CHAPITRE 10 - SUITES DE FONCTIONS

Exercice 10.3

1. Pour $x=0$, on a $f_n(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc $f_n(0)$ converge vers 0. Pour $x\neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n x}{n2^n x^2} = \frac{1}{nx}$ d'où convergence simple vers 0. La suite de fonction converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.
2. On a une primitive presque immédiate de f_n :
$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \left[\frac{1}{2n}\ln(1+n2^n x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2n}\ln(1+n2^n).$$
Puisque $n2^n$ est de limite infinie, on a $\int_0^1 f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n2^n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\ln 2}{2n}$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{\ln 2}{2}$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$ sinon, par permutation limite-intégrale, on aurait $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$.
3. On peut bien évidemment étudier la fonction pour obtenir ses variations et obtenir $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$. Plus simplement, pour $x\geqslant a$, on majore $0\leqslant f_n(x)\leqslant \frac{2^n x}{n2^n x^2} = \frac{1}{nx}\leqslant\frac{1}{na}$. Cela donne une majoration uniforme de $|f_n|$ sur $[a,+\infty[$ par un terme qui tend vers 0. La convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$.

Exercice 10.5

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin x$.
2. On étudie la différence (avec $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$) :
$$\left|\sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)-\sin x\right| = 2\left|\sin\frac{x}{2n}\sin\left(\frac{2n+1}{2n}x\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2n}\right| \leqslant \frac{|x|}{n}\leqslant\frac{A}{n}$$
On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis ($\sin a - \sin b| \leqslant 1.|a-b|$). On a donc $\|f_n - f\|_{\infty,[-A,A]}\leqslant\frac{A}{n}$ de limite nulle. La convergence est bien uniforme sur les segments $[-A,A]$ (et donc sur tous les compacts de $\mathbb{R}$ qui sont tous contenus dans un tel segment).
3. On cherche x_n tel que $\|f_n-f\|_\infty \geqslant |f_n(x_n)-f(x_n)$ soit minoré/tend vers autre chose que 0. On a, avec $x_n = n\frac{\pi}{2}$,
$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = |\sin((n+1)\frac{\pi}{2}) - \sin n\frac{\pi}{2}| = 1.$$

Exercice 10.6

1. On a
$$g_n'(t) = e^t\left((1-\frac{t}{n})^n - \frac{n}{n}(1-\frac{t}{n})^{n-1}\right) = e^t(1-\frac{t}{n})^{n-1}(1-\frac{t}{n}-1) = -\frac{t}{n}e^t(1-\frac{t}{n})^{n-1}.$$
Puisque $t\in[0,1]$, on a facilement $|g_n'(t)|\leqslant\frac{e^t}{n}$. On utilise l'inégalité des accroissements finis sur $[0,t]$. La dérivée g_n' est majorée en valeur absolue sur $[0,t]$ par $\frac{e^t}{n}$, si bien qu'on a $|g_n(0)-g_n(t)|\leqslant t\frac{e^t}{n}$. En multipliant par e^{-t}, on obtient $|e^{-t}-(1-\frac{t}{n})^n|\leqslant\frac{t}{n}$.
2. On commence par l'existence de $I_n(x)$: la fonction $t\mapsto t^x(1-\frac{t}{n})^n$. Cette fonction est continue sur $]0,1]$ et est équivalente en 0 à t^x, intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x>-1$. les fonctions I_n sont définies sur $]-1,+\infty[$. On s'intéresse directement à la différence avec la fonction limite attendue : on note $I(x) = \int_0^1 t^x e^{-t}\,dt$. Pour les mêmes raisons, cette fonction est définie sur $]-1,+\infty[$. Plutôt que de justifier la convergence simple de la suite de fonctions vers I en utilisant le théorème de convergence dominée, on évalue directement la différence (la question précédente permet de l'évaluer facilement) :
$$|I_n(x)-I(x)|\leqslant\int_0^1 t^x\left|(1-\frac{t}{n})^n - e^{-t}\right|dt \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 t^{x+1}\,dt = \frac{1}{n(x+2)}.$$
D'une part, à x fixé, on a bien une différence de limite nulle, d'où la convergence simple de (I_n) vers I sur $]-1,+\infty[$, d'autre part, pour tout $x>-1$, on a également $x+2>1$ d'où $|I_n(x)-I(x)|\leqslant\frac{1}{n}$. On a donc convergence uniforme de (I_n) vers I sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 10.7

1. Soit $x,y\in[a,b]$. On a $|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant K|x-y|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En passant à la limite (simple), on obtient $|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$ et f est bien K-lipschitzienne.
2. On va contrôler la convergence en un nombre fini de points et utiliser le caractère lipschitzien pour les autres. On se donne $\varepsilon>0$. On fixe $N\in\mathbb{N}$ tel que $K\frac{b-a}{N}<\frac{\varepsilon}{3}$. On note $x_i = a + i\frac{b-a}{N}$. Pour chaque $i\in[\![0;N]\!]$, il existe $n_i\in\mathbb{N}$ tel que, pour $n\geqslant n_i$, $|f_n(x_i)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$. On note $N' = \max(n_i)$. Pour tous les points x_i de $[a,b]$, si $n\geqslant N'$, on a $|f_n(x_i)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x\in[a,b]$. Il existe $i\in[\![0;n-1]\!]$ tel que

$x \in [x_i, x_{i+1}]$. On a alors

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leqslant 2K(x - x_i) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque $|x - x_i| \leqslant |x_{i+1} - x_i| = \frac{b-a}{N}$, on a $K(x - x_i) \leqslant K\frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{3}$. On obtient finalement $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, et ce, pour tout $x \in [a, b]$. La convergence est donc uniforme.

Exercice 10.8

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, si $y \geqslant A$ alors $|f(y)| < \varepsilon$ et il existe α tel que, si $0 \leqslant y \leqslant \alpha$ alors $|f(y)| < \varepsilon$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\frac{1}{n} < \alpha$ et $n \geqslant A$. De plus f est bornée sur $[\alpha, A]$ car continue. Finalement f est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On note M tel que $|f| \leqslant M$. Pour $n \geqslant n_0$ et $x \geqslant 1$, on a $|g_n(x)| \leqslant M|f(nx)|$. Or $nx \geqslant n \geqslant n_0$, donc $|g_n(x)| \leqslant M\varepsilon$. De même si $x \leqslant 1$, on a $|g_n(x)| \leqslant M|f(\frac{x}{n})|$ et $\frac{x}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \alpha$, ce qui donne de nouveau $|g_n(x)| \leqslant M\varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $|g_n(x)| \leqslant M\varepsilon$. La suivante converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 10.9

On fixe $N+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_N$ distincts de $[a, b]$ et on considère les polynômes d'interpolation de Lagrange en ces points qu'on note $L_0, L_1, \ldots, L_N$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = \sum_{i=0}^{N} P_n(x_i) L_i$. Soit $x \in [a, b]$. On a $P_n(x) = \sum_{i=0}^{N} P_n(x_i) L_i(x)$, et $\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) L_i(x)$. Ainsi la suite P_n converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto \sum_{i=0}^{N} f(x_i) L_i(x)$. Par unicité de la limite $f = g$, ce qui donne f polynomiale de degré au plus N. De plus

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{N} |f(x_i) - P(x_i)| L_i(x).$$

En notant $\ell_i = \|L_i\|_{\infty,[a,b]}$, on a $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{N} \ell_i |f(x_i) - P(x_i)|$, indépendant de x, si bien que $\|f - P_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \sum_{i=0}^{N} \ell_i |f(x_i) - P(x_i)|$, de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. La convergence est donc uniforme sur $[a, b]$.