CHAPITRE 9 - MATRICES

Exercice 9.1

→ On peut calculer les premières puissances et trouver une relation de récurrence. On peut aussi décomposer A sous la forme $A = I_3 + B$ et on constante que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$. Pour $n \geqslant 2$, on a alors

$$(I_3 + B)^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la formule est valable pour $n = 0$ et $n = 1$. Finalement on a A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

→ On peut inverser cette matrice (par les moyens usuels). On peut imaginer que la formule est encore vraie pour $n = -m$ où $m \in \mathbb{N}$. On pose $B_{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-n(-n-1)}{2} & 1 & -n \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on effectue le produit AB_{-n} pour constater qu'il vaut I_3. Ainsi $A^{-n} = B_{-n}$ si $n \in \mathbb{N}$ et l'expression est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9.2

Soit (X, Y) une solution. On a alors le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{tr}(X) & = & n + \operatorname{tr}(Y)\operatorname{tr}(A) \\ \operatorname{tr}(Y) & = & n + \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(B) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{tr}(X) - \operatorname{tr}(Y)\operatorname{tr}(A) & = & n \\ -\operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(Y) & = & n \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système est $1 - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) \neq 0$. Il admet donc une unique solution $\operatorname{tr}(X) = n\frac{1+\operatorname{tr}(A)}{1-\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}$ et $\operatorname{tr}(Y) = n\frac{1+\operatorname{tr}(B)}{1-\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}$. On obtient alors

$$X = I_n + n\frac{1+\operatorname{tr}(B)}{1-\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}A \text{ et } Y = I_n + n\frac{1+\operatorname{tr}(A)}{1-\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}B.$$

On vérifie ensuite que ces matrices conviennent.

Exercice 9.3

1. Si A est de rang 1, alors ses colonnes sont toutes proportionnelles à un même vecteur V non nul de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $A = \begin{pmatrix} u_1 V & u_2 V & \cdots & u_n V \end{pmatrix}$. On note U le vecteur colonne ${}^t(u_1, \ldots, u_n)$ et on a $A = U\,{}^tV$. Réciproquement si $A = U\,{}^tV$, on a $\operatorname{rg}(A) \leqslant \operatorname{rg}(V) = 1$. Le terme général de A est $a_{ij} = u_i v_j$. L'un de ces termes au moins est non nul puisque U et V sont des vecteurs non nuls.
2. (a) On a $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = {}^tUV$ - en fait on identifie la matrice ${}^tUV$ de taille $(1,1)$ à son seul coefficient. On a ainsi $A^2 = U^t(V)U^tV = U(\operatorname{tr}(A)^tV) = \operatorname{tr}(A)A$. Par récurrence, on a $A^k = (\operatorname{tr} A)^{k-1}A$ si $k \in \mathbb{N}^*$ et $A^0 = I_n$.
   (b) On sait qu'on obtient un hyperplan. On résout $AX = 0 = U({}^tVX)$. En écrivant ce système, on obtient plusieurs fois une équation proportionnelle à $VX = 0$. Le noyau de A est l'hyperplan d'équation $VX = 0$.
3. On a $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$, donc $(AB - BA)^2 = 0$.

Exercice 9.5

1. Un vecteur directeur de D est $(1,2,3)$. Ce vecteur n'est pas dans le plan H donc les deux espaces sont supplémentaires (tout vecteur en dehors d'un hyperplan définit un supplémentaire).
2. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $v = (x', y', z')$ sont image. On a $v = p(u)$ si et seulement si $v \in H$ et $v - u \in D$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $v - u = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$ et $v \in H$. On a donc $x' = x + \lambda$, $y' = y + 2\lambda$, $z' = z + 3\lambda$ et $(x + y + z) + 6\lambda = 0$. Cela donne $\lambda = -\frac{1}{6}(x + y + z)$ et enfin

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \frac{5x - y - z}{6} \\ y' & = & \frac{-2x + 4y - 2z}{6} \\ z' & = & \frac{-3x - 3y + 3z}{6} \end{array}\right.$$

cela se récrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

et on obtient ainsi la matrice de la projection.

Exercice 9.6

Supposons qu'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. On note i_0 l'indice tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, i \in [\![1\,;n]\!]\}$. On a $|x_{i_0}| > 0$ puisque $X \neq 0$. On écrit la ligne i_0 :

$$a_{i_0,i_0}x_{i_0} + \sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j = 0,$$

soit $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum\limits_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j$. On obtient alors

$$\left|a_{i_0,i_0}x_{i_0}\right| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|.$$

Puisque $x_{i_0} \neq 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum\limits_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$, d'où une contradiction.

Exercice 9.8

Il existe deux matrices inversibles P et Q de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PJ_rQ$ où J_r est diagonale avec r termes égaux à 1 au début, puis des 0. Ccela s'écrit $J_r = \sum\limits_{i=1}^{r} E_{ii}$. Alors

$$A = \sum_{i=1}^{r} PE_{ii}Q.$$

Puisque P et Q sont inversibles, on a $\operatorname{rg}(PE_{ii}Q) = \operatorname{rg}(E_{ii}) = 1$. Ainsi A est somme de matrices de rang 1.

Exercice 9.9

Le déterminant vaut $\det(A).\det(C) \neq 0$. La matrice est inversible. On cherche l'inverse sous la forme

$$N = \begin{pmatrix} A^{-1} & D \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le produit donne

$$MN = \begin{pmatrix} I_n & AD + BC^{-1} \\ 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

Il suffit de prendre $D = -A^{-1}BC^{-1}$ pour obtenir l'inverse.

Exercice 9.10

1. Le plus simple est de passer par un produit matriciel. Soit r le rang de C et P,Q deux matrices de $GL_(\mathbb{K})$ telles que $PCQ = J_r$. On considère la matrice diagonale par blocs $\tilde{P} = \operatorname{diag}(I_n, P)$ et $\tilde{Q} = \operatorname{diag}(I_n, Q)$. Elles sont toutes les deux inversibles et $\tilde{P}\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_n & B' \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$ est de rang $n + r$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -A & I_n \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible et $M.N = \begin{pmatrix} I_p - AB & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. Cela donne (on ne change pas le rang en multipliant par une matrice inversible) en utilisant la question précédente (à moduler), $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(I_p - BA) + n$. En multipliant à droite par $\begin{pmatrix} I_p & -B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ A & I_n - AB \end{pmatrix}$ et de même $\operatorname{rg} M = p + \operatorname{rg}(I_n - AB)$.
   Si $\operatorname{rg}(I_n - AB) = n - p$, alors $\operatorname{rg}(I_p - BA) = 0$ donc $BA = I_p$.

Exercice 9.11

1. Les colonnes sont toutes proportionnelles donc A est de rang au plus 1. Puisque les coefficients ne sont pas tous nuls, A est de rang A.
2. On effectue le calcul de A^2 et on obtient $A^2 = (a_1 + \ldots + a_n)A$ (ce qui est général car lorsque A est de rang 1, on a $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$). La matrice est donc la matrice d'un projecteur si et seulement si $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$.
3. On note s la trace de A. On calcule le déterminant de B en sommant toutes les lignes dans la première. On peut alors factoriser par $2(a_1 + \ldots + a_n) - s = s$ et obtenir une première ligne de 1. On effectue alors les opérations $L_i \leftarrow L_i - a_iL_1$ pour i allant de 2 à n. Il reste alors un déterminant

$$s.\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -s \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}s^n$$

   LA matrice est inversible si et seulement si $s = \operatorname{tr} A \neq 0$.

4. On a $B^2 = 4A^2 - 4\mathrm{tr}(A)A + \mathrm{tr}(A)^2 I_n = 4sA - 4sA + s^2 I_n = s^2 I_n$. Dans le cas où s est non nul, on a $B^{-1} = \frac{1}{s^2}B$.

Exercice 9.12

1. On vérifie rapidement que si M et N sont da,s $C(J)$ alors $M+\lambda N$ également (et aussi MN) donc $C(J)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ (et même une sous-algèbre). On prend une matrice M avec 9 coefficients quelconques, on calcule les produits MJ et JM et on a égalité si et seulement si il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
$$M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = aI_3 + bJ + cJ^2.$$
La famille (I_3, J, J^2) est une base de $C(J)$.
2. Si $Y^2 = J$ alors $YJ = Y^3 = JY$ donc $D(J) \subset C(J)$. On cherche donc les éléments de $D(J)$ sous la forme $Y = aI + bJ + cJ^2$. En utilisant la relation $J^2 = I_3$, on a
$$Y^2 = (a^2+2bc)I + (2ab+c^2)J + (b^2+2ac)J^2$$
donc $Y^2 = J$ si et seulement si $a^2+2bc = 0, b^2+2ac = 0$ et $c^2+2ab = 1$. En multipliant la première équation par a et la seconde par b, on obtient $a^3 = b^3$ donc $a = b$. Si $a = b = 0$, il reste $c^2 = 1$ d'où $M = \pm J^2$. Sinon, on a $a = b$, $a+2c = 0$ et $c^2+2a^2 = 1$ donc $a = b = -2c$ et $9c^2 = 1$. Cela donne $M = \pm\frac{1}{3}(2I_3 + 2J - J^2)$. Si on écrit bien la résolution des systèmes, le raisonnement est fait par équivalence. Sinon, on peut se contenter de vérifier que les 4 matrices obtenues conviennent.

Exercice 9.14

Le but est de construire une base de vecteurs $(e_1, \ldots, e_{3n})$ de E telle que $f(e_i) = e_{n+i}$, $f(e_{n+i}) = e_{2n+i}$ et $f(e_{2n+i}) = 0$ pour $i \in [\![1;n]\!]$. On doit tout d'abord étudier les dimensions des différentes espaces entrant en jeu.

→ On a $f \circ f^2 = 0$, donc $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \ker f$. De même $f^2 \circ f = 0$ donne $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f^2$. On sait que $\dim \mathrm{Im}\, f = 2n$ par hypothèse et $\dim\ker f = n$ par le théorème du rang. On en déduit notamment $\dim\ker f^2 \geqslant 2n$ et $\dim \mathrm{Im}\, f^2 \leqslant n$. Le théorème du rang appliqué à f^2 ne donne rien de plus.

→ On a besoin des égalités. On peut par exemple montrer que $\dim\ker f^2 \leqslant 2\dim\ker f$ (cas particulier de $\dim\ker(g\circ f) \leqslant \dim\ker f + \dim\ker g$ - dans cette situation, on peut considérer g la restriction de f à $\ker f^2$ et appliquer le théorème du rang, en montrant que $\mathrm{Im}\, g \subset \ker f$). Cela donne $\dim\ker f^2 \leqslant 2n$. Finalement on a $\ker f^2 = \mathrm{Im}\, f$ de dimension commune $2n$ et $\mathrm{Im}\, f^2 = \ker f$ de dimension n.

→ On doit construire la famille de vecteurs. On a plusieurs possibilités. En voici une. On commence par choisir une base de $\ker f$: elle comporte n vecteurs qu'on note $e_{2n+1}, \ldots, e_{3n}$. Puisque $\mathrm{Im}\, f^2 = \ker f$, chacun de ces vecteurs est dans $\mathrm{Im}\, f^2$. Il existe des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que $f^2(e_i) = e_{2n+i}$ pour $i \in [\![1;n]\!]$. On pose alors $e_{n+1} = f(e_1), \ldots, e_{2n} = f(e_n)$. En utilisant la définition des n premiers e_k, on a $f(e_{n+k}) = f^2(e_k) = e_{2n+k}$ (toujours avec $1 \leqslant k \leqslant n$). Si on prouve que la famille de vecteurs est libre, on aura une base. Dans cette base, la matrice de f sera exactement celle qu'on attend (tout est fait pour).

→ Considérons une combinaison linéaire
$$(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) + (\lambda_{n+1}e_{n+1} + \ldots + \lambda_{2n}e_{2n}) + (\lambda_{2n+1}e_{2n+1} + \ldots + \lambda_{3n}e_{3n}) = 0.$$
On peut la récrire
$$(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) + \big(\lambda_{n+1}f(e_1) + \ldots + \lambda_{2n}f(e_n)\big) + \Big(\lambda_{2n+1}f^2(e_1 + \ldots + \lambda_{3n}f^2(e_n)\Big) = 0.$$
On applique f^2, il vient $\lambda_1 e_{2n+1} + \ldots + \lambda_n e_{3n} = 0$. Puisque la famille est une base de $\ker f$, chaque scalaire est nul. On reprend la première relation avec ces coefficients nuls. On applique f et on obtient de même $\lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{2n} = 0$. Enfin les termes restants donnent la valeur 0 pour les n derniers scalaires.

Exercice 9.15

1. Soit α et β deux réels tels que $\alpha a + \beta f(a) = 0$. En appliquant f, on obtient $\alpha f(a) - \beta a = 0$ Alors $\alpha(\alpha a + \beta f(a)) - \beta(\alpha f(a) - \beta a) = (\alpha^2+\beta^2)a = 0$, et puisque $a \neq 0$, on en déduit $\alpha^2+\beta^2 = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$. Le système $(a, f(a))$ est donc libre.
2. Si $f^2 = -\mathrm{Id}$, on a $\det f^2 = (\det f)^2 = (-1)^n$, ce qui n'est possible que si n est pair.
3. Soit $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, et soit $(a_1, \ldots, a_k)$ dans E^k tels que la somme $F_k = F(a_1) + \cdots + F(a_k)$ soit directe. Montrons la propriété suivante : Si a_{k+1} n'appartient pas à F_k, alors la somme $F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_{k+1})$ est directe.
Montrons que $F(a_{k+1}) \cap F_k = \{0\}$. Soit x dans $F(a_{k+1}) \cap F_k$. Il existe deux réels λ et μ tels que $x = \lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})$. Comme F_k est stable par f, on a $f(x) = f(\lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})) = \lambda f(a_{k+1}) - \mu a_{k+1} \in F_k$, puis $\lambda(\lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})) - \mu(\lambda f(a_{k+1}) - \mu a_{k+1}) = (\lambda^2+\mu^2)a_{k+1} \in F_k$. Mais puisque a_{k+1} n'est pas dans F_k cela implique $\lambda = \mu = 0$. Il en résulte que $F(a_{k+1}) \cap F_k = \{0\}$. La somme $F(a_{k+1}) + F_k$ est donc directe, d'où l'on déduit que la somme $F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_{k+1})$ est directe. Alors $\dim(F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_{k+1})) = 2k+2$. En partant de $F(a_1)$ où $a_1 \neq 0$, on construit ainsi une suite de sous-espaces $F(a_1), \ldots, F(a_p)$ tels que $\dim(F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_p)) = 2p$. Alors $F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_k) \oplus F(a_p) = E$, ce qui donne le résultat.

4. Notons $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans la base $(a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_p, f(a_p))$, l'application f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} J & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.16

On note respectivement A et B ces matrices.

→ Lorsque $a = b = 0$, elles sont bien évidemment semblables.
→ Lorsque $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou le contraire), on a $A = I_2$. La seule matrice semblable à I_2 est I_2. Elles ne sont pas semblables.
→ On suppose que $ab \neq 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A, dans la base (e_1, e_2). On a $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2 + ae_1$. Considérons la base (e'_1, e_2) avec $e'_1 = \lambda e_1$. On a toujours $f(e'_1) = e'_1$, et $f(e_2) = e_2 + \frac{a}{\lambda} e'_1$. On choisit $\lambda = a/b$, alors la matrice de f dans la nouvelle base est B.

Exercice 9.17

Dans ce type d'exercice où A et B sont deux matrices quelconques vérifiant une même propriété, on essaie de montrer qu'une telle matrice est semblable à une matrice fixe de référence (et ainsi A et B seront semblables par transitivité). On ne travaille que sur A ou sur f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On cherche une base dans laquelle la matrice de f est simple.

→ On a $f^2 = 0$ donc $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. Par le théorème du rang, on a $\dim\ker f + \operatorname{rg} f = 3$. On a $1 \leqslant \operatorname{rg} f \leqslant \dim\ker f$. Cela ne laisse qu'une possibilité : $\dim\ker f = 2$ et $\operatorname{rg} f = 1$ (avec $\operatorname{Im} f \subset \ker f$). Soit e_2 un vecteur format une base de $\operatorname{Im} f$ et e_1 tel que $f(e_1) = e_2$. Puisque e_2 est dans $\ker f$, on peut lui adjoindre un vecteur e_3 tel que (e_2, e_3) est une base de $\ker f$.
→ Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit une combinaison $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. On applique f, ce qui donne $\alpha f(e_1) = \alpha e_2 = 0$, donc $\alpha = 0$. Il reste alors $\beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, et $\beta = \gamma = 0$ puisque (e_2, e_3) est libre.
→ Dans la base (e_1, e_2, e_3), la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Toutes les matrices avec les propriétés de l'enoncé sont semblables à cette dernière matrice.

Exercice 9.18

1. $\mathscr{U}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{L}(E,F)$ qui contient l'application linéaire nulle. Si $f, g \in \mathscr{U}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $x \in G$, $f(x) = g(x) = 0$ et $(f + \lambda g)(x) = 0$ donc $f + \lambda g \in \mathscr{U}$. On en déduit que $\mathscr{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.
2. On note $p = \dim E$, $q = \dim F$ et $r = \dim G$.
   → Une fois fixée une base $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F, on a une bijection entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $M_{qp}(\mathbb{K})$. On fixe une base de E commençant par r vecteurs formant une base de G et une base quelconque de F. On montre alors que $f \in \mathscr{U}$ si et seulement si la matrice $M(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})$ a ses r premières colonnes nulles (f est nulle sur G si et seulement si f est nulle sur une base de G). On en déduit que $\mathscr{U}$ est en bijection avec les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & B \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$ où B est une matrice quelconque de $M_{q,p-r}(\mathbb{K})$. Finalement $\dim \mathscr{U} = q(p-r)$.
   → L'applcation est bien définie, linéaire. Elle est bijective puisque u est entièrement déterminée par sa restriction à deux sous-espaces supplémentaires, ici G (sur lequel u est nulle) et H). On en déduit que $\dim \mathscr{U} = q(p-r)$.

Exercice 9.19

1. On effectue les calculs et on trouve que $(AB)^2 = AB$. On a $\det(AB) = 0$ et les deux premières colonnes de AB ne sont pas colinéaires donc $\operatorname{rg}(AB) = 2$.
2. On a $(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = BABA$. Si on note $C = BA$, on a $C^3 = C^2$. La matrice C est dans $M_2(\mathbb{R})$. On va justifier que C est inversible et ainsi $C^3 = C^2$ donnera $C = I_2$. On a $\operatorname{rg}(ABAB) = \operatorname{rg}(AB) = 2$ et $\operatorname{rg}(ABAB) = \operatorname{rg}(ACB) \leqslant \operatorname{rg}(C)$. Ainsi $\operatorname{rg}(C) \geqslant 2$. Finalement $\operatorname{rg}(C) = 2$ et C est inversbile.

Exercice 9.20

1. Par manipulation sur les lignes et les colonnes de M, on trouve :
$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right).$$
On en déduit que $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(B-A)$.
2. Puisque $\operatorname{rg} A \leq n$ et $\operatorname{rg}(B-A) \leq n$, on a $\operatorname{rg} M = 2n$ si et seulement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(B-A) = n$. Il en résulte que la matrice M est inversible si et seulement si A et $B-A$ sont inversibles. Supposons que les matrices A et $A-B$ sont inversibles et déterminons l'inverse de la matrice M. On vous propose deux méthodes pour déterminer l'inverse de M.

→ *Première méthode :* les manipulations précédentes peuvent être traduites en termes de produits par des matrices inversibles :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right).$$

En s'inspirant de la matrice $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on a $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$. On a donc

$$\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)^{-1}\\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & (B-A)^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right)\\ &= \left(\begin{array}{c|c} A^{-1}+(B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ \hline -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{array}\right).\end{aligned}$$

→ *Deuxième méthode :* Etant donnés X et Y deux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^n$, résolvons le système d'équations $M\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$, d'inconnues U et V où U et V sont deux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^n$. Ce système est équivalent au système $\begin{cases} AU+AV=X\\ AU+BV=Y\end{cases}$ qui équivaut successivement aux systèmes suivants : $\begin{cases} A(U+V)=X\\ A(U+V)+(B-A)V=Y\end{cases}$, puis $\begin{cases} A(U+V)=X\\ (B-A)V=Y-X\end{cases}$, ou encore $\begin{cases} U+V=A^{-1}X\\ V=(B-A)^{-1}(Y-X)\end{cases}$ et enfin

$$\begin{cases} U=A^{-1}X-(B-A)^{-1}(Y-X)\\ V=(B-A)^{-1}(Y-X)\end{cases}.$$

Comme le système $M\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ est équivalent à $M^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$, on en déduit $M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}+(B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1}\\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1}\end{pmatrix}$.

Exercice 9.21

Si A est inversible, alors $AB=0$ entraîne $B=0$. On a donc le sens direct. Supposons A non-inversible et notons $r=\mathrm{rg}\,(A)<n$. Il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A=PJ_rQ$. On a alors $AB=PJ_rQB$ et $BA=BPJ_rQ$. Soit C telle que $QBP=C$. On a alors $AB=P(J_rC)P^{-1}$ et $BA=Q^{-1}(CJ_r)Q$ (on effectue les changements de bases dans l'autre sens : on peut interpréter A comme la matrice d'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels F et G munis de bases respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, B comme celle d'une application dans « l'autre sens »). Il suffit alors de prendre C telle que $CJ_r=J_rC=0$, par exemple $C=I_n-J_r$.

Exercice 9.23

1. On sait que $x\mapsto\sqrt{1+x}$ admet un dl à tout ordre en 0. Il existe un polynôme P_n de degré n tel que $\sqrt{1+x}=P_n(x)+\mathrm{o}(x^n)$ au voisinage de 0. En élevant au carré, on obtient (règles de calcul sur les dl), $1+x=P_n(x)^2+\mathrm{o}(x^n)$. Notons $Q_n=1+X-P_n^2$ - c'est un polynôme. Puisque $Q_n(x)=x^n\varepsilon(x)$ avec ε de limite nulle en 0, on en déduit que le terme de plus petit degré dans Q est au moins de degré n (sinon $Q_n(x)/x^n$ ne serait pas de limite nulle). Ainsi Q se factorise par X^n. On a donc un polynôme R_n tel que $1+X-P_n^2=X^nR_n$.
2. La matrice $N\in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente et son indice de nilpotence est donc au plus n - on a $N^n=0$. En reportant dans la formule précédente, on a $I_n+N-P_n(N)^2=0$. Avec $B=P_n(N)$, on a $B^2=I_n+N$.

Exercice 9.24

On sait que l'indice de nilpotence est au maximum n. Ainsi, $(A+\lambda_kB)^n$ est nulle pour tous les scalaires. On considère alors la matrice $(A+xB)^n$. Chacun de ses coefficients est un polynôme en x de degré au plus n. De plus, chacun de ces polynômes admet au moins $n+1$ racines. Tous les polynômes sont nuls. Finalement $(A+xB)^n$ est la matrice nulle. Pour $x=0$, on retrouve $A^n=0$. Pour $x\neq0$, on peut factoriser pas x. Cela donne $x^n\left(\frac{1}{x}A+B\right)^n=0$. En posant $y=\frac{1}{x}$, on a $(yA+B)^n=0$ pour tout $y\neq0$. Avec le même raisonnement, $(yA+B)^n=0$ tout le temps. Enfin on choisit $y=0$, ce qui donne $B^n=0$.

Exercice 9.26

→ Soit $M\in\ker\Phi$ - on a $M=-\frac{b}{a}{}^tM$. En transposant, on a ${}^tM=-\frac{b}{a}M$ et en combinant, $M=\frac{b^2}{a^2}M$. Si $b^2\neq a^2$ alors Φ est injective (et bijective). Si $b=a$, l'application devient $\Phi(M)=a(M+{}^tM)$ et toutes les matrices antisymétriques sont dans le noyau. Si $b=-a$, ce sont les matrices symétriques qui sont dans le noyau.

→ On doit écrire la matrice de Φ dans une base de $M_n(\mathbb{R})$. La base canonique n'est pas très intéressante. En revanche, on peut utiliser une base adaptée à $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\Phi(M) = (a+b)M$ et si $M \in A_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi(M) = (a-b)M$. Dans cette base la matrice de Φ est diagonale avec $n(n+1)/2$ termes égaux à $a+b$ et $n(n-1)/2$ à $a-b$. Finalement, on a $\det\Phi = (a+b)^{n(n+1)/2}(a-b)^{n(n-1)/2}$ et $\operatorname{tr}\Phi = \dfrac{n(n+1)}{2}(a+b) + \dfrac{n(n-1)}{2}(a-b) = an^2 + nb$.

Exercice 9.27

→ Supposons u échangeur. Comme u est un automorphisme, $\dim u(F) = \dim F \leqslant \dim G$ $\dim u(G) = \dim G \leqslant \dim F$, donc $\dim F = \dim G = p$ où $p = \dim E/2$. Dans une base e adaptée à la décomposition en somme directe $F \oplus G = E$, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$ avec A et B dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$. Soient v et w les endomorphismes de E dont les matrices dans la base e sont respectivement $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $u = v + w$, $v^2 = 0, w^2 = 0$.

→ Supposons réciproquement que $u = v + w$ avec $v^2 = 0$ et $w^2 = 0$. Posons $G = v(E)$ et $F = w(E)$. Montrons que $E = F \oplus G, u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. Soit $x \in F \cap G$. Alors x s'écrit $x = v(t) = w(z)$ avec $t, z \in E$. On a $u(x) = (v+w)(x) = v^2(t) + w^2(z) = 0$. Comme u est injective, $x = 0$; la somme est directe. Soit $x \in E$. Alors, comme u est surjective, x s'écrit $x = u(y) = v(y) + w(y)$ avec $y \in E$, ce qui montre que $E = F + G$, et finalement $F \oplus G = E$. Soit $x \in F$. Alors x s'écrit $x = w(y)$ avec $y \in E$, et $u(x) = (v+w)(w(y)) = v(w(y)) \in G$. On a l'inclusion $u(F) \subset G$ et, de manière analogue, $u(G) \subset F$. L'endomorphisme u est échangeur.