CHAPITRE 11 - SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 11.2

1. Par imparité, on peut se ramener à un segment de $\mathbb{R}_+^*$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$, on a $|f_n(x)| \leqslant nbe^{-na^2}$. Or la série $\sum nbe^{-na^2}$ converge (terme négligeable devant $1/n^2$ en $+\infty$). La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$. Si on note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, on a $S_n(-x) = -S_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. En limite, cela donne $S(-x) = -S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Puisqu'on a convergence normale donc uniforme de la série de fonctions sur $[a,x]$, et que chaque fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut permuter somme et intégrale. Cela donne, pour tout $x > 0$,

$$\int_a^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^x nte^{-nt^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-nt^2}\right]_a^x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-na^2} - e^{-nx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-a^2}}{1-e^{-a^2}} - \frac{e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{a^2}-1} - \frac{1}{e^{x^2}-1}\right).$$

On n'a plus qu'à dériver pour obtenir S : pour tout $x > 0$, $S(x) = \frac{1}{2}\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2} = \frac{xe^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}$. On peut éventuellement simplifier :

$$S(x) = \frac{xe^{x^2}}{\left(e^{x^2/2}(2\mathrm{sh}\left(\frac{x^2}{2}\right))\right)^2} = \frac{x}{4\mathrm{sh}^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}.$$

Exercice 11.3

1. Pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{1-e^{-bx}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nbx}$ et ainsi, pour tout $x > 0$, $\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} = \sum_{n=0} f_n(x) = S(x)$ avec $f_n(x) = xe^{-(a+nb)x}$. Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement avec une somme $S : x \mapsto \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$. La fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(a+nb)^2}$ (par IPP par exemple). C'est le terme général d'une série convergente. Le théorème d'intégration terme à terme peut s'appliquer et on obtient le résultat.
2. Même principe (on décompose la fonction, qui est une fonction continue sur $]0,1[$, en la somme d'une série de fonctions). On a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et, pour tout $x \in]0,1[$, $\frac{(-\ln x)^p}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) x^n(-\ln x)^p$ si $x \in]0,1[$. On note $I_{n,p} = \int_0^1 (-\ln x)^p x^n \mathrm{d}x$ (on justifie l'intégrabilité, de plus la fonction intégrée est positive donc égale à sa valeur absolue). Par une intégration par parties, on obtient $I_{n,p} = \frac{p}{n+1}\int_0^1 (-\ln x)^{p-1}x^n\mathrm{d}x = \frac{p}{n+1}I_{n,p-1}$. On en déduit $I_{n,p} = \frac{p!}{(n+1)^p}I_{n,0} = \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}$. Puisque $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum \frac{1}{(n+1)^{p+1}}$ converge. On a toutes les hypothèses pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{(-\ln x)^p}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p!}{(n+1)^{p+1}} = p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}.$$

Exercice 11.4

On note $f_n(t) = \frac{2t}{t^2+n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Chaque fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$. On a $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t}{n^2}$ si bien que $\sum f_n(t)$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$. De plus f est impaire : pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on note $S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(t)$. On a $S_N(-t) = -S_N(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. En limite, lorsque N tend vers ∞, on obtient $f(-t) = -f(t)$ et f est impaire.
2. On essaie de prouver la convergence normale de la série de fonctions. On étudie les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$. La fonction est positive croissance sur $[0,n]$ puis décroissante, maximale en $t = n$ avec une valeur $f_n(n) = \frac{1}{n}$. On n'a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$ - ce qui n'est pas très génant pour la continuité. En effet, si on fixe $A > 0$, pour $n > 1$, on a pour tout $t \in [0,A]$, $|f_n(t)| \leqslant f_n(A) = \frac{2A}{A^2+n^2}$. On a donc convergence normale sur tout segment $[0,A]$ de $\mathbb{R}^+$. Chaque fonction f_n étant continue sur $[0,A]$, la fonction f est continue sur tout segment $[0,A]$ de $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$.
3. On ne peut pas appliquer le théorème de permutation somme-limite facilement car on n'a pas la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$. On pourrait essayer de prouver la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ mais en voyant la question suiffante, on se doute que la convergence ne va pas être uniforme sur $\mathbb{R}^+$. On applique plutôt une comparaison série-intégrale afin d'encadrer f. Si $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, alors

$$\frac{2t}{t^2+(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{2t}{t^2+u^2}\mathrm{d}u \leqslant \frac{2t}{t^2+n^2}$$

En sommant pour n allant de 0 à $+\infty$ à gauche (les séries convergent, l'intégrale également), on obtient

$$f(t) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[2\arctan(\frac{u}{t})\right]_0^{+\infty} = \pi$$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$ à droite, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{2t}{t^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi - 2\arctan(\frac{1}{t}) \leqslant f(t)$$

Par encadrement, lorsque t tend vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \pi$.

4. Si la convergence était uniforme sur $\mathbb{R}^+$, puisque chaque fonction f_n admet une limite nulle en $+\infty$, on pourrait permuter somme et limite ce qui donnerait $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Ce n'est pas le cas donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
5. Chaque fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(t) = 2\dfrac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}$. On a alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f_n'(t)| \leqslant 2\frac{t^2+n^2}{(t^2+n^2)^2} = \frac{2}{n^2+t^2} \leqslant \frac{2}{n^2}.$$

On a donc convergence normale de $\sum f_n'$ sur $\mathbb{R}$, convergence simple de $\sum f_n$. Finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.5

Chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire. On étudie donc la série de fonctions sur $\mathbb{R}^+$.

1. soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$, de signe fixe. Puisque $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. La série $\sum f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ vers un réel $S(x)$. La somme S est donc définie sur $\mathbb{R}$ et S est impaire. Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ car $\sup\limits_{x\geqslant 0} |f_n(x)| = \frac{\pi}{2n}$, terme général d'une série divergente. On prouve la convergence normale de la série de fonctions sur les segments $[-A, A]$. Soit $A > 0$, pour tout $x \in [-A, A]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}\arctan\frac{A}{n} = f_n(A)$, terme général d'une série convergente d'après l'ensemble de définition trouvé précédemment. Chacune des fonctions f_n étant continue sur $\mathbb{R}$, S est continue sur $[-A, A]$, pour tout $A > 0$, donc finalement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+x^2/n^2} = \frac{1}{n^2+x^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum f_n$ est une série de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers S avec convergence normale de $\sum f_n'$ sur $\mathbb{R}$ donc S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$. On en déduit que S est croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $S'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Lorsque x devient grand, on remarque que $f_n(x)$ est proche de $\frac{\pi}{2n}$ qui est le terme général d'une série divergente. On s'attend donc à ce que S admette une limite infinie en $+\infty$. La croissance de S sur $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que S admet une limite en $+\infty$ soit finie, soit infinie. Supposons que cette limite soit finie et notons la ℓ. Pour $x > 0$, $S(x) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n}\arctan(x/n)$, où N est un entier naturel fixé. En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\ell \geqslant \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{\pi}{2n}$ et cela pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient une contradiction et finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

Exercice 11.6

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{r^n\cos(nx)}{n}$. Chacune des fonctions est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{|r|^n}{n} \leqslant |r|^n$. La série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (puisque $|r| < 1$) ainsi f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On note $v_n(r) = \dfrac{r^n\cos(nx)}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et pour tout $r \in]-1,1[$, $v_n'(r) = r^{n-1}\cos(nx)$. Puisque $|v_n(r)| \leqslant |r|^n$, la série $\sum v_n$ converge simplement sur $]-1,1[$. De plus, on a $\|v_n'\|_{\infty,]-1,1[} = |\cos(nx)|$ si bien que $\sum v_n'$ ne converge pas normalement sur $]-1,1[$ (le fait de pouvoir s'approcher de ± 1 fait disparaître le terme géométrique). En revanche, soit $b \in]0,1[$, on a $\|v_n'\|_{\infty,[-b,b]} = |b^{n-1}\cos(nx)| \leqslant b^{n-1}$ et $\sum v_n'$ converge normalement sur $[-b,b]$. Finalement g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[-b,b] \subset]-1,1[$ donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ avec, pour tout $r \in]-1,1[$, $g'(r) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}\cos(nx)$. Cela donne, pour un tel r, $g'(r) =$

$\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}(e^{ix})^n\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}}{1-re^{ix}}\right)$, et

$$\frac{e^{ix}}{1-re^{ix}} = \frac{e^{ix}(1-re^{-ix})}{(1-re^{ix})(1-re^{-ix})} = \frac{e^{ix}-r}{1-2r\cos x+r^2}.$$

Finalement $g'(r) = \dfrac{\cos x - r}{1-2r\cos x+r^2}$. Puisque $g(0)=0$, on obtient en intégrant, pour tout $r \in]-1,1[$, $g(r) = -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos x+r^2)$ (le terme dans ln reste strictement positif car il vaut $(r-\cos x)^2+\sin^2 x$ et les deux carrés ne peuvent être simultanément nuls puisque $|r|<1$).

3. En fixant $r \in]-1,1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos x+r^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n\cos(nx)}{n}.$$

D'après la première question, on a convergence normale de la série de fonctions continues u_n sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-\pi,\pi]$. On peut donc écrire

$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n\cos(nx)}{n}\,dx\right),$$

soit le résultat demandé. Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$. Finalement, on peut calculer la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx = 0$.

Exercice 11.7

1. Pour n et p dans $\mathbb{N}$, on définit sur $]0,1]$ la fonction $f_{n,p}$ par $f_{n,p}(x) = x^n(\ln x)^p$. Elle est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité par 0 en 0 lorsque $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n=0$, la fonction $x \mapsto (\ln x)^p$ est négligeable devant $t^{-1/2}$ lorsque t tend vers 0. Cela justifie l'existence de $I_{n,p}$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0,1[$. Alors

$$\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^p\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^p\right]_\varepsilon^1 - \frac{p}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^{n+1}\frac{(\ln x)^{p-1}}{x}\,dx$$

ce qui, donne lorsque ε tend vers 0, $I_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1}I_{n,p-1}$. Une récurrence simple donne alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-1)^n\dfrac{n!}{(n+1)^n}I_{n,0} = (-1)^n\dfrac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

2. Pour tout $x \in]0,1]$, on a $x^x = \exp(x\ln x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$. On note alors $f_n(x) = \dfrac{(x\ln x)^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$. La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et la somme de cette série est la fonction continue $x \mapsto x^x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de signe fixe sur $]0,1]$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\,dt = \left|\int_0^1 f_n(x)\,dt\right|$. La question précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\,dt = \frac{1}{n!}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$. La série $\sum \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge car $\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$ lorsque $n \geqslant 1$. Le théorème d'intégation terme à terme peut s'appliquer. Cela donne $\displaystyle\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 11.8

1. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n+1}$. Si $x<0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|u_n(x)| = +\infty$ et la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente. Si $x \geqslant 0$, la suite $(e^{-nx})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (vers 0 si $x>0$ et constante égale à 1 si $x=0$) et positive. La suite $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0 si bien que la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0. La série $\sum u_n$ étant alternée, le critère spécial des séries alternées nous assure que la série converge lorsque $x \geqslant 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

2.
   - → Continuité : chacune des fonctions u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$. La difficulté vient du fait que $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = |u_n(0)| = \frac{1}{n+1}$. et on n'a pas convergence normale de la série de fonctions. On doit alors essayer de montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ (on ne peut pas ici se contenter de la convergence normale sur les intervalles $[a,+\infty[$ avec $a>0$, ce qui ne donnerait que la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$). On sait toutefois que pour $x \geqslant 0$, la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. On note pour $x \geqslant 0$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ (reste d'ordre n de la série). Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Le critère spécial des séries alternées nous permet la majoration de $|R_n(x)|$ par la valeur absolue de son premier terme, soit $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$, si bien que $\|R_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Ce majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction somme f est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - → Classe $\mathscr{C}^1$: chacune des fonctions u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $u_n'(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}e^{-nx}$. On peut remarquer que $u_n'(0) = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers 0. Ainsi $\sum u_n'(0)$ diverge et on n'a aucune chance de pouvoir appliquer le théorème de dérivation sur $\mathbb{R}^+$ (mais cela ne prouve pas que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$). On fixe $a>0$. Pour $x \in [a,+\infty[$,

$|u_n'(x)| \leqslant \frac{n}{n+1}e^{-na} \leqslant e^{-na}$, ce qui donne la convergence normale de $\sum u_n'$ sur $[a,+\infty[$. On a auparavant prouvé la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$. On peut donc conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ avec,

$$\text{pour tout } x \geqslant a, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}e^{-nx}.$$

La dérivabilité s'étend à $\mathbb{R}_+^*$ puisque a est un réel strictement positif quelconque.

3. Les termes $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1}$ dans f' et f nous invitent à les ajouter pour les simplifier. Pour tout $x>0$,

$$f(x)-f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n+1}e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-e^{-x})^n = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

ce qui donne, pour tout $x>0, f'(x) = f(x) - \frac{1}{1+e^{-x}}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, ce qui permet d'obtenir $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f(0) - \frac{1}{2}$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et f' admet une limite finie en 0 donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 11.9

1. Chacune des fonctions u_n est définie sur $\mathbb{R}$. Si $x<0$, la suite $(u_n(x))_n$ diverge vers $+\infty$ donc la série associée diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(0)=1$ et la série $\sum u_n(0)$ diverge également. Si $x>0$, par croissances comparées, on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0$ donc $u_n(x)$ est négligeable devant $1/n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction u_n est décroissante, positive sur $\mathbb{R}_+^*$ si bien que $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 1$. La série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a>0$, pour les mêmes raisons que précédemment, on a $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a)$. Puisque $\sum u_n(a)$ converge, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. Chacune des fonctions u_n étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la somme S est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$. Donc S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La série $\sum u_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$, et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction S est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, si $x>y$, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a $S_N(x)\leqslant S_N(y)$ (S_N désigne la somme partielle d'ordre N de la série $\sum u_n$), ce qui donne, lorsque N tend vers $+\infty$, l'inégalité $S(x)\leqslant S(y)$.
5. En écrivant $S(x) = e^{-x} + e^{-x\sqrt{2}} + \ldots$, on se doute que le terme principal lorsque x est grand va être le premier terme de la somme, à savoir e^{-x}. On va donc montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ ou plutôt $\lim_{x\to+\infty} e^x S(x) = 1$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $v_n(x) = e^x u_n(x)$ pour $x>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\|v_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = v_n(1)$ car la fonction v_n est positive et décroissante sur $[1,+\infty[$. Puisque $v_n(1) = e^{1-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$, la série $\sum v_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$. Chacune des fonctions v_n admet une limite finie en $+\infty$, à savoir 0 pour $n\geqslant 2$ et 1 lorsque $n=1$. Cela permet d'écrire
$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x S(x) = 1.$$
6. On réalise une comparaison série-intégrale pour encadrer la somme $S(x)$.

Exercice 11.10

1. On constate tout d'abord que $t-t^2 = t(1-t)$ reste dans $[0,1]$. On montre alors le résultat par récurrence.
2. On a $f_0(x)=1$ et $f_1(x) = 1+x \geqslant f_0(x)$. Ainsi $f_1 - f_0 \geqslant 0$. Pour tout $x\in[0,1]$, et $n\geqslant 1$,
$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x \left(f_n - f_{n-1}\right)(t-t^2)\mathrm{d}t$$
On prouve alors par récurrence que $f_{n+1}-f_n \geqslant 0$ sur $[0,1]$. Dans un second temps, on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, on a $f_n(x)\leqslant\exp(x)$. C'est vrai pour $n=0$ (et $n=1$). Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $f_n\leqslant\exp$. On a pour $x\in[0,1]$ (et puisque $t-t^2\leqslant t$),
$$f_{n+1}(x) = 1+\int_0^x f_n(t-t^2)\mathrm{d}t \leqslant 1+\int_0^x \exp(t-t^2)\mathrm{d}t \leqslant 1+\int_0^x \exp(t)\mathrm{d}t = 1+e^x-1 = e^x.$$
3. On doit essayer de majorer $f_{n+1}-f_n$. On regarde les premiers termes :
$$0\leqslant f_1(x)-f_0(x) = x \leqslant \frac{1}{2},\quad 0\leqslant f_2(x)-f_1(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}x \leqslant \frac{1}{4}$$
en utilisant le fait que $t-t^2\in[0,\frac{1}{4}]$ si $t\in[0,\frac{1}{2}]$, on prouve par récurrence que $0\leqslant f_{n+1}(x)-f_n(x)\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ si $x\in[0,\frac{1}{2}]$. Cela donne la convergence normale de $\sum(f_{n+1}-f_n)$ sur $[0,\frac{1}{2}]$. De plus, pour tout $x\in[0,\frac{1}{2}]$, $f(x)-f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(f_{k+1}(x)-f_k(x)\right)$, ce qui donne
$$0\leqslant f(x)-f_n(x)\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n}.$$
On a bien convergence uniforme de f_n vers f sur $[0,\frac{1}{2}]$.

4. Lorsqu'on calcule la quantité $t-t^2$ pour $t=1-x$, on obtient $(1-x)-(1-x)^2 = x-x^2$ (ce qui est normal, la fonction $t \mapsto t-t^2$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$). On a également $f'_{n+1}(x) = f_n(x-x^2)$. Si on pose $g_n(x) = f_n(x)+f_n(1-x)$, on obtient
$$g'_n(x) = f'_n(x) - f'_n(1-x) = f_{n-1}(x-x^2) - f_{n-1}(x-x^2) = 0$$
La fonction g_n est donc constante (égale à $g_n(1/2) = 2f_n(1/2)$ par exemple). En limite, cela donne $f(x)+f(1-x) = 2f(\frac{1}{2})$. La convergence uniforme de f_n sur $[0,\frac{1}{2}]$ donne la continuité de f sur $[0,\frac{1}{2}]$ et donc sur $[\frac{1}{2},1]$ avec la relation précédente. Ainsi f est continue sur $[0,1]$

5. Si $t \in [0,1]$ alors $t-t^2 \in [0,\frac{1}{4}]$. Si on note $h_n(t) = f_n(t-t^2)$ alors h_n converge simplement vers $h : t \mapsto f(t-t^2)$ et $\|h_n - h\|_{\infty,[0,1]} = \|f_n - f\|_{\infty,[0,\frac{1}{4}]}$ donc h_n converge uniformément vers h sur $[0,1]$. Cela permet d'avoir, en limite
$$\forall x \in [0,1], f(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\mathrm{d}t.$$
La fonction f est continue sur $[0,1]$, la fonction $t \mapsto f(t-t^2)$ également donc $x \mapsto \int_0^x f(t-t^2)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On a donc f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $f'(x) = f(x-x^2)$. Par récurrence, à partir de cette relation, on montre que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

Exercice 11.11

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^n}$ est continue sur $[0,1]$ ce qui donne l'existence de I_n. On pourrait appliquer le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite de I_n. On peut se contenter d'un simple encadrement. La suite de fonctions qu'on intègre converge simplement vers la fonction constante égale à 1 sur $[0,1[$. On étudie la différence $\left|\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^n} - \int_0^1 dx\right| = \left|\int_0^1 \dfrac{-x^n}{1+x^n}\,dx\right| \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n - 1 = -\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^n}\,dx$. Il y a ici deux possibilités pour déterminer un équivalent. On peut effectuer un changement de variable $u = x^n$ puis utiliser le théorème de convergence dominée, ou bien faire une intégration par parties afin de faire apparaître le terme principal puis un terme secondaire. On choisit cette dernière méthode afin de poursuivre le développement dans les questions suivantes.
$$\begin{aligned}-\int_0^1 x\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,dx &= -\left[\frac{x}{n}\ln(1+x^n)\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \\ &= -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.\end{aligned}$$
L'encadrement $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}$ montre que le second terme de la somme est négligeable devant le premier. Donc $I_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln 2}{n}$.

3. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1. On décompose cette fonction à l'aide d'une série de fonctions. Pour tout $t \in]0,1[$, $\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{n+1}$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : t \mapsto (-1)^n\dfrac{t^n}{n+1}$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$, sa somme est la fonction continue g. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u_n(t)\,dt = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ et $\int_0^1 |u_n(t)|\,dt = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, terme général d'une série convergente.Le théorème d'intégration terme à terme nous assure que
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = A.$$

4. On doit relier $\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$ au calcul précédent. On utilise un changement de variables $u = x^n$, ce qui est possible car $u \mapsto u^{1/n}$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,1]$ sur lui-même et $t \mapsto \ln(1+x^n)$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $]0,1]$. On obtient
$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = \int_0^1 \ln(1+u)\left(\frac{1}{n}u^{-1+1/n}\right)du = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}}\,du.$$
On note alors $f_n : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0,1]$. Cette suite de fonctions converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $f : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ et
$$\frac{1}{u^{1-1/n}} = \exp((1-1/n)(-\ln u)) \leqslant \exp(-\ln u) = \frac{1}{u},$$

puisque $u \in]0,1]$ et $-\ln u \geqslant 0$. Donc $\forall u \in]0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_n(u)| \leqslant \frac{\ln(1+u)}{u}$. La fonction $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1. Elle est donc intégrable sur $]0,1]$. Le théorème de convergence dominée donne alors $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du = A$. On obtient finalement $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{A}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 11.12

1. → On note $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$. Le domain commun de défintion de ces fonctions est $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, la siote $(f_n(x))$ est décroissante vers 0 donc la série $\sum (-1)^n f_n(x)$ converge. On a convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$.
   → Chacune des fonctions f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+x)^{3/2}}$. On a alors, pour $n \geqslant 1$, $\|f_n'\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \frac{1}{n^{3/2}}$. La série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $x>0$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^{3/2}}$.
   → Puisque, pour tout $x>0$, $S'(x)$ est la somme d'une série alternée vérifiant les hypothèses du théorème des séries alternées, $S'(x)$ est du signe du premier terme de la somme, donc négatif. Finalement S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Chaque fonction f_n a une limite nulle en $+\infty$. Puisqu'il y a convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut permuter les limites si bien que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$. Pour la limite en 0, on écrit
$$S(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{x}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}.$$
Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\lim_{x\to 0} f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (finie). La convergence normale de la série permet de permuter les limites sur la somme de 1 à $+\infty$. Le terme d'indice 0 donne $\lim_{x\to0} S(x) = +\infty$ et même $S(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$.
3. On a, pour $x>0$,
$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1+x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+x}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}.$$
Ainsi pour $x>0$, $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Puisque S est décroissante, on a
$$2S(x+1) \leqslant S(x+1) + S(x) \leqslant 2S(x).$$
Pour $x > 1$, on a alors $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, si bien que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. On fixe $x>0$. On décompose $\frac{1}{1+e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt}$, ce qui donne
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-(x+n)t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$
On doit permuter somme et intégrale. La formule donnée permet d'obtenir le bon résultat. En revanche, la permutation ne se fait pas avec le théorème d'intégration terme à terme : la série des normes 1 diverge. On applique le théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles $S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{e^{-(x+n)t}}{\sqrt{t}}$, avec une majoration de S_N par son premier terme (car la somme est la somme partielle d'une série alternée vérifiant les hypothèses du théorème des séries alternées). Cela donne $|S_N(t)| \leqslant \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ et donne un majorant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11.13

1. On a $f_n(0) = 0$ donc la série $\sum f_n(0)$ converge. Si $x>0$, on a $f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum f_n(x)$ converge. On a bien convergence simple sur $\mathbb{R}^+$.
2. On étudie les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$. La fonction est postiive, croissante sur $[0, \frac{1}{n}]$ puis décroissante avec un maximum en $\frac{1}{n}$ de valeur $\frac{e^{-1}}{n\ln n}$. On n'a donc pas convergence normale sur $\mathbb{R}^+$. Si $a>0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{1}{n} < a$ et ainsi, pour tout $x \geqslant a$, $|f_n(x)| \leqslant f_n(a)$. Puisque $\sum f_n(a)$ converge, on a convergence normale sur $[a, +\infty[$.
3. On note R_n le reste d'ordre n de la série. On a $R_n(0) = 0$. Si $x>0$,
$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln k} \leqslant \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{x}{e^x - 1} e^{-nx}.$$
La fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$: elle est continue, tend vers 1 en 0 et 0 en $+\infty$. Elle est donc majorée par une constante M. On a

alors, pour tout $x>0$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ et cette majoration est valable en 0. La suite de fonctions converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

4. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = \dfrac{(1-nx)e^{-nx}}{\ln n}$. On a convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout $x \in [a,b]$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{(1+nb)e^{-na}}{\ln n}$ et $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$. La fonction S est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. On s'intéresse au taux d'accroissement en 0, soit $T(x) = \dfrac{S(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{\ln n}$. La fonction T est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet une limite finie ℓ ou $+\infty$ en 0 à droite. Supposons que cette limite soit finie et notée ℓ. Par positivité des termes, si $N \geqslant 2$, alors $T(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \dfrac{e^{-nx}}{\ln n}$. Un passage à la limite en 0 donne alors $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \dfrac{1}{\ln n}$. Ceci étant vrai pour tout N, la divergence de $\sum \dfrac{1}{\ln n}$ donne une contradiction. La fonction T n'a donc pas de limite finie. La seule alternative ici est une limite infinie. La fonction S n'est donc pas dérivable en 0.

Exercice 11.14

1. On note M un majorant de $|f'|$ sur $[0,]$. Pour tout $u \in [0,]$, on a alors $|g(u)-g(0)| \leqslant Mu$ soit $|g(u)| \leqslant Mu$. On en déduit que $\left|g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \frac{Mx}{2^n}$ et la série est absolument convergente. On a deplus la convergence normale sur $[0,1]$ puisque $\left|g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2^n}$. Tout cela assure la continuité de la fonction somme (chacune des fonctions $x \mapsto g\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est continue).
2. Supposons qu'une telle fonction f existe. Par téléscopage, on a
$$\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{x}{2^k}\right) = f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$
Puisque f est continue en 0, on obtient, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g\left(\frac{x}{2^k}\right)$. Réciproquement, une telle fonction est continue sur $[0,1]$ (question précédente) et vérifie la relation fonctionnelle. On montre que la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ par théorème de dérivation. Si on note $f_k(x) = g\left(\frac{x}{2^k}\right)$, on a f_k de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, la série $\sum f_k$ converge simplement sur $[0,1]$ et $f_k'(x) = \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)$, d'où $\left|f_k'\right| \leqslant \frac{M}{2^k}$. On a convergence normale sur $[0,1]$ de $\sum f_k'$. La fonction somme est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

Exercice 11.16

1. a est racine de multiplicité k de P lorsqu'il un polynôme Q tel que $P = (X-a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$. Cela équivaut à $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.
2. Si $P = \alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X-a_k)$ alors $P' = a \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} (X-a_k)$ et
$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}.$$
Si on regroupe par multiplicité avec des racines distinctes :
$$\text{si } P = \alpha \prod_{k=1}^{m} (X-a_k)^{\alpha_k} \text{ alors } \frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X-a_k}.$$
3. à partir de l'écriture précédente, on remarque qu'il suffit de calculer $\dfrac{1}{1\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{re^{it}}{re^{it}-z}\mathrm{d}t$ où z est un nombre complexe. On va montrer que cette intégrale est nulle si $|z|>r$ et vaut 1 si $|z|<r$. On aura ainsi le résultat.
   → cas 1 - $|z|>r$: on a $0 \leqslant \left|re^{it}/z\right| < 1$, ainsi
$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-z}\mathrm{d}t = -\frac{1}{z}\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{1-re^{it}/z}\mathrm{d}t = -\frac{1}{z}\int_0^{2\pi} re^{it}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n e^{int}}{z^n}\mathrm{d}t = -\frac{1}{z}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{n+1}}{z^n} e^{i(n+1)t}\mathrm{d}t$$
   On note $u_n(t) = \dfrac{r^{n+1}}{z^n} e^{i(n+1)t}$. Pour tout $t \in [0,2\pi]$, $|u_n(t)| \leqslant \dfrac{r^{n+1}}{|z|^n}$. On a donc convergence normale de $\sum u_n$ sur $[0,2\pi]$, ce qui permet de permuter somme et intégrale (on a également la continuité de toutes les fonctions qui apparaissent). Puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient bien $\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{re^{it}}{re^{it}-z}\mathrm{d}t = 0$.
   → cas 2 : $|z|<r$ - c'est le même principe avec
$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-z}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-ze^{it}/r}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n e^{-int}}{r^n}\mathrm{d}t$$

toutes les intégrales sont nulles sauf la première ; on a toujours convergence normale sur $[0,2\pi]$ de la série de fonctions ce qui permet de permuter. On obtient alors $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t=2\pi$ et le résultat.

Exercice 11.17

1. L'hypothèse implique $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. Pour $x>0$, on a $\ln(1+x/\lambda_n)\geqslant 0$ et $\ln(1+\ x/\lambda_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $f(x)$ est bien définie.
2. Quitte à augmenter C, on peut supposer $C\in\mathbb{N}^*$. On a alors

$$\forall n\geqslant C,(n-C)^2\leqslant n^2-Cn\leqslant\lambda_n\leqslant n^2+Cn\leqslant(n+C)^2$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{(n+C)^2}\right)\leqslant f(x)&\leqslant\sum_{n=1}^{C}\ln\left(1+\frac{x}{\lambda_n}\right)+\sum_{n=C+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{(n-C)^2}\right)\\&\leqslant \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}(\ln(x))+\sum_{n=C+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{(n-C)^2}\right)\end{aligned}$$

Or, pour tout $n_0\in\mathbb{N}^*$, par décroissance de $t\mapsto\ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right)$,

$$0\leqslant\sum_{n=n_0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)-\int_{n_0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right)\mathrm{d}t\leqslant\ln\left(1+\frac{x}{n_0^2}\right)=O(\ln(x)).$$

Comme

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right)\mathrm{d}t&=\sqrt{x}\int_{n_0/\sqrt{x}}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u\\&\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{x}\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u\\&\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{x}\left(\left[u\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u\right)\\&\underset{x\to+\infty}{\sim}\pi\sqrt{x}\end{aligned}$$

on a

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\underset{x\to+\infty}{=}\pi\sqrt{x}+O(\ln(x))$$

et, finalement,

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{=}\pi\sqrt{x}+O(\ln(x)).$$