- La matrice  $N \in M_n(\mathbb{R})$  est nilpotente et son indice de nilpotence est donc au plus  $n$  - on a  $N^n = 0$ . En reportant dans la formule précédente, on a  $I_n + N - P_n(N)^2 = 0$ . Avec  $B = P_n(N)$ , on a  $B^2 = I_n + N$ .

### Exercice 7.24

On sait que l'indice de nilpotence est au maximum  $n$ . Ainsi,  $(A + \lambda_k B)^n$  est nulle pour tous les scalaires. On considère alors la matrice  $(A + xB)^n$ . Chacun de ses coefficients est un polynôme en  $x$  de degré au plus  $n$ . De plus, chacun de ces polynômes admet au moins  $n+1$  racines. Tous les polynômes sont nuls. Finalement  $(A + xB)^n$  est la matrice nulle. Pour  $x = 0$ , on retrouve  $A^n = 0$ . Pour  $x \neq 0$ , on peut factoriser par  $x$ . Cela donne  $x^n \left( \frac{1}{x} A + B \right)^n = 0$ . En posant  $y = \frac{1}{x}$ , on a  $(yA + B)^n = 0$  pour tout  $y \neq 0$ . Avec le même raisonnement,  $(yA + B)^n = 0$  tout le temps. Enfin on choisit  $y = 0$ , ce qui donne  $B^n = 0$ .

### Exercice 7.25

- voir cours
- L'application  $\Phi$  est bien une forme linéaire sur  $M_n(\mathbb{K})$ . Les espaces vectoriels  $M_n(\mathbb{K})$  et son dual sont de même dimension. L'application

$\Phi$  est linéaire. En effet, soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Pour tout  $M \in M_n(\mathbb{K})$ ,

$$\Phi(A + \lambda B)(M) = \text{tr}((A + \lambda B)M) = \text{tr}(AM) + \lambda \text{tr}(BM) = \Phi(A)(M) + \lambda \Phi(B)(M)$$

et ainsi  $\Phi(A + \lambda B) = \Phi(A) + \lambda \Phi(B)$ . On montre enfin que  $\Phi$  est injective. Si  $A \in \ker \Phi$ , alors  $\Phi(A)(A^T) = \text{tr}(AA^T) = \text{tr}(A^T A) = 0$  ce qui donne  $A = 0$ .

- On développe par rapport à la dernière colonne. On obtient  $\det C = (-1)^{n+1} \det I_{n-1} \neq 0$ . La matrice  $C$  est inversible. Si  $r = n$ , alors  $\text{tr}(J_r C) = \text{tr}(C) = 0$ . Si  $r \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ . On peut écrire  $C$  sous la forme de blocs  $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$  avec des blocs de la même taille que dans l'écriture de  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ . On a alors  $J_r C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$  et  $\text{tr}(J_r C) = \text{tr}(C_1) = 0$ . Dans tous les cas  $\text{tr}(J_r C) = 0$  (pour tout  $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ), et même pour  $r = 0$ .
- Soit  $H$  un hyperplan de  $M_n(\mathbb{K})$ . Il existe  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $M_n(\mathbb{K})$  telle que  $H = \ker \varphi$ . Il existe de plus  $A \in M_n(\mathbb{K})$  non nulle telle que  $\varphi = \Phi_A$ . Ainsi  $H = \{M \in M_n(\mathbb{K}), \text{tr}(AM) = 0\}$ . La matrice  $A$  est équivalente à une certaine matrice  $J_r$ . Il existe  $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = PJ_rQ$ . On a alors  $\text{tr}(AM) = \text{tr}(PJ_rQM) = \text{tr}(J_r(QMP))$ . Si on prend la matrice  $M$  de sorte que  $QMP = C$ , c'est-à-dire  $M = Q^{-1}CP^{-1}$ , alors  $M \in \ker \varphi = H$ , et  $M$  est inversible en tant que produit de matrices inversibles. L'hyperplan  $H$  contient bien une matrice inversible.

### Exercice 7.26

- Soit  $M \in \ker \Phi$  - on a  $M = -\frac{b}{a}M^T$ . En transposant, on a  $M^T = -\frac{b}{a}M$  et en combinant,  $M = \frac{b^2}{a^2}M$ . Si  $b^2 \neq a^2$  alors  $\Phi$  est injective (et bijective). Si  $b = a$ , l'application devient  $\Phi(M) = a(M + M^T)$  et toutes les matrices antisymétriques sont dans le noyau. Si  $b = -a$ , ce sont les matrices symétriques qui sont dans le noyau.
- On doit écrire la matrice de  $\Phi$  dans une base de  $M_n(\mathbb{R})$ . La base canonique n'est pas très intéressante. En revanche, on peut utiliser une base adaptée à  $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ . Si  $M \in S_n(\mathbb{R})$ , alors  $\Phi(M) = (a+b)M$  et si  $M \in A_n(\mathbb{R})$ , on a  $\Phi(M) = (a-b)M$ . Dans cette base la matrice de  $\Phi$  est diagonale avec  $n(n+1)/2$  termes égaux à  $a+b$  et  $n(n-1)/2$  à  $a-b$ . Finalement, on a  $\det \Phi = (a+b)^{n(n+1)/2} (a-b)^{n(n-1)/2}$  et  $\text{tr} \Phi = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b) = an^2 + nb$ .

### Exercice 7.27

- Supposons  $u$  échangeur. Comme  $u$  est un automorphisme,  $\dim u(F) = \dim F \leq \dim G \leq \dim u(G) = \dim G \leq \dim F$ , donc  $\dim F = \dim G = p$  où  $p = \dim E/2$ . Dans une base  $e$  adaptée à la décomposition en somme directe  $F \oplus G = E$ , la matrice de  $u$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$  avec  $A$  et  $B$  dans  $GL_p(\mathbb{C})$ . Soient  $v$  et  $w$  les endomorphismes de  $E$  dont les matrices dans la base  $e$  sont respectivement  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $u = v + w$ ,  $v^2 = 0$ ,  $w^2 = 0$ .
- Supposons réciproquement que  $u = v + w$  avec  $v^2 = 0$  et  $w^2 = 0$ . Posons  $G = v(E)$  et  $F = w(E)$ . Montrons que  $E = F \oplus G$ ,  $u(F) \subset G$  et  $u(G) \subset F$ . Soit  $x \in F \cap G$ . Alors  $x$  s'écrit  $x = v(t) = w(z)$  avec  $t, z \in E$ . On a  $u(x) = (v+w)(x) = v^2(t) + w^2(z) = 0$ . Comme  $u$  est injective,  $x = 0$ ; la somme est directe. Soit  $x \in E$ . Alors, comme  $u$  est surjective,  $x$  s'écrit  $x = u(y) = v(y) + w(y)$  avec  $y \in E$ , ce qui montre que  $E = F + G$ , et finalement  $F \oplus G = E$ . Soit  $x \in F$ . Alors  $x$  s'écrit  $x = w(y)$  avec  $y \in E$ , et  $u(x) = (v+w)(w(y)) = v(w(y)) \in G$ . On a l'inclusion  $u(F) \subset G$  et, de manière analogue,  $u(G) \subset F$ . L'endomorphisme  $u$  est échangeur.

### Exercice 7.28

- Pour que la question ait un sens, on remarque que  $X$  est un vecteur colonne de taille  $p$  et  $Y$  de taille  $n-p$ . De plus  $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{n-p,p}(\mathbb{R})$  et  $D \in M_{n-p}(\mathbb{R})$ . Les deux noyaux sont bien des espaces vectoriels. On vérifie que  $\Phi$  est bien définie : on a

$$M \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AX + BY = 0 \\ CX + DY = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -A^{-1}BY \\ DY = CA^{-1}BY \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -A^{-1}BY \\ (D - CA^{-1}B)Y = 0 \end{cases}$$

Si  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  est dans  $\ker M$ , alors  $Y$  est dans  $\ker(D - CA^{-1}B)$ . On montre alors que  $\Phi$  est bijective. Si  $Y \in \ker(D - CA^{-1}B)$  alors le vecteur  $\begin{pmatrix} -A^{-1}BY \\ Y \end{pmatrix}$  est l'unique vecteur de  $\ker M$  dont l'image est  $Y$ .

- La matrice  $D - CA^{-1}B$  est une matrice carrée de taille  $n-p$ . Par le théorème du rang, on a  $n = \text{rg}(M) + \dim \ker M$ . Ainsi  $\text{rg} M = p$  si et seulement si  $\dim \ker M = n-p = \dim(D - CA^{-1}B)$  donc si et seulement si cette matrice est nulle.
- On que  $V$  contient une matrice  $M$  de rang  $p$ . Elle est équivalente à la matrice  $J_p$  donnée dans l'énoncé : il existe  $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$  telles que  $J_r = PMQ$ . On considère alors l'endomorphisme bijectif de  $M_n(\mathbb{R}) : \theta : N \mapsto PNQ$ . On se place alors dans l'espace vectoriel  $V' = \theta(V)$ , de même dimension que  $V$ . La matrice  $J_p$  est dans  $V'$ . On peut donc (en se ramenant à  $V'$ ) supposer que  $J_p$  est dans  $V$ .
- Soit  $C$  une matrice de l'intersection. La matrice  $H$  est dans  $V$ , ainsi que la matrice  $J_p$  donc  $J_p + C$  est dans  $V$ . Or cette matrice est de rang au moins  $p$  (les  $p$  premières colonnes sont linéairement indépendantes) et au plus  $p$  par définition de  $p$ . Elle est donc exactement de rang  $p$ . D'après la question 2, cela signifie que  $A = B^T(I_p)^{-1}B = B^T B$ . Puisque  $V$  est un sous-espace vectoriel, la matrice  $-J_p$  est aussi dans  $V$  et

$-J_p + C$  également. Cela donne cette fois  $A = -B^T B$ . Ainsi  $B^T B = 0$ . On montre que cela signifie que  $B = 0$ . On a  $\text{tr}(B^T B) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n-p} b_{ij}^2 = 0$ .

La matrice  $B$  est nulle, la matrice  $A$  également donc  $C = 0$ . L'intersection est bien réduite à 0

5. L'application  $(A, B) \in M_{n-p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}$  est linéaire et bijective. On en déduit que  $\dim W = \dim M_{n-p}(\mathbb{R}) \times \dim \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{R}) = (n-p)^2 + p(n-p) = n(n-p)$ . Puisque la somme  $V + W$  est directe, on a  $\dim V + \dim W \leq n^2$  donc  $\dim V \leq n^2 - n(n-p) = np$ .