CHAPITRE 13 - DÉTERMINANTS

Exercice 13.1

1. Supposons qu'il existe $i, j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i < j$ et $x_i = x_j$. Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$ distinct de i et de j on a $\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{k-1},u(x_k),x_{k+1},\dots,x_n) = 0$, puisque la famille $(x_1,\dots,x_{k-1},u(x_k),x_{k+1},\dots,x_n)$ comporte deux fois le même vecteur. Il reste donc
$$f(x_1,\dots,x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{i-1},u(x_i),x_{i+1},\dots,x_n) + \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{j-1},u(x_j),x_{j+1},\dots,x_n)\ .$$
Le second déterminant est obtenu à partir du premier par échange des vecteurs situés à la i-ième et la j-ième place. Leur somme est donc égale à 0 et on a bien $f(x_1,\dots,x_n) = 0$.
2. L'application f est la somme de n formes n-linéaires. C'est donc une forme n-linéaire et nous avons démontré dans la question précédente qu'elle est alternée. On sait qu'il existe alors une constante λ telle que
$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,\ f(x_1,\dots,x_n) = \lambda.\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n).$$
En particulier pour $(x_1,\dots,x_n) = (e_1,\dots,e_n)$ on obtient
$$f(e_1,\dots,e_n) = \lambda.\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n) = \lambda.$$
Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. On a alors
$$f(e_1,\dots,e_n) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_{k-1},u(e_k),e_{k+1},\dots,x_n)$$
et
$$\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_{k-1},u(e_k),e_{k+1},\dots,e_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1k} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & a_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{kk} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nk} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$
En développant ce déterminant par rapport à sa k-ième ligne on obtient $\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_{k-1},u(e_k),e_{k+1},\dots,x_n) = a_{kk}$, d'où $\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \operatorname{tr}(u)$ et $f(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{tr}(u).\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$.

Exercice 13.2

On note D_n le déterminant. On ajoute les colonnes dans la première colonne et on factorise le coefficient obtenue :
$$D_n = (a+(n-1)n)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ 1 & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$
On effectue $L_i \leftarrow L_i - bL_1$ pour $i \in [\![2;n]\!]$:
$$D_n = (a+(n-1)n)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$
On obtient alors $D_n = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$.

Exercice 13.3

On note $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$. On calcule alors
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B),$$
où les opérations réalisées (par blocs de colonnes) sont $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. Il suffit de calculer et simplifier ces deux déterminants de taille 2.

Exercice 13.4

Pour $n \geqslant 3$, on développe par rapport à la première colonne, puis la première ligne :

$$D_n = D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = D_{n-1} - D_{n-2}$$

On a donc la relation de récurrence, $D_n - D_{n-1} + D_{n-2} = 0$ pour tout $n \geqslant 3$. On a également $D_1 = 1$, $D_2 = 0$ et $D_3 = -1$. On peut :

- → déterminer les suites vérifiant la relation de récurrence et déterminer la solution recherchée avec les premiers termes calculés (astuces : D_0 n'existe pas mais on peut lui imposer une valeur de sorte que la relation soit vérifiée aussi au rang 0 - plus précisément on peut poser $D_0 = 1$. Cela permet de déterminer les deux constantes de l'expression de D_n avec les relations aux rangs 0 et 1 plutôt que 1 et 2).
- → on a $D_n = (D_{n-2} - D_{n-3}) - D_{n-2} = -D_{n-3}$ si $n \geqslant 4$. Ainsi $D_{n+6} = D_n$ si $n \geqslant 1$. On détermine les 6 premiers termes de la suite et on dit qu'elle est de période 6.

Exercice 13.5

On commence par déterminer une relation de récurrence en développant par rapport à la dernière ligne ou colonne (et en recommançant une seconde fois). On doit bien développer par la fin afin de ne pas perdre le terme $\cos\theta$ tout seul en position $(1,1)$. On obtient

$$\forall n \geqslant 1, D_{n+2} = (2\cos\theta)D_{n+1} - D_n.$$

Pour terminer :

- → on détermine les suites solutions de la récurrence. On trouve $D_n = ae^{in\theta} + be^{-in\theta}$ si $\cos\theta \neq \pm 1$ (il faut traiter les cas $\cos\theta = \pm 1$ à part). Puis on trouve a et b avec les premières relations (au rang 1 et 2 ou aux rangs 0 et 1 en posant $D_0 = 1$ afin que la relation de récurrence soit vérifiée à partir du rang 0).
- → on remarque que $D_1 = \cos\theta$, $D_2 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$. On vérifie par récurrence que $D_n = \cos(n\theta)$ (sans avoir à distinguer les différents cas).

Exercice 13.7

On peut soustraire la première ligne aux autres, on obtient

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & \cdots & \cdots & b+x \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & c-b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ c-a & c-b & \ddots & c-b & a-b \end{vmatrix}$$

À ce stade, on peut développer par rapport à la première ligne pour avoir une expression $\alpha_1(a+x) + \alpha_2(b+x) + \ldots + \alpha_n(b+x)$ où les α_i sont des scalaires. On peut également continuer à simplifier en soustrayant la première (ou encore mieux la dernière) colonne aux autres. Il ne reste plus qu'un seul coefficient de la matrice qui contient $a+x$ (ou $b+x$) les autres étant constants. On a finalement l'existence de α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$.
On évalue f en des bonnes valeurs (deux différentes suffisent) : $f(-b) = (a-b)^n = -\alpha b + \beta$ et $f(-c) = (a-c)^n = -\alpha c + \beta$. Il ne reste plus qu'à trouver $f(0) = \beta$. On trouve

$$\beta = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

Exercice 13.8

1. On cherche une telle matrice par blocs de taille p :

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA & EC \\ FA+GB & FC+GD \end{pmatrix}$$

   On choisit alors $E = A^{-1}$, $F = -B$ et $G = A$ afin d'obtenir le résultat. On a donc $P = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B & A \end{pmatrix}$ et notamment $\det P = 1$ ce qui prouve bien que P est inversible. On a alors $\det(PM) = \det M = \det(I_p)\det(AD - BC)$ soit $\det M = \det(AD - BC)$.

2. On se ramène au cas précédent avec une matrice $A_n = A - \frac{1}{n}I_p$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, cette matrice A_n est inversible. On a alors (la matrice A_n est inversible et commute encore avec B) :

$$\det\begin{pmatrix} A_n & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(A_n D - BC)$$

Les applications $X \mapsto \begin{vmatrix} A_n & C \\ B & D \end{vmatrix}$ et $X \mapsto \det(XD - BC)$ sont polynomiale en les coefficients de la matrice $X \in M_p(\mathbb{K})$ donc sont continues. Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient donc $\det M = \det(AD - BC)$ pour A quelconque telle que $AB = BA$.

Exercice 13.9

On note C la matrice colonne de taille n constituée uniquement de 1. Le déterminant cherché est alors

$$\det A = \det(C + x_1 E_1, C + x_2 E_2, \dots, C + x_n E_n)$$

par multilinéarité et la propriété d'être alternée, on a

$$\det A = x_1 \dots x_n \det(E_1, \dots, E_n) + x_2 x_2 \dots x_n \det(C, E_2, \dots, E_n) + x_1 x_3 \dots x_n \det(E_1, C, E_3, \dots, E_n) + x_1 \dots x_{n-1} \det(E_1, E_2, \dots, C)$$

On décomposant le déterminant $\det(E_1, \dots, C, \dots, E_n)$ (avec C en colonne i) sous forme de blocs en coupant après la ligne/colonne i, on obtient un déterminant d'une matrice triangulaire inférieure par blocs et chaque bloc diagonal à un déterminant égal à 1. On en déduit que

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} x_i + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i \neq k} x_i$$

En développant le polynôme $(X - x_1) \dots (X - x_n)$ on obtient les valeurs $(-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ (terme constant) et $(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \prod_{i \neq k} x_i = -1$. Le déterminant cherché est donc $2.(-1)^n$.

Exercice 13.10

On doit caractériser de façon simple que $\operatorname{rg} B = 1$. On peut le faire en écrivant que les colonnes de B sont toutes multiples d'une même colonne (cela peut aboutir). Plus simplement, on utilise l'équivalence de matrices. Il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $B = PCQ$ où $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0)_{n-1} \end{pmatrix}$. On remet tout dans les « mêmes bases ». On note $D = P^{-1} A Q^{-1}$, de sorte que $A = PDQ$. On a alors $\det((A - B)(A + B)) = \det(P(D - C)QP(D + C)Q) = (\det P)^2 (\det Q)^2 \det((D - C)(D + C))$ et $\det A^2 = (\det P)^2 (\det Q)^2 \det(D^2)$. On est donc ramené au problème $\det((D - C)(D + C)) =\leqslant \det D^2$ où D est quelconque (l'application $M \mapsto PMQ$ est une bijection de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même) et D très très simple. On note $D_{1,1}$ le cofacteur de D en position $(1, 1)$. Alors, par linéarité, $\det(D - C) = \det D - D_{1,1}$ et $\det(D + C) = \det D + D_{1,1}$ ce qui donne $\det((D - C)(D + C)) = (\det D)^2 - D_{1,1}^2 \leqslant (\det D)^2$.

Exercice 13.11

Si $A = (a_{ij})$, alors les coefficients a_{ij} sont les coordonnées de A dans la base $\mathscr{B}$. On a donc $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$ et, pour $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, $AE_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} E_{i\ell}$. La matrice de l'endomorphisme $f : M \mapsto AM$ dans la base $\mathscr{B}$ est un matrice carrée d'ordre n^2. Elle se présente sous la forme d'une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_n & \dots & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & A & & \mathbf{0}_n \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{0}_n & & & A \end{pmatrix}$ où $\mathbf{0}_n$ désigne la matrice nulle dans $M_n(\mathbb{K})$. On a donc $\operatorname{tr} f = n \operatorname{tr}(A)$ et $\det(f) = \big(\det(A)\big)^n$.

Exercice 13.12

On écrit la matrice de Φ dans une bonne base. On choisit une base constitué d'une base de $S_n(\mathbb{K})$ (elle comporte $\frac{n(n+1)}{2}$ matrices) complétée avec une base de $A_n(\mathbb{K})$ (avec $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices). Dans cette base, la matrice de Φ est diagonale avec des 1 sur la partie des matrices symétriques et des -1 sinon. Son déterminant est $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Exercice 13.13

1. Pour tout j compris entre 1 et n, échangeons la colonne d'indice j et la colonne d'indice $n + j$ dans la matrice M. Chaque échange multiplie le déterminant par -1 et on obtient donc $\det(M) = (-1)^n \begin{vmatrix} B & A \\ 0 & -B \end{vmatrix}$. Il en résulte que $\det(M) = (-1)^n \det(B) \det(-B) = \det(B)^2 \geqslant 0$.
2. Soit $C \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $\overline{C}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de C. La formule générale du déterminant

donne $\det(\overline{C}) = \overline{\det(C)}$. En appliquant ce résultat à la matrice $C = A + iB$, on obtient

$$\begin{aligned}\det(A^2+B^2) &= \det((A+iB)(A-iB))\\ &= \det(A+iB)\det(A-iB)\\ &= \det(A+iB)\overline{\det(A+iB)}\\ &= |\det(A+iB)|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Avec $n = 2$, prenons par exemple les matrices $A = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. On a alors $A^2 = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$ et $B^2 = -I_2$, d'où $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$ et $\det(A^2+B^2) = -1/2$.

Exercice 13.14

On note $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A et H la colonne ne contenant que des 1. On a

$$\det(A+J) = \det(A_1 + H, \dots, A_n + H).$$

On développe par linéarité. On obtient 2^n termes. Tous les termes faisant apparaître au moins deux colonnes de matrice H valent 0. Il ne reste que le terme où H n'apparaît pas et les termes avec H une seule fois :

$$\det(A+J) = \det A + \sum_{k=1}^{n} \det(A_1, \dots, A_{k-1}, H, A_{k+1}, \dots, A_n).$$

Il reste à calculer ces différents déterminants. En développant par rapport à la k-ième colonne, on obtient la somme des cofacteurs correspondants. Finalement

$$\det(A+J) = \det A + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} A_{ij}.$$

On peut interpréter cette dernière somme comme le produit scalaire usuel de $\mathrm{Com}(A)$ et de J, soit $\mathrm{tr}\,({}^t\mathrm{Com}(A)J)$. Puisque ${}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A).A^{-1}$, il vient finalement

$$\det(A+J) = (\det A)\left(1 + \mathrm{tr}\,(A^{-1}J)\right).$$

Exercice 13.15

1. On a tout d'abord, lorsqu'on prend $X = C$, $\det(2C) = 2^n \det C = \det C$. Cela donne $\det C = 0$. La matrice C est donc non inversible. Supposons que $C \neq 0$. Alors elle est de rang $r < n$ et est équivalente à une matrice diagonale avec un premier bloc I_r : il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $C = P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & (0)_{n-r}\end{pmatrix}Q$. Considérons alors $X = P\begin{pmatrix}(0)_r & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}Q$. On a $C + X = P.Q$ est inversible alors que X n'est pas inversible. On obtient une contradiction sur les déterminants.
2. On translate le problème : on pose $Y = X + B$. La relation devient $\det((A-B)+Y) = \det Y$ pour toute matrice Y. Ainsi $A - B = 0$.