

CHAPITRE 8 - SUITES DE FONCTIONS

Exercice 8.3

1. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $f_n(0)$ converge vers 0. Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n x}{n 2^n x^2} = \frac{1}{n x}$ d'où convergence simple vers 0. La suite de fonction converge simplement vers 0 sur \mathbb{R} .

2. On a une primitive presque immédiate de f_n :

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \left[\frac{1}{2n} \ln(1 + n 2^n x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2n} \ln(1 + n 2^n).$$

Puisque $n 2^n$ est de limite infinie, on a $\int_0^1 f_n(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n 2^n)}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n \ln 2}{2n}$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{\ln 2}{2}$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$ sinon, par permutation limite-intégrale, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0$.

3. On peut bien évidemment étudier la fonction pour obtenir ses variations et obtenir $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$. Plus simplement, pour $x \geq a$, on majore $0 \leq f_n(x) \leq \frac{2^n x}{n 2^n x^2} = \frac{1}{n x} \leq \frac{1}{n a}$. Cela donne une majoration uniforme de $|f_n|$ sur $[a, +\infty[$ par un terme qui tend vers 0. La convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.

Exercice 8.5

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sin x$.

2. On étudie la différence (avec $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$) :

$$\left| \sin\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \sin x \right| = 2 \left| \sin \frac{x}{2n} \sin\left(\frac{2n+1}{2n}x\right) \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x}{2n} \right| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{A}{n}$$

On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis ($\sin a - \sin b \leq |a - b|$). On a donc $\|f_n - f\|_{\infty, [-A, A]} \leq \frac{A}{n}$ de limite nulle. La convergence est bien uniforme sur les segments $[-A, A]$ (et donc sur tous les compacts de \mathbb{R} qui sont tous contenus dans un tel segment).

3. On cherche x_n tel que $\|f_n - f\|_{\infty} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$ soit minoré/tend vers autre chose que 0. On a, avec $x_n = n \frac{\pi}{2}$,

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin n \frac{\pi}{2} \right| = 1.$$

Exercice 8.6

1. On a

$$g'_n(t) = e^t \left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - \frac{n}{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \right) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n} - 1\right) = -\frac{t}{n} e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}.$$

Puisque $t \in [0, 1]$, on a facilement $|g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$. On utilise l'inégalité des accroissements finis sur $[0, t]$. La dérivée g'_n est majorée en valeur absolue sur $[0, t]$ par $\frac{e^t}{n}$, si bien qu'on a $|g_n(0) - g_n(t)| \leq t \frac{e^t}{n}$. En multipliant par e^{-t} , on obtient $|e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n| \leq \frac{t}{n}$.

2. On commence par l'existence de $I_n(x)$: la fonction $t \mapsto t^x (1 - \frac{t}{n})^n$. Cette fonction est continue sur $]0, 1]$ et est équivalente en 0 à t^x , intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > -1$. les fonctions I_n sont définies sur $] -1, +\infty[$. On s'intéresse directement à la différence avec la fonction limite attendue : on note $I(x) = \int_0^1 t^x e^{-t} dt$. Pour les mêmes raisons, cette fonction est définie sur $] -1, +\infty[$. Plutôt que de justifier la convergence simple de la suite de fonctions vers I en utilisant le théorème de convergence dominée, on évalue directement la différence (la question précédente permet de l'évaluer facilement) :

$$|I_n(x) - I(x)| \leq \int_0^1 t^x \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - e^{-t} \right| dt \leq \frac{1}{n} \int_0^1 t^{x+1} dt = \frac{1}{n(x+2)}.$$

D'une part, à x fixé, on a bien une différence de limite nulle, d'où la convergence simple de (I_n) vers I sur $] -1, +\infty[$, d'autre part, pour tout $x > -1$, on a également $x+2 > 1$ d'où $|I_n(x) - I(x)| \leq \frac{1}{n}$. On a donc convergence uniforme de (I_n) vers I sur $] -1, +\infty[$.

Exercice 8.7

1. Soit $x, y \in [a, b]$. On a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite (simple), on obtient $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ et f est bien K -lipschitzienne.

2. On va contrôler la convergence en un nombre fini de points et utiliser le caractère lipschitzien pour les autres. On se donne $\varepsilon > 0$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{3}$. On note $x_i = a + i \frac{b-a}{N}$. Pour chaque $i \in \llbracket 0; N \rrbracket$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$. On note $N' = \max(n_i)$. Pour tous les points x_i de $[a, b]$, si $n \geq N'$, on a $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x \in [a, b]$. Il existe $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que

$x \in [x_i, x_{i+1}]$. On a alors

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leq 2K(x - x_i) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque $|x - x_i| \leq |x_{i+1} - x_i| = \frac{b-a}{N}$, on a $K(x - x_i) \leq K \frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{3}$. On obtient finalement $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, et ce, pour tout $x \in [a, b]$. La convergence est donc uniforme.

Exercice 8.8

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, si $y \geq A$ alors $|f(y)| < \varepsilon$ et il existe α tel que, si $0 \leq y \leq \alpha$ alors $|f(y)| < \varepsilon$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \alpha$ et $n \geq A$. De plus f est bornée sur $[a, A]$ car continue. Finalement f est bornée sur \mathbb{R}_+ . On note M tel que $|f| \leq M$. Pour $n \geq n_0$ et $x \geq 1$, on a $|g_n(x)| \leq M|f(nx)|$. Or $nx \geq n \geq n_0$, donc $|g_n(x)| \leq M\varepsilon$. De même si $x \leq 1$, on a $|g_n(x)| \leq M|f(\frac{x}{n})|$ et $\frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} < \alpha$, ce qui donne de nouveau $|g_n(x)| \leq M\varepsilon$. Pour $n \geq n_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $|g_n(x)| \leq M\varepsilon$. La suite converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 8.9

On fixe $N + 1$ points x_0, x_1, \dots, x_N distincts de $[a, b]$ et on considère les polynômes d'interpolation de Lagrange en ces points qu'on note L_0, L_1, \dots, L_N . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = \sum_{i=0}^N P_n(x_i)L_i$. Soit $x \in [a, b]$. On a $P_n(x) = \sum_{i=0}^N P_n(x_i)L_i(x)$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \sum_{i=0}^N f(x_i)L_i(x)$. Ainsi la suite P_n converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto \sum_{i=0}^N f(x_i)L_i(x)$. Par unicité de la limite $f = g$, ce qui donne f polynomiale de degré au plus N . De plus

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sum_{i=0}^N |f(x_i) - P_n(x_i)|L_i(x).$$

En notant $\ell_i = \|L_i\|_{\infty, [a, b]}$, on a $|f(x) - P_n(x)| \leq \sum_{i=0}^N \ell_i |f(x_i) - P_n(x_i)|$, indépendant de x , si bien que $\|f - P_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \sum_{i=0}^N \ell_i |f(x_i) - P_n(x_i)|$, de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. La convergence est donc uniforme sur $[a, b]$.