

## CHAPITRE 10 - SÉRIES NUMÉRIQUES

## Exercice 10.4

1. On a, en fonction de la valeur de  $k$ ,

$$\frac{\cos(2k\pi/3)}{k} = \begin{cases} \frac{1}{3p} & \text{si } k = 3p \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{3p+1} & \text{si } k = 3p+1 \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{3p+2} & \text{si } k = 3p+2 \end{cases}$$

d'où le résultat avec  $a = 1$ ,  $b = c = -\frac{1}{2}$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} T_{3n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{3n} \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{3n} \frac{1}{p} \end{aligned}$$

2. On utilise le développement asymptotique  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ . Cela donne

$$T_{3n} = \frac{1}{2} (\ln n + \gamma - \ln(3n) - \gamma + o(1)) = -\frac{\ln 3}{2} + o(1).$$

Puisque  $T_{3n+1} = T_{3n} - \frac{1}{2(3n+1)}$  et  $T_{3n+2} = T_{3n+1} - \frac{1}{2(3n+2)}$ , les trois suites extraites convergent vers  $-\frac{\ln 3}{2}$ . Finalement la série est convergente, de somme  $-\frac{\ln 3}{2}$ .

## Exercice 10.6

1. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x} \ln x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$  et  $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ . La fonction est donc décroissante sur  $[3, +\infty[$ . On en déduit que  $\sum \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  converge. On en déduit que  $\sum_{k=4}^n \left( \int_{k-1}^k f(t) dt - f(k) \right)$  admet une limite finie lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Puisque  $\int_3^n \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} \ln^2 n - \frac{1}{2} \ln^2 3$ , on en déduit que la suite  $(c_n)$  converge (on bouge un peu les constantes restantes). On aurait évidemment également pu étudier la série  $\sum (c_{n+1} - c_n)$  et trouver un équivalent simple du terme général pour prouver la convergence.

2. On sépare les termes d'indices pairs et impairs de la somme alternée, puis on ajoute/soustrait les termes d'indices pairs :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = -\sum_{p=1}^n \frac{\ln(2p-1)}{(2p-1)} + \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2p)}{2p} \\ &= -\sum_{p=1}^{2n} \frac{\ln p}{p} + 2 \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2p)}{2p} \\ &= -\sum_{p=1}^{2n} \frac{\ln p}{p} + \sum_{p=1}^n \frac{\ln 2 + \ln p}{p} \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} + \ln 2 \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{2n} \frac{\ln p}{p} \end{aligned}$$

3. On note  $\theta$  la limite de  $c_n$ , ce qui permet d'obtenir  $\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln^2 n}{2} + \theta + o(1)$  et on utilise le développement usuel  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ .

On reporte dans  $S_{2n}$ . Cela donne

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (\ln 2)(\ln n + \gamma) + \left( \frac{1}{2} \ln^2 n + \theta \right) - \left( \frac{1}{2} \ln^2(2n) + \theta \right) + o(1) \\ &= \gamma \ln 2 + (\ln 2) \ln n + \frac{1}{2} (\ln^2 n - (\ln 2 + \ln n)^2) + o(1) \\ &= \gamma \ln 2 + (\ln 2) \ln n + \frac{1}{2} (-\ln^2 2 - 2 \ln 2 \ln n) + o(1) \\ &= \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} + o(1) \end{aligned}$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$ . Puisque  $S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$ . Finalement la série est convergente et  $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$ .

**Exercice 10.7**

→ Un simple encadrement suffit : on a

$$\frac{1}{n^\alpha} ((n-1) \ln^2 2) \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha} (n \ln^2 n).$$

Le terme de gauche est équivalent à  $\frac{\ln^2 2}{n^{\alpha-1}}$ , si bien que  $\sum u_n$  diverge lorsque  $\alpha - 1 \leq 1$ , c'est-à-dire  $\alpha \leq 2$ . La série de Bertrand  $\sum \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}$  converge si et seulement si  $\alpha > 2$  et  $\sum u_n$  converge si  $\alpha > 2$ . Finalement  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 2$ .

→ un encadrement ne suffit plus (cela donne une partie des résultats seulement). On doit être plus précis sur l'encadrement de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ . Une comparaison série-intégrale (voir cours) donne  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ . On a finalement  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^{\alpha-1/2}}$  et  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > \frac{3}{2}$ .

**Exercice 10.8**

1. On a immédiatement  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On en déduit  $0 \leq u_n = \frac{1}{n} e^{-u_{n-1}} \leq \frac{1}{n}$ . Finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Puisque  $u_n = \frac{1}{n} e^{-u_{n-1}}$ , on en déduit alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . La série  $\sum u_n$  diverge.
2. On aimerait montrer que  $(u_n)$  est décroissante mais cela ne fonctionne pas. On effectue un développement asymptotique de  $u_n$ . On a effectivement, en utilisant le fait que  $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ ,

$$u_n = \frac{1}{n} (1 - u_{n-1} + o(u_{n-1})) = \frac{1}{n} - \frac{u_{n-1}}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Tout cela permet d'écrire

$$w_n = (-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge (théorème des séries alternées), le terme restant est le terme d'une série absolument convergente (si on note  $v_n = w_n - \frac{(-1)^n}{n}$ , on a  $|v_n| = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ). On en déduit finalement que  $\sum (-1)^n u_n$  converge.

**Exercice 10.9**

1. L'intervalle  $]0, 1[$  est stable par  $x \mapsto x - x^2$ . On en déduit l'existence de la suite et le fait que  $u_n \in ]0, 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a ensuite  $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$ . La suite est décroissante, minorée par 0 et converge vers une limite  $\ell \in [0, u_0]$  qui vérifie  $\ell = \ell - \ell^2$ . Ainsi  $(u_n)$  est strictement décroissante vers 0.
2. Puisque  $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$ , la série  $\sum u_n^2$  est de même nature que la suite  $(u_n)$  (série télescopique  $\sum u_n - u_{n+1}$ ). Elle est donc convergente. On a  $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln u_{n+1} - \ln u_n$ . La suite  $(\ln u_n)$  diverge vers  $-\infty$ , donc la série télescopique associée aussi. Enfin,  $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(1 - u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -u_n$  puisque  $u_n$  tend vers 0. Par équivalence (termes négatifs), on en déduit que  $\sum u_n$  diverge.
3. On effectue le développement asymptotique

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta \left( (1 - u_n)^\beta - 1 \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n^\beta (-\beta u_n) = -\beta u_n^{\beta+1}$$

La situation pour avoir une limite finie non nulle est de prendre  $\beta = -1$ .

4. Le théorème de sommation des équivalents (terme 1 de signe constant et série  $\sum 1$  divergente) permet d'obtenir  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n}$ .  
 $\frac{1}{u_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ . Par conséquent  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  et  $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ . La série  $\sum u_n^\alpha$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Exercice 10.10**

On note  $w_n = \ln(\sqrt{n} u_n)$ . On étudie la série de terme général  $w_{n+1} - w_n$  :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{2} \ln \frac{n+1}{n} + \ln \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) + \left( \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)} \right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que  $\sum (w_{n+1} - w_n)$  converge et que  $w_n$  admet une limite finie  $\ell$ . Par conséquent, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} u_n = e^\ell > 0$  et  $u_n \sim \frac{e^\ell}{\sqrt{n}}$ . La série  $\sum u_n$  est divergente.

**Exercice 10.11**

On redémontre le développement asymptotique du cours :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui donne

$$u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \gamma \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Le terme est somme de trois termes, chacun étant celui d'une série convergente (et même absolument convergente pour le dernier)

**Exercice 10.12**

Évidemment, on ne prend pas le logarithme... on passe sous forme exponentielle. Puisque  $\operatorname{Re}\left(1 + \frac{i}{k^2}\right) > 0$ ,

$$1 + \frac{i}{k^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^4}} \exp(i \arctan \frac{1}{k^2})$$

et

$$u_n = \left( \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k^4} \right) \right)^{1/2} \exp\left( i \sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k^2} \right)$$

Soit  $v_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k^4} \right)$ . On a  $\ln v_n = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k^4} \right)$  et  $\ln v_n$  converge vers un réel strictement positif  $\alpha$ . De même  $\sum \arctan \frac{1}{k^2}$  converge puisque  $\arctan \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k^2}$ . Si on note  $\theta = \sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{k^2}$ , la suite  $(u_n)$  converge vers  $\exp\left(\frac{\alpha}{2} + i\theta\right)$ .

**Exercice 10.13**

→ La suite est à termes strictement positifs et croissante. Si elle converge vers une limite finie  $\ell$ , on aurait  $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$  ce qui est impossible. La suite diverge vers  $+\infty$ .

→ On remarque que  $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}$ . Ainsi  $x_{n+1}^2 - x_n^2$  tend vers 2 en  $+\infty$ . Puisque c'est le terme général d'une série divergente positive, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) = x_n^2 - x_0^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n.$$

On a ainsi  $x_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n$  et, par positivité des termes,  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$ .

## Exercice 10.14

1. On effectue un changement de variable :

$$a_n = \int_0^\pi f(u + n\pi) \sin(u + n\pi) du = (-1)^n \int_0^\pi f(u + n\pi) \sin(u) du$$

On a donc une série alternée. On note  $b_n = \int_0^\pi f(u + n\pi) \sin(u) du$ . D'une part  $0 \leq b_n \leq \pi f(n\pi)$  donc  $b_n$  tend vers 0 et d'autre part

$$b_{n+1} - b_n = \int_0^\pi (f(u + (n+1)\pi) - f(u + n\pi)) \sin u du \leq 0.$$

La série vérifie le théorème des séries alternées donc est convergente.

2. Soit  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ , soit  $n_x = E(x/\pi)$ . On a

$$\int_0^x f(t) \sin(t) dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} a_k + \int_{n_x\pi}^x f(t) \sin(t) dt.$$

Or  $\left| \int_{n_x\pi}^x f(t) \sin(t) dt \right| \leq \pi f(n_x\pi)$ , de limite nulle lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  (car  $n_x$  tend aussi vers  $+\infty$ ). Puisque  $\sum a_n$  converge, on en déduit l'existence de la limite de  $\int_0^x f(t) \sin(t) dt$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

3. C'est le même principe. On note cette fois

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t) \sin(t)| dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) |\sin(t)| dt.$$

Puisque  $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt = \int_0^\pi |\sin(t)| dt = 2$ , on obtient l'encadrement

$$2f((n+1)\pi) \leq a_n \leq 2f(n\pi).$$

Comme précédemment, par encadrement, on justifie que  $\int_0^{+\infty} f(t) |\sin t| dt$  converge (ce qui revient à l'intégrabilité recherchée) si et seulement si  $\sum a_n$  converge. L'encadrement qu'on vient d'obtenir permet de montrer que  $\sum a_n$  converge si et seulement si  $\sum f(n\pi)$  converge. Puisque  $f$  est continue, décroissante et positive, le théorème de comparaison série-intégrale indique que c'est le cas si et seulement si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge (en effectuant un changement de variable linéaire pour la multiplication par  $\pi$ ), c'est-à-dire si et seulement si  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

## Exercice 10.15

→ Soit  $f(t) = \frac{t}{1+t^6 \sin^2 t}$  pour  $t \in \mathbb{R}^+$ . La fonction est continue et positive sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est croissante et sa limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  est la même que celle de la suite  $F(n\pi)$ . Puisque  $F(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{t}{1+t^6 \sin^2 t} dt$ , on peut s'intéresser à la convergence

de la série de terme général positif  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t}{1+t^6 \sin^2 t} dt$ .

→ On encadre alors  $u_n$  :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{n}{1+(n+1)^6 \sin^2 t} dt \leq u_n \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{n+1}{1+n^6 \sin^2 t} dt.$$

On a donc amené à calculer (par périodicité)  $\int_0^\pi \frac{1}{1+n^6 \sin^2 t} dt$ . Un changement de variable du type «  $u = \tan t$  », donne  $\int_0^\pi \frac{1}{1+n^6 \sin^2 t} dt = \frac{\pi}{\sqrt{1+n^6}}$ . On a ainsi un encadrement de  $u_n$  et finalement  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n\pi}{\sqrt{1+n^6}} = \frac{\pi}{n^2}$  (une majoration aurait suffi). On a donc convergence de  $\sum u_n$  et  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

## Exercice 10.16

1. On étudie plutôt la suite de termes  $w_n = \ln(v_n)$  et même la série  $\sum (w_{n+1} - w_n)$ . On a

$$w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

On effectue alors un développement limité

$$w_{n+1} - w_n = \alpha \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \left( -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi  $\sum (w_{n+1} - w_n)$  converge, la suite  $(w_n)$  converge vers une limite finie  $\ell$  et  $v_n = \exp(w_n)$  converge vers  $C = \exp(\ell) > 0$ . On a par conséquent  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^\alpha}$  et  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

2. Puisque  $a$  et  $n$  ne sont pas entiers,  $u_n$  existe et ne s'annule pas. À partir d'un certain rang  $n_0$ ,  $n+a$  et  $n+b$  sont positifs. On peut alors écrire  $u_n = u_{n_0} \cdot v_n$  où  $v_n$  est positif - cela permet de se ramener à la question précédente. On a  $u_{n+1} = u_n \frac{n+a}{n+b}$ . On effectue un développement limité du quotient

$$\frac{1+a/n}{1+b/n} = 1 - \frac{b-a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $b-a > 1$ .

3. Exactement comme la question précédente. On a convergence de  $\sum u_n$  si et seulement si  $a > 1$  (mais bon, c'est plus difficile si on n'a pas la première question posée).

**Exercice 10.17**

1. On commence par montrer par récurrence que tous les termes sont strictement positifs. On en déduit alors que  $u_{n+1} - u_n > 0$ . La suite est donc strictement croissante. Soit elle converge vers  $\ell$  finie et strictement positive puisque  $\ell \geq u_1 > 0$ , soit vers  $+\infty$ . Supposons que  $u_n \rightarrow \ell > 0$ . On a alors  $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} \frac{1}{n^\alpha}$ . Puisque la suite  $(u_n)$  converge, la série  $\sum u_{n+1} - u_n$  converge. Par théorème de comparaison, on doit avoir  $\frac{1}{n^\alpha}$  convergente. On a donc  $\alpha > 1$ . Réciproquement si  $\alpha > 1$ , on a  $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{u_1 n^\alpha}$ . La série  $\sum u_{n+1} - u_n$  converge et  $(u_n)$  converge.

2. On a  $\ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha u_k}$ . On a  $\frac{1}{k^\alpha u_k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} \frac{1}{k^\alpha}$ , terme général positif d'une série convergente, donc  $\ell - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ . On a montré que  $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ . Ainsi  $\ell - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ .

3. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . De plus  $u_{n+1} + u_n = 2u_n + \frac{1}{u_n n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2u_n$ . On en déduit

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2u_n}{n^\alpha} = \frac{2}{n^\alpha}.$$

Par sommation des équivalents,

$$u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_1^2 - u_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{1-\alpha} n^{1-\alpha}.$$

**Exercice 10.18**

1. La suite  $(s_n)$  est croissante, par conséquent

$$\sum_{k=1}^p \frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} \geq \sum_{k=1}^p \frac{a_{n+k}}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

2. Supposons que la série  $\sum \frac{a_k}{S_k}$  converge. On obtient, lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{S_k} \geq 1$$

car  $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{n+p} = +\infty$ . Or le reste de  $\sum \frac{a_k}{S_k}$  doit tendre vers 0. Cela donne une contradiction.

3. On simplifie

$$\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{a_n}{S_n S_{n-1}} \geq \frac{a_n}{S_n S_n} = \frac{a_n}{S_n^2} \geq 0$$

puisque  $S_n \geq S_{n-1}$ . La suite  $(\frac{1}{S_n})$  converge vers 0 donc la série de terme général  $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$  converge. On en déduit, par comparaison pour les séries à termes positifs, que  $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$  converge.

4. On peut étudier facilement certaines valeurs : puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ , on a  $S_n \geq 1$  à partir d'un certain rang  $n_0$ . Si  $\alpha \geq 2$ , alors pour  $n \geq n_0$ ,  $\frac{a_n}{S_n} \leq \frac{a_n}{S_n^2}$  et  $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$  converge. Si  $\alpha \leq 1$ , alors pour  $n \geq n_0$ ,  $\frac{a_n}{S_n} \geq \frac{a_n}{S_n}$  et  $\sum \frac{a_n}{S_n}$  diverge. De façon générale, on s'inspire d'une formule proche d'une comparaison série-intégrale. On choisit  $\alpha > 1$  (on peut le faire aussi lorsque  $\alpha < 1$  en modifiant les bornes de l'intégrale et le sens des inégalités). Puisque la suite  $(S_n)$  est strictement croissante vers  $+\infty$ , on a

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \frac{a_n}{S_n^\alpha}$$

$$\text{Or } \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[ \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_{S_{n-1}}^{S_n} = \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right). \text{ Tout cela donne la majoration}$$

$$0 \leq \frac{a_n}{S_n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right).$$

On en déduit la convergence de  $\sum \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  (la série télescopique majorante est convergente car la suite associée converge vers 0).

### Exercice 10.19

On note  $v_n = u_n + \frac{1}{2}u_{2n}$ . On essaie d'exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$  : on ne peut pas le faire en descendant (en divisant  $n$  par 2 plusieurs fois car  $n$  n'est pas une puissance de 2. On part dans l'autre sens :

$$\begin{aligned} v_n &= u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \\ v_{2n} &= u_{2n} + \frac{1}{2}u_{2^2n} \\ v_{2^2n} &= u_{2^2n} + \frac{1}{2}u_{2^3n} \\ &\vdots \\ v_{2^pn} &= u_{2^pn} + \frac{1}{2}u_{2^{p+1}n} \end{aligned}$$

En effectuant une bonne combinaison de ces équations, on fait disparaître les termes intermédiaires :

$$v_n - \frac{1}{2}v_{2n} + \frac{1}{2^2}v_{2^2n} - \dots + (-1)^p \frac{1}{2^p}v_{2^pn} = u_n + (-1)^p \frac{1}{2^{p+1}}u_{2^{p+1}n}.$$

Puisque la suite  $v_n$  converge, elle est bornée et la série de terme général  $\frac{(-1)^p}{2^p}v_{2^pn}$  converge. Puisque la suite  $u$  est bornée, on peut passer à la limite lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ . Cela donne

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} v_{2^pn} = u_n.$$

On note  $\ell$  la limite de la suite  $v$ . Ainsi  $w_n = v_n - \ell$  tend vers 0. On peut alors écrire

$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} w_{2^pn} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \ell = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} w_{2^pn} + \frac{1}{1+1/2} \ell$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un rang  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|w_n| \leq \varepsilon$  et alors

$$\left| \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} w_{2^pn} \right| \leq \varepsilon \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = 2\varepsilon.$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} w_{2^pn} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3} \ell$ .

### Exercice 10.20

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$ . On exprime  $a_n$  en fonction des termes de cette suite : pour  $n \geq 2$ , on a  $S_n - S_{n-1} = \frac{a_n}{n}$ . La relation reste vraie pour  $n = 1$  si on pose  $S_0 = 0$ . Cela donne donc

$$\forall n \geq 1, a_n = n(S_n - S_{n-1})$$

On peut alors écrire le terme demandé :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kS_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kS_{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kS_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)S_k = S_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k.$$

Puisque la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge - on note  $\ell$  sa limite - on a, par la moyenne de Cesàro,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \ell$ . On en déduit que la suite

$\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)_{n \geq 1}$  converge vers 0

## Exercice 10.21

1. On utilise une comparaison série intégrale. Soit  $h > 0$ . La fonction  $f_h : x \mapsto f(xh)$  est décroissante et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  (changement de variable linéaire). On en déduit directement que  $\sum f_h(n)$  converge avec  $f_h(n) = f(nh)$ .
2. On reprend les encadrements. On a, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$hf((k+1)h) \leq \int_{kh}^{(k+1)h} f(t) dt \leq hf(kh),$$

ce qui donne en sommant sur  $\mathbb{N}$  (la fonction est intégrable et les séries convergent :

$$h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$$

ou encore

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \leq h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt + hf(0).$$

Lorsque  $h$  tend vers 0, on obtient  $\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

3. C'est beaucoup moins simple dans cette situation. Soit  $\varepsilon > 0$ . On va découper l'intégrale en deux parties : la contribution essentielle sur un segment  $[0, a]$  et une partie « petite » sur  $[a, +\infty[$  de sorte que  $\int_{a-1}^{+\infty} \phi \leq \varepsilon$  : on peut choisir un tel  $a$  puisque la limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $\int_x^{+\infty} \phi(t) dt = 0$  est nulle (on écrit  $\int_x^{+\infty} = \int_0^{+\infty} - \int_0^x$ ). On choisit  $a$  suffisamment grand de sorte que  $\phi$  soit décroissante sur  $[a-1, +\infty[$  (c'est-à-dire  $a \geq t_0 + 1$ ). On note, pour  $h \in ]0, 1]$  (cela simplifie les majorations),

$$\delta_h = h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) - \int_0^{+\infty} \phi(t) dt.$$

On a, en notant  $n_h = \lfloor \frac{a}{h} \rfloor$ ,

$$\delta_h = h \sum_{n=0}^{n_h} \phi(nh) + \sum_{n=n_h+1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_0^{+\infty} \phi(t) dt.$$

L'entier  $n_h$  vérifie  $a - h \leq hn_h \leq a$ . On découpe l'intégrale en deux pour approcher la somme finie (cela ressemble à une somme de Riemann).

$$\delta_h = \sum_{n=0}^{n_h} \left( h\phi(nh) - \int_{nh}^{(n+1)h} \phi(t) dt \right) + \sum_{n=n_h+1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_{(n_h+1)h}^{+\infty} \phi(t) dt.$$

On majore les différents morceaux : on a d'une part

$$0 \leq \sum_{n=n_h+1}^{+\infty} h\phi(nh) \leq \int_{hn_h}^{+\infty} \phi(t) dt \leq \int_{a-h}^{+\infty} \phi(t) dt \leq \int_{a-1}^{+\infty} \phi(t) dt \leq \varepsilon,$$

ce qui donne

$$\left| \sum_{n=n_h+1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_{(n_h+1)h}^{+\infty} \phi(t) dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

Pour la somme, on utilise la continuité uniforme : la plus grande valeur prise est  $(n_h + 1)h \leq a + h \leq a + 1$ . La fonction  $\phi$  est continue sur  $[0, a + 1]$  donc  $y$  est uniformément continue. Il existe  $\alpha > 0$  tel que  $|x - y| \leq \alpha$  donne  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{a+1}$ . Pour  $h < \alpha$  et  $n \in \llbracket 0; n_h \rrbracket$ , on a alors

$$\begin{aligned} \left| h\phi(nh) - \int_{nh}^{(n+1)h} \phi(t) dt \right| &= \left| \int_{nh}^{(n+1)h} (\phi(nh) - \phi(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{nh}^{(n+1)h} |\phi(nh) - \phi(t)| dt \leq h \frac{\varepsilon}{a+1}, \end{aligned}$$

ce qui permet de majorer la somme par  $(n_h + 1)h\varepsilon \leq \frac{a+h}{a+1}\varepsilon \leq \varepsilon$ . Finalement, pour  $0 < h < \alpha$ , on a  $|\delta_h| \leq 3\varepsilon$ . Ouf!

## Exercice 10.22

1. voir cours
2. On note  $U_n = \sum_{k=0}^n k a_k$ . On a

$$U_n = \sum_{k=1}^n k(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n kS_k - \sum_{k=1}^n kS_{k-1} = \sum_{k=0}^n kS_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)S_k = nS_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k = (n+1)S_n - \sum_{k=0}^n S_k.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{na_n} = \lambda > 0$ , on a  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda na_n$  et que  $\sum a_n$  et donc  $\sum na_n$  sont à termes positifs et divergentes, on en déduit que  $\sum_{k=0}^n S_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda \sum_{k=0}^n ka_k = \lambda U_n$ . Puisque  $1 + \lambda \neq 0$ , on a  $U_n + \sum_{k=0}^n S_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (1 + \lambda)U_n$ . On a donc

$$U_n + \sum_{k=0}^n S_k = (n+1)S_n \quad \text{d'où } (1 + \lambda)U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nS_n$$

Finalement  $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nS_n}{1 + \lambda}$  et  $\frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=0}^n ka_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1 + \lambda} \frac{nS_n}{n^2 a_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{1 + \lambda}$ .

**Exercice 10.23**

On vérifie simplement que la suite est à termes strictement positifs, ce qui permet de prendre le logarithme et d'obtenir

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln u_{k+1} = \frac{1}{2} \ln u_k + \ln \frac{k+1}{2k}$$

Afin d'obtenir une série télescopique, on multiplie par  $2^{k+1}$  cette relation, cela donne, en posant  $v_k = 2^k \ln u_k$ ,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} - v_k = 2^{k+1} \ln \frac{k+1}{2k}$$

En sommant de 1 à  $n-1$ , on obtient  $v_n - v_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} \ln \frac{k+1}{2k}$ . On note  $\alpha_k = 2^{k+1} \ln \frac{k+1}{2k}$ . On a  $\alpha_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -2^{k+1} \ln 2$ . La série  $\sum \alpha_k$  est divergente à termes négatifs. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} -2^{k+1} \ln 2 = -\ln 2 \sum_{k=2}^n 2^k = -\ln 2 (2^{n+1} - 1 - 3)$$

Finalement  $v_n = 2^n \ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2^{n+1} \ln 2$ , ce qui donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -2 \ln 2$  et finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{4}$ .

**Exercice 10.24**

On a une sorte de généralisation du critère de Raabe-Duhamel. On essaie de montrer qu'on peut trouver  $b$  et  $c$  tels que la suite  $v_n = \frac{u_n}{n^b c^n}$  converge vers  $a > 0$ . Pour cela, on s'intéresse plutôt à  $w_n = \ln v_n$  ( $u_n$  est à termes strictement positifs) et enfin à la série télescopique associée (afin de faire apparaître  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ). On pose  $z_n = w_{n+1} - w_n = \ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ . On obtient, pour  $n$  assez grand

$$z_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} + b \ln \frac{n}{n+1} - \ln c = \ln \frac{P(n)}{Q(n)} - b \ln \frac{n+1}{n} - \ln c$$

Il reste à effectuer un DL jusqu'aux termes en  $\frac{1}{n^2}$  de  $\ln \frac{P(n)}{Q(n)} = \ln \frac{P(n)/n^d}{Q(n)/n^d}$ . On a

$$\ln \frac{P(n)}{n^d} = \ln \left( a_d + \frac{a_{d-1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \ln a_d + \ln \left( 1 + \frac{a_{d-1}}{a_d} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \ln a_d + \frac{a_{d-1}}{a_d} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

De même avec  $Q(n)$ , ce qui donne

$$\ln \frac{P(n)}{Q(n)} = \ln \frac{a_d}{b_d} + \left( \frac{a_{d-1}}{a_d} - \frac{b_{d-1}}{b_d} \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement, avec  $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ ,

$$z_n = \ln \frac{a_d}{b_d} - \ln c + \left( \frac{a_{d-1}}{a_d} - \frac{b_{d-1}}{b_d} - b \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En choisissant  $c = \frac{a_d}{b_d}$  et  $b = \frac{a_{d-1}}{a_d} - \frac{b_{d-1}}{b_d}$ , on a  $z_n = O(\frac{1}{n^2})$ , la série  $\sum z_n$  converge, donc  $(w_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $(v_n)$  vers  $e^\ell > 0$  et cela donne l'équivalent voulu sur  $u_n$ .

**Exercice 10.25**

D'après l'hypothèse, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq \frac{u_n^2}{u_{n+1}}$$

La série de terme général  $u_n$  est donc convergente et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)^2 = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{u_{n+1}}} \times \sqrt{u_{n+1}} \right)^2 \leq \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} \right).$$

On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geq \frac{(1+S)^2}{S} \quad \text{avec } S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

La fonction  $x \mapsto \frac{(1+x)^2}{x}$  admet sur  $]0, +\infty[$  un minimum égal à 4. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geq 4$$