

CHAPITRE 9 - CONVERGENCE DOMINÉE INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Exercice 9.3

- On note $f_n(t) = \frac{1}{1+t^{n+1}}$. On montre que f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$ dès que $n \geq 1$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f nulle sur $]1, +\infty[$ et valant $\frac{1}{2}$ en 1. La fonction f est bien continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 1$, on a $|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = f_1(t)$ et f_1 est intégrable sur $[1, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée s'applique et a_n tend vers 0.
- On effectue le changement de variable « $u = t^{n+1}$ » ou « $t = u^{\frac{1}{n+1}}$ ». Cela donne

$$a_n = \frac{1}{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u} u^{\frac{1}{n+1}-1} du = \frac{1}{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{(1+u)u} du.$$

Avec le théorème de convergence dominée, on montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{(1+u)u} du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+u)u} du$$

la domination utilisée est par exemple $0 \leq u^{\frac{1}{n+1}} \leq u^{\frac{1}{2}}$, d'où $0 \leq \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{(1+u)u} \leq \frac{1}{(1+u)u^{1/2}}$. Puisque la limite est non nulle - on peut même la calculer en décomposant en éléments simples : $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)} = \ln 2$, on a $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.

Exercice 9.4

- On utilise la relation $0 < \ln(1+x) < x$ si $x > 0$. Cela donne $0 < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, puis $0 < n \ln(1 + \frac{1}{n}) < 1$, et enfin le résultat par composition avec l'exponentielle.
- On prolonge l'intégrale sur l'intervalle $[1, e[$: On considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{1/n} f(x) & \text{si } x \in [1, (1+1/n)^n] \\ 0 & \text{si } x \in (1+1/n)^n, e[\end{cases}$$

On a alors $\int_1^{(1+1/n)^n} x^{1/n} f(x) dx = \int_1^e f_n(x) dx$.

- On fixe $x \in [1, e[$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $(1+1/n)^n > x$. On a alors, pour $n \geq n_0$, $f_n(x) = x^{1/n} f(x)$, de limite $f(x)$ lorsque x tend vers 0. La suite (f_n) converge simplement vers f sur $[1, e[$.
 - La fonction f est continue sur $[1, e[$.
 - Pour la domination, on a $|f_n(x)| \leq (1 + \frac{1}{n})|f(x)| \leq 2|f(x)|$ si $x \in [1, (1+1/n)^n]$ et $|f_n(x)| = 0 \leq 2|f(x)|$ si $x \in (1+1/n)^n, e[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1, e[$, on a $|f_n(x)| \leq 2|f(x)|$. La fonction dominante est intégrable sur $[1, e[$ par hypothèse.
- Le théorème de convergence dominée peut s'appliquer et donne le résultat.

Exercice 9.6

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto \ln(1-t^n)$ est continue sur $[0, 1[$. On a

$$\ln(1-t^n) = \ln(1-t) + \ln(1+t+\dots+t^{n-1}) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-t).$$

La fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, 1[$, et, par symétrie, la fonction $t \mapsto \ln(1-t)$ est intégrable sur $[0, 1[$. On en déduit l'existence de I_n .

→ Pour tout $t \in [0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1-t^n) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (continue sur $[0, 1[$). Enfin, si $t \in [0, 1[$, on a $0 \leq t^n \leq t < 1$ et

$$\ln(1-t) \leq \ln(1-t^n) \leq 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$, on a $|f_n(t)| \leq |\ln(1-t)| = |f_1(t)|$. La fonction f_1 étant intégrable sur $[0, 1[$, le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

→ On effectue le changement de variable $u = t^n$ dans l'intégrale ($t \mapsto t^n$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]0, 1[$ sur lui-même). Cela donne

$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} u^{1/n} du.$$

On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $g_n : u \mapsto \frac{\ln(1-u)}{u} u^{1/n}$. On a une domination par $|g_n(u)| \leq$

$\left| \frac{\ln(1-u)}{u} u \right|$, fonction continue et intégrable sur $]0, 1[$. On obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} u^{1/n} du = \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = C < 0.$$

Ainsi $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n}$.

Exercice 9.7

On ne le dira pas à chaque fois mais toutes les fonctions qui apparaissent (fonctions, limites simples, fonctions dominantes) sont continues sur \mathbb{R}^+ .

1. On note $f_n(x) = f(x)e^{-nx}$. La suite de fonctions converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers une fonction nulle partout sauf en 0. Si on note M un majorant de $|f|$ sur \mathbb{R}^+ , on a, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$, $|f_n(x)| \leq Me^{-x}$ et $x \mapsto Me^{-x}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . On peut appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

On effectue le changement de variable linéaire « $u = nx$ ». Cela donne

$$nI_n = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} du.$$

On note $g_n(u) = f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}$. On a convergence simple vers $g : x \mapsto f(0)e^{-u}$ et domination par Me^{-u} . On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u} du = f(0).$$

2. On a

$$nI_n - L = \int_0^{+\infty} \left(f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0) \right) e^{-u} du$$

Pour $u \geq 0$ fixé, on a $f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f'(0) \frac{u}{n}$. On s'attendrait à avoir

$$nI_n - L \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} f'(0) \frac{u}{n} e^{-u} du$$

On étudie $n(nI_n - L) = \int_0^{+\infty} h_n(u) du$ où $h_n(u) = n \left(f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0) \right) e^{-u}$. Pour tout $u \geq 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(u) = uf'(0)e^{-u}$. Pour la domination, on note M_1 un majorant de $|f'|$ sur \mathbb{R}^+ . Avec l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $u \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|h_n(u)| \leq nM_1 \frac{u}{n} e^{-u} = M_1 u e^{-u}$. Puisque $u \mapsto u e^{-u}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , on en déduit le résultat voulu. Avec $\int_0^{+\infty} u e^{-u} du = 1$, on a

$$nI_n - f(0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} f'(0) \text{ ou encore } I_n = \frac{1}{n} f(0) + \frac{1}{n^2} f'(0) + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Exercice 9.8

1. Le plus simple est de partir de la seconde intégrale et d'effectuer le changement « $\frac{t^2}{n} = \cos^2 x$ » soit « $t = \sqrt{n} \cos x$ ». La fonction $x \mapsto \sqrt{n} \cos x$ est \mathcal{C}^1 et bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$. On obtient le résultat souhaité.
2. On définit f_n sur \mathbb{R}^+ par

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \end{cases}.$$

→ Chaque fonction est continue sur \mathbb{R}^+ .

→ Si $t \geq 0$, il existe n_0 tel que $t \leq \sqrt{n_0}$, et pour $n \geq n_0$, $t \leq \sqrt{n}$ d'où $f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$ (convergence simple).

→ On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t^2}$: c'est vrai si $t > \sqrt{n}$ et également si $t \in [0, \sqrt{n}]$ (avec $\ln(1+u) \leq u$). De plus $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

on a donc par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

3. On a $\sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. À l'aide des deux questions précédentes, on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9.10

1. On pose $f = F^2$ où $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ . Donc f l'est également, avec pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 2F'(x)F(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Posons $h : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1]$. Pour tout $x \geq 0$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$ et donc intégrable sur $[0, 1]$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$. Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0, 1]$. Donc g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ avec, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = -\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} x dt$.

Le changement affine $u = xt$ donne $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$.

2. D'après les calculs précédents, $f + g$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ , de dérivée nulle. La fonction $f + g$ est donc constante. Or $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Pour tout $x \geq 0$, $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.

3. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ car φ est continue sur \mathbb{R}^+ et $\varphi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}(e^{-t})$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = I^2$. On détermine la limite de g en $+\infty$ par encadrement. Pour $x \geq 0$, on a $0 \leq g(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$. Par encadrement, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. En conclusion $I^2 = \frac{\pi}{4}$ et puisque $I \geq 0$, on obtient $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9.11

Soit $h(x, t) = \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}$.

→ Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et

$\frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{(xt)^2}{2t^2} = \frac{x^2}{2}$ donc la fonction admet une limite finie en 0. Finalement f est définie sur \mathbb{R} . De plus f est paire.

→ pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} ,

→ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$,

→ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin xt}{t} e^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (arguments proches avec une limite finie x en 0),

→ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \cos(xt) e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et dominée par $t \mapsto e^{-t}$, intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

On en déduit que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} avec $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} e^{-t} dt$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$. Alors

$$f''(x) = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il existe C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \arctan x + C$. Puisque $f'(0) = 0$, on a $C = 0$. On a enfin, avec $f(0) = 0$,

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Exercice 9.13

1. Il faut que $x^2 + t^2$ reste strictement positif. Puisqu'on veut étudier la continuité sur \mathbb{R} , on doit considérer l'intégrale sur $]0, +\infty[$. Soit alors $h : (x, t) \mapsto \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . Si $x \neq 0$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$. Pour $x = 0$, la fonction $t \mapsto h(0, t)$ est continue sur $]0, 1]$ et $h(0, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2 \ln t$. Dans les deux situations, la fonction

$t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1]$. Enfin, si $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln t}{t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et f est définie sur \mathbb{R} .

2. On a déjà vérifié les premières hypothèses du théorème de continuité. De plus, pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} . Il est impossible d'obtenir une domination indépendante de x lorsque x parcourt \mathbb{R} , car, pour tout $t > 0$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x, t)| = +\infty$. Soit $A > 0$. Pour $t > 0$ et $x \in [-A, A]$, $\ln t^2 \leq \ln(x^2 + t^2) \leq \ln(A^2 + t^2)$ (puisque $x^2 \in [0, A^2]$ et que la fonction logarithme est croissante sur \mathbb{R}_+^*). Cela permet de majorer $|h(x, t)|$ par $\frac{1}{1+t^2} \max(|\ln t^2|, |\ln(A^2 + t^2)|)$. On pourrait utiliser cette fonction pour dominer ou, si on veut se débarrasser de la fonction maximum, prendre $\varphi(t) = \frac{|\ln t^2| + |\ln(A^2 + t^2)|}{1+t^2}$ (le maximum de deux nombres positifs est inférieur à leur somme). On montre facilement que φ est intégrable sur \mathbb{R}^+ car, pour tout $t > 0$, on a $\varphi(t) = |h(0, t)| + |h(A, t)|$. Ainsi f est continue sur tout segment $[-A, A]$ avec $A > 0$, donc f est continue sur \mathbb{R} .

3. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{2x}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}$. Afin de dominer facilement cette quantité, on va majorer $|x|$ (pour majorer facilement le numérateur) et empêcher x de s'approcher de 0 (pour le dénominateur). Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, b]$ et $t > 0$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2b}{(a^2 + t^2)(1 + t^2)} = \psi(t)$. La fonction ψ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* (continue, limite finie en 0 et $\psi(t) = O(1/t^4)$). Ainsi f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)} dt$. Donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Afin de calculer cette intégrale, on décompose en éléments simples. Si $x > 0$ et $x \neq 1$, on a, pour tout $u \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{2x}{(x^2 + u)(1 + u)} = \frac{2x}{1 - x^2} \left(\frac{1}{x^2 + u} - \frac{1}{1 + u} \right).$$

On rappelle que si $a > 0$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}$. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{2x}{1 - x^2} \left(\frac{\pi}{2x} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{1 + x}$. Par continuité de f' sur \mathbb{R}_+^* , cette relation est valable en 1. Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\pi}{1 + x}$. Lorsque x est grand, on s'attend à ce que le numérateur dans l'intégrale soit proche de $\ln x^2 = 2 \ln x$ et $f(x)$ est donc proche de $\int_0^{+\infty} \frac{2 \ln x}{1 + t^2} dt = \pi \ln x$. On pourrait donc étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \pi \ln(x)$ (et montrer que cette limite est nulle - ce n'est pas trop difficile mais demande un peu de travail). On peut simplement s'intéresser à une valeur particulière, par exemple 0 puisqu'on a montré la continuité de f sur \mathbb{R} et ainsi $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = C$. Alors $f(0) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$. A l'aide d'un changement de variable $u = 1/t$, on montre que cette intégrale est nulle. Finalement, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \pi \ln(1 + x)$ et par parité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \pi \ln(1 + |x|)$ (f n'est donc pas dérivable en 0).

4. Lorsque x est grand, on s'attend à ce que $f(x)$ soit proche de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{1 + t^2} dt$. Cette dernière intégrale vaut $(\pi/2) \ln x^2 = \pi \ln x$. Pour $x > 0$, on a

$$f(x) - \pi \ln x = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2 + x^2) - \ln(x^2)}{1 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + t^2/x^2)}{1 + t^2} dt.$$

On effectue le changement linéaire $t = ux$ dans l'intégrale précédente, on obtient, si $x > 0$, $f(x) - \pi \ln x = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + u^2)}{1 + u^2 x^2} x du$. Pour tout $u > 0$, on a l'encadrement

$$0 \leq x \frac{\ln(1 + u^2)}{1 + u^2 x^2} \leq x \frac{\ln(1 + u^2)}{u^2 x^2} = \frac{1}{x} \frac{\ln(1 + u^2)}{u^2}.$$

La fonction $u \mapsto \frac{\ln(1 + u^2)}{u^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . En combinant tout cela, on obtient, lorsque $x > 0$, $0 \leq f(x) - \pi \ln x \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + u^2)}{u^2} du$. Par encadrement, on aboutit à $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \pi \ln x) = 0$.

5. Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{\pi}{1 + x}$. Il existe un réel C tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \pi \ln(1 + x) + C$. La question précédente donne la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $f(x) - \pi \ln x = C + \pi \ln(1 + \frac{1}{x})$. Cela donne $C = 0$. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \pi \ln(1 + x)$ et, par parité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \pi \ln(1 + |x|)$.

Exercice 9.14

1. Soit $h(x, t) = \frac{\cos(xt)}{1 + t^2}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (on a par conséquent la continuité partielle par rapport à chaque variable) et, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $|h(x, t)| \leq \frac{1}{1 + t^2}$. Puisque $t \mapsto \frac{1}{1 + t^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}^+ , f est définie et continue sur \mathbb{R} . On obtient facilement $h(-x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est donc paire, ainsi que $|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\cos(xt)|}{1 + t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}$. La fonction f est bornée sur \mathbb{R} .
2. Soit $x > 0$ et $A > 0$. On a $x \int_0^A \frac{\cos(xt)}{1 + t^2} dt = \left[\frac{\sin(xt)}{1 + t^2} \right]_0^A + 2 \int_0^A \frac{t \sin(xt)}{(1 + t^2)^2} dt$, car $t \mapsto \sin(xt)$ et $t \mapsto \frac{1}{1 + t^2}$ sont \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Puisque $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\sin(xA)}{1 + A^2} = 0$, on obtient en faisant tendre A vers $+\infty$, $xf(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1 + t^2)^2} dt$.
3. On pense bien entendu à appliquer le théorème de dérivabilité. Cependant, il n'aboutira pas si on cherche à l'appliquer sur $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1 + t^2} dt$. En effet $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{1 + t^2} |\sin(xt)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|\sin(xt)|}{t}$ et on peut montrer que $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Le théorème n'a donc aucune chance de s'appliquer ici. On va l'appliquer à la nouvelle intégrale obtenue dans la question précédente. Soit $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. On définit g pour x positif par $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1 + t^2)^2} dt$ et, pour $(x, t) \in A$, $h_2(x, t) = \frac{t \sin(xt)}{(1 + t^2)^2}$. La fonction h_2 est de classe \mathcal{C}^1 sur A . Pour tout $(x, t) \in A$, $|h_2(x, t)| \leq \frac{t}{(1 + t^2)^2}$, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto h_2(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . De plus, pour tout $(x, t) \in A$, on a $\left| \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{t^2 \cos(xt)}{(1 + t^2)^2} \right| \leq \frac{t^2}{(1 + t^2)^2}$. Le théorème de dérivation montre que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ avec, pour

tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$. Puisque, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \frac{2}{x} g(x)$, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et, si $x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{x} g'(x) - \frac{2}{x^2} g(x)$. Pour $x \geq 0$, on a

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1 - 1) \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt = f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt = f(x) - k(x).$$

On montre comme précédemment que k est dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec, pour tout $x > 0$, $k'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt = -g(x)$. Alors g' est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* avec $g''(x) = f'(x) - k'(x) = f'(x) + g(x)$. Pour $x > 0$, on obtient

$$f''(x) = \frac{2}{x} g''(x) - \frac{4}{x^2} g'(x) + \frac{4}{x^3} g(x) = \frac{2}{x} \left(f'(x) + g(x) - \frac{2}{x} g'(x) + \frac{2}{x^2} g(x) \right)$$

et avec l'écriture précédente pour $f'(x)$, il vient $f''(x) = \frac{2}{x} g(x) = f(x)$ si $x > 0$.

4. La fonction f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $y'' = y$. Il existe donc des réels A et B tels que, pour tout $x > 0$, $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$. La fonction f est bornée sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que $A = 0$. Par continuité de f en 0, on a $B = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$, et par parité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$. Cette écriture de f montre que f n'est pas dérivable en 0 puisque les dérivées à droite et à gauche en 0 sont différentes (et opposées).
5. La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{x^2 + t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ lorsque $x \neq 0$. On peut alors effectuer le changement de variable linéaire $t = ux$ (toujours si $x \neq 0$) pour se ramener à une intégrale proche de celle définissant f . Ainsi, si $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2(1+u^2)} x du = \frac{1}{x} f(x) = \frac{\pi e^{-x}}{2x}$$

Par parité, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2 + t^2} dt = \frac{\pi e^{-|x|}}{2|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.15

1. \rightarrow Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a $f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ et f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. On a $f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et f_x est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $x < 1$. Finalement f est définie sur $]0, 1[$.
- \rightarrow on va prouver la continuité sur un segment $[a, b] \subset]0, 1[$. On vérifie les continuités par rapport à chacune des deux variables. Pour la domination, on a $|\frac{1}{t^x(1+t)}| \leq \frac{1}{t^a(1+t)}$ si $t \geq 1$ et $|\frac{1}{t^x(1+t)}| \leq \frac{1}{t^b(1+t)}$ si $t \leq 1$. On définit φ par $\varphi(t) = \frac{1}{t^a(1+t)}$ si $t \geq 1$ et $\varphi(t) = \frac{1}{t^b(1+t)}$ si $t \leq 1$. Elle est intégrable sur \mathbb{R}_+^* (continue, équivalente à $\frac{1}{t^b}$ en 0 et $\frac{1}{t^{a+1}}$ en $+\infty$). la fonction f est donc continue sur tout segment $[a, b]$ de $]0, 1[$ donc sur $]0, 1[$. Finalement f est définie et continue sur $]0, 1[$.
2. Lorsque x tend vers 0, la fonction intégrée se rapproche de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ qui n'est plus intégrable sur $[1, +\infty[$. On découpe l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$$

On vérifie que $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)}$ est continue sur $[0, 1[$ (et même $]-\infty, 1[$) avec le théorème de continuité et ainsi sa limite en 0 est $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$. Pour la seconde intégrale, on a plusieurs possibilités :

\rightarrow on effectue le changement de variable « $t = u^{1/x}$ ». Cela donne

$$h(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{u^{-1+1/x}}{u(1+u^{1/x})} dt = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} dt$$

On montre alors avec le théorème sur la limite que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} dt = 1$, ce qui donne $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

\rightarrow En se disant que la contribution majeure est en $+\infty$, on regarde

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \cdot t} = - \int_1^{+\infty} \frac{t}{t^{x+1}(1+t)} dt.$$

On montre alors (passage à la limite par le théorème correspondant) que $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} \frac{t}{t^{x+1}(1+t)} dt = \int_1^{+\infty} \frac{t}{t(1+t)} dt$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \cdot t} = \frac{1}{x}$, on retrouve $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Finalement on obtient que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

3. On a $f(1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-x}(1+t)}$. On effectue le changement de variable $u = 1/t$ (l'application $u \mapsto \frac{1}{u}$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}_+^* sur lui-même). On a

$$f(1-x) = \int_{+\infty}^0 \frac{-du}{u^2(u^{x-1}(1+\frac{1}{u}))} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^x(u+1)} = f(u).$$

On a bien, pour tout $x \in]0, 1[$, $f(1-x) = f(x)$. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 9.16

Notons $G(x) = \int_0^x g(t) dt$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \ell$. On effectue une intégration par parties pour faire apparaître G (on a le comportement de G en $+\infty$ mais pas celui de g). On a, pour $A > 0$,

$$\int_0^A g(t)e^{-xt} dt = [G(t)e^{-xt}]_0^A + x \int_0^A G(t)e^{-xt} dt.$$

Lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt = x \int_0^{+\infty} G(t)e^{-xt} dt$. Au passage, on a prouvé que f était définie sur \mathbb{R}_+^* (ce n'est pas explicitement demandé, mais il est raisonnable de se poser la question), puisque la nouvelle intégrale existe (en tant qu'intégrale d'une fonction intégrable puisque $G(t)e^{-xt} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}(e^{-xt})$). On effectue le changement de variable linéaire « $u = xt$ ». L'intégrale devient

$$f(x) = \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u} du.$$

Lorsque x tend vers 0^+ , on aimerait montrer que $f(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \ell e^{-u} du = \ell$ (ce qui revient à dire que f est continue en 0). Puisqu'on ne dispose pas d'un théorème de passage à la limite version « continue », on considère une suite quelconque (x_n) de réels strictement positifs qui converge vers 0. On note $f_n(u) = G\left(\frac{u}{x_n}\right)e^{-u}$. Cette suite de fonctions continues et intégrables sur \mathbb{R}^+ converge simplement vers $u \mapsto \ell e^{-u}$ (sauf en 0 où la valeur est nulle). Puisque G est continue et admet une limite finie en $+\infty$, on en déduit que G est bornée sur \mathbb{R}^+ . Soit M un majorant de $|G|$ sur \mathbb{R}^+ . On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \geq 0$, $|h_n(u)| \leq M e^{-u}$, expression d'une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ . Le théorème de convergence dominée s'applique et donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \int_0^{+\infty} \ell e^{-u} du = \ell$. Par caractérisation de la continuité par les suites, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell = f(0)$.

Exercice 9.17

on note $h(x, t) = e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} , et pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|h(x, t)| \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$. La fonction φ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* (elle est continue sur \mathbb{R}^+ et négligeable devant e^{-t} lorsque t tend vers $+\infty$). Donc f est continue sur \mathbb{R} .

2. Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)}$. Une majoration simple de $e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)}$ par e^{-t^2} ne permet pas d'aboutir car $t \mapsto \frac{1}{t^2} \exp(-t^2)$ n'est pas intégrable sur $]0, 1[$. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in [a, b]$ et $t > 0$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{2b}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right)} = \psi(t)$. La fonction ψ est continue sur \mathbb{R}_+^* . On a $\psi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{2b}{t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}}$, donc $\psi(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures (l'expression est de la forme $u^2 e^{-u^2}$ avec u qui tend vers $+\infty$, et la limite est nulle par croissances comparées). Enfin $\psi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Le théorème de dérivation implique que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Finalement f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* avec, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)} dt$.

3. On cherche à relier $f'(x)$ à $f(x)$. Une intégration par parties n'aboutit pas. On cherche un changement de variable. Le seul envisageable est celui qui échange t^2 et x^2/t^2 , c'est à dire $u = x/t$ ou $t = x/u$. La fonction $u \mapsto x/u$ est une bijection \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+^* dans lui-même, ainsi, si $x > 0$,

$$f'(x) = -2 \int_{+\infty}^0 \frac{u^2}{x} \exp\left(-\left(u^2/x^2 + u^2\right)\right) \left(-\frac{x}{u^2}\right) du = -2f(x).$$

4. La fonction f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = A e^{-2x}$. En utilisant la continuité de f sur \mathbb{R} , ainsi que $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on trouve $A = f(0)$. Par parité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$.

Exercice 9.18

1. On justifie facilement l'existence de ces intégrales. En effectuant le changement de variable $x = \frac{1}{u}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = -\int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}} \frac{du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du$$

Cela donne l'égalité demandée. On a alors, en notant I la valeur commune,

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$$

L'application $x \mapsto x - \frac{1}{x}$ est \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} , avec une dérivée $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ strictement positive, donc la fonction réciproque est aussi de classe \mathcal{C}^1 et bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* . Cela donne

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2+2} du = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

et finalement $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2. On note $h(x, t) = \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} = \frac{e^{-x^2 t^2}}{t^2+i} e^{-ix^2}$ et alors,

$$|h(x, t)| = \frac{e^{-x^2 t^2}}{\sqrt{t^4+1}}$$

On vérifie les continuités par rapport à x sur \mathbb{R} et t sur \mathbb{R}^+ . On majore $|h(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Cela donne la continuité. De plus, puisque, pour $t > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x, t) = 0$ et avec la même domination, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3. On a $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(t^2+i)x^2} = -2xe^{-x^2 t^2} e^{-ix^2}$. On a les différentes hypothèses de régularité et d'intégrabilité (avec la question précédente). On fixe $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, b]$ et $t \geq 0$, on a

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2be^{-a^2 t^2} = \psi(t),$$

et ψ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . On en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur tout segment de \mathbb{R}_+^* , donc sur \mathbb{R}_+^* , avec de plus, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = -2xe^{ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x^2} dt = -2e^{ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = -\sqrt{\pi} e^{ix^2}.$$

4. Puisque F admet des limites finies en 0 et $+\infty$, on a la convergence de $\int_0^{+\infty} F'(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} F'(t) dt = -\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(0) = -F(0)$. Cela donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} F(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+i} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{t^4+1} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1-i)I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1-i) \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{(1-i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

En conjuguant (ou en prenant les parties réelles et imaginaires), on obtient enfin $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ et notamment $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.