

CHAPITRE 13 - RÉDUCTION

Exercice 13.3

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un tel polynôme. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})} = 1$. On a

$$\overline{P(e^{i\theta})} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \frac{1}{e^{ik\theta}} = \frac{1}{e^{in\theta}} \sum_{k=0}^n \overline{a_k} e^{i(n-k)\theta} = \frac{1}{e^{in\theta}} \sum_{k=0}^n \overline{a_{n-k}} e^{ik\theta} = \frac{1}{e^{in\theta}} Q(e^{i\theta})$$

où $Q = \sum_{k=0}^n \overline{a_{n-k}} X^k$. On a donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(e^{i\theta})Q(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$, ce qui donne $PQ = X^n$. Par degré, Q est constant et ainsi $P = \alpha X^n$. Réciproquement, ces polynômes conviennent.

Exercice 13.4

1. Si x est racine de P alors x^2 également. Si x est une racine non nulle de module différent de 1, on construit alors une infinité de racines deux à deux distinctes $(x, x^2, x^4, \dots, x^{2^n} \dots)$ de modules strictement monotones). Si 0 est racine alors 1 est racine, puis $P(4) = P(2)P(1) = 0$ ce qui est donc impossible. Les racines sont de module 1 (et différentes de 1).
2. Si x est racine alors $(x+1)^2$ aussi puisque $P((x+1)^2) = P(x+1)P(x) = 0$. On a donc $|x+1|^2 = 1$ donc $|x+1| = 1$. On a donc $|x| = |x+1| = 1$. Les racines de modules 1 est sur la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$. Il n'y a donc que deux racines possible j et \bar{j} .
3. Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$ les racines sont de même multiplicité. Le coefficient dominant de P vérifie $a = a^2$ donc $a = 1$ (si P est non nul). On a donc P sous la forme $P = ((X-k)(X-\bar{j}))^m = (X^2 + X + 1)^m$. On regarde si réciproquement un tel polynôme convient. On a

$$P(X)P(X-1) = ((X^2 + X + 1)((X-1)^2 + (X-1) + 1))^m = ((X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1))^m = ((X^2 + 1)^2 - X^2)^m = (X^4 + X^2 + 1)^m$$

et c'est bien $P(X^2)$. Les solutions sont donc les polynômes $(X^2 + X + 1)^m$ avec $m \in \mathbb{N}$.

remarque : on peut aussi utiliser la forme factorisée de P et factoriser $P(X^2)$ et $P(X)P(X-1)$ séparément.

Exercice 13.5

1. On remarque que la quantité à étudier correspond au numérateur de $\left(\frac{P'}{P}\right)'$. Lorsque $P(x) = 0$, le résultat est immédiat puisque $P'(x) \neq 0$ (racine simple). On note z_1, \dots, z_n les racines de P (réelles et distinctes). On a $P = a_n \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ et $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - z_k}$ (on dérive P et on effectue le quotient). On a alors, en dérivant

$$\frac{P''P - P'^2}{P^2} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(X - z_k)^2}$$

Si x n'est pas une racine de P , on obtient bien que $P''(x)P(x) - P'(x)^2 < 0$.

remarque : si on ne suppose pas que les racines sont simples mais seulement que P est scindé sur \mathbb{R} , on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x)P(x) - P'(x)^2 \leq 0$.

2. Par application du théorème de Rolle, on vérifie que si P est scindé à racines simples sur \mathbb{R} alors P' l'est également et plus généralement les dérivées d'ordre quelconque de P sont toujours scindées à racines simples sur \mathbb{R} (on peut même le justifier simplement avec le caractère scindé en considérant les multiplicités). En appliquant la première question à $P^{(k-1)}$ et en évaluant en 0, on obtient $P^{(k+1)}(0)P^{(k-1)}(0) \leq P^{(k)}(0)$. Cela donne

$$(k+1)!(k-1)!a_{k+1}a_{k-1} \leq k!a_k^2 \text{ c'est-à-dire } a_{k+1}a_{k-1} \leq \frac{k}{k+1}a_k^2 \leq a_k^2.$$

Exercice 13.7

On commence par remarquer que $Q - Q' = P$. Pour des raisons de limites en $\pm\infty$, le degré de Q est pair (c'est aussi celui de P) et son coefficient dominant est strictement positif. Ce polynôme admet un minimum global sur \mathbb{R} : on note $M = |Q(0)|$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $|x| \geq A$, on a $Q(x) > M + 1$. Le polynôme admet un minimum atteint sur $[-A, A]$ en un point x_0 , et ce minimum est inférieur ou égal à $Q(0)$ donc à M . En ce minimum, Q' s'annule et ainsi $Q(x_0) = P(x_0) \geq 0$.

Exercice 13.8

On vérifie rapidement que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (mais pas de $\mathbb{R}_n[X]$ en général car le degré de $f(P)$ est la plupart du temps strictement supérieur à celui de P). Pour déterminer les éléments propres, on examine l'équation $f(P) = \lambda P$. Si P est de degré exactement n : $P = a_n X^n + \dots$ avec $a_n \neq 0$. Le terme de degré $n+2$ de $f(P) - \lambda P$ est $na_n - 3a_n = (n-3)a_n$. Il doit être nul donc $n = 3$. Un polynôme propre est

donc de degré 3. On prend $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$\begin{aligned} f(P) &= (X^3 + X)(3aX^2 + 2bX + c) - (3X^2 - 1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ &= (2b - 3b)X^4 + (c + 3a - 3c + a)X^3 + (2b - 3d + b)X^2 + (c + c)X + d \\ &= -bX^4 + (4a - 2c)X^3 + (3b - 3d)X^2 + 2cX + d \end{aligned}$$

On doit alors résoudre $f(P) = \lambda P$. Par unicité de l'écriture d'un polynôme dans la base canonique, on obtient les équations

$$b = 0; 4a - 2c = \lambda a; 3b - 3d = \lambda b; 2cX = \lambda c; d = \lambda d$$

Ce système d'équations est équivalent à $b = d = 0; (4 - \lambda)a = 2c; (2 - \lambda)c = 0$.

- si λ ne vaut ni 2, ni 4 alors a et c sont aussi nuls et $P = 0$.
- si $\lambda = 2$, il reste $a = c$. Le réel 2 est valeur propre et l'espace propre associé est $\text{Vect}(X^3 + X)$.
- si $\lambda = 4$, alors $c = 0$ et a quelconque. Le réel 4 est valeur propre et l'espace propre associé est $\text{Vect}(X^3)$.

Exercice 13.9

On utilise les opérations par blocs :

$$\begin{aligned} \chi_C(x) &= \begin{vmatrix} xI_n - A & -B \\ -B & xI_n - A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} xI_n - A & -B \\ xI_n - (A+B) & xI_n - (A+B) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} xI_n - (A-B) & -B \\ 0 & xI_n - (A+B) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en effectuant les opérations par blocs $L_2 \rightarrow L_2 + L_1$ puis $C_1 \rightarrow C_1 - C_2$. Le déterminant vaut alors $\det(xI_n - (A+B)) \cdot \det(xI_n - (A-B))$, ce qui donne $\chi_C = \chi_{A+B} \cdot \chi_{A-B}$.

Exercice 13.10

1. On a $u^3 + u^2 + u = 0$. Soit $y \in \text{Im} u \cap \ker u$, alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$. Donc, $0 = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = \underbrace{u^2(y)}_{=0} + \underbrace{u(y)}_{=0} + y = 0$ et $y = 0$. On a $\ker u \cap \text{Im} u = \{0\}$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \ker u + \dim \text{Im} u$. On en déduit, $E = \ker u \oplus \text{Im} u$.
2. (a) Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, alors $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.
(b) On pose $P = X^3 + X^2 + X$. P est un polynôme annulateur de u donc $\ker P(u) = E$. $P = X(X^2 + X + 1)$. De plus, X et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux, $E = \ker u \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id})$. On en déduit que $\dim \ker(u^2 + u + \text{Id}) = \dim E - \dim \ker u = \dim \text{Im} u$. On montre alors que $\text{Im} u \subset \ker(u^2 + u + \text{Id})$: soit $y \in \text{Im} u$, alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$. $(u^2 + u + \text{Id})(y) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0$, donc $y \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$. On a donc prouvé que $\text{Im} u \subset \ker(u^2 + u + \text{Id})$, donc $\text{Im} u = \ker(u^2 + u + \text{Id})$.
3. $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$ est un polynôme annulateur de u . Si on note $\text{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u alors $\text{sp}(u) \subset \{\text{racines réelles de } P\}$, donc $\text{sp}(u) \subset \{0\}$. Or u est non bijectif donc, comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, u est non injectif, donc $\ker u \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de u . On en déduit que $\text{sp}(u) = \{0\}$.

Exercice 13.11

Puisque χ_f est scindé (sur \mathbb{C}), l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre λ . Considérons $F = E_\lambda(f)$. Cet espace est de dimension au minimum 1 et tout vecteur non nul de F est un vecteur propre de f . On montre que g admet un vecteur propre dans F : puisque f et g commutent, F est stable par g . L'endomorphisme induit g_F est un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $\dim F \geq 1$, donc admet une valeur propre μ . Soit x un vecteur propre associé, il vérifie $g_F(x) = g(x) = \mu x$ mais également $f(x) = \lambda x$ puisque $x \in F$. Ainsi f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 13.12

Le polynôme P s'écrit $P = XQ$ avec $Q(0) \neq 0$. Le théorème de décomposition des noyaux donne $E = \ker f \oplus \ker Q(f)$. On va montrer que $\ker Q(f) = \text{Im} f$. En fait puisque $\dim \ker Q(f) = n - \dim \ker f = \dim \text{Im} f$, une inclusion suffit. Soit $Q = a_0 + q_1 X + \dots + a_q X^q$ avec $a_0 \neq 0$. Si $x \in \ker Q(f)$, alors

$$a_0 x + \sum_{k=1}^q a_k f^k(x) = 0,$$

ce qui donne

$$x = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^q a_k f^k(x) = f \left(-\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^q a_k f^{k-1}(x) \right) \in \text{Im} f.$$

Exercice 13.13

la matrice A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ (indépendance de la famille). Le polynôme $X^n - 1$ est par conséquent le polynôme minimal de A . La matrice A est donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ (polynôme annulateur scindé à racines simples) et ses valeurs propres sont exactement les racines n -ièmes de l'unité. La matrice admet donc exactement n valeurs propres distinctes, qui sont forcément de multiplicité 1. La matrice A est donc semblable à la matrice de diagonale $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$. La trace de A est la somme de ces valeurs propres, c'est-à-dire 1 (la trace est invariante par changement de base). On peut aussi dire que $\chi_A = X^n - 1$ et $\text{tr } A$ est l'opposé du coefficient de degré $n-1$

Exercice 13.14

- on justifie que F est définie et continue sur \mathbb{R}^+ . Soit H une primitive de f sur \mathbb{R}^+ (f est continue sur \mathbb{R}^+). Pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{H(x) - H(0)}{x - 0}$ donc F est continue sur \mathbb{R}^+ et $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = H'(0) = f(0)$. Ainsi F est continue sur \mathbb{R}^+ et T est bien une application de E dans E .
 - on prouve la linéarité : soient f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $T(f + \lambda g)(0) = (f + \lambda g)(0) = (Tf + \lambda Tg)(0)$. Si $x > 0$, alors on a également, par linéarité de l'intégrale, $T(f + \lambda g)(x) = (Tf + \lambda Tg)(x)$. Finalement $T(f + \lambda g) = Tf + \lambda Tg$ est T est un endomorphisme de E .
- Soit λ une valeur propre de T et $f \neq 0$ telle que $Tf = \lambda f$. On a $f(0) = \lambda f(0)$ et, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lambda f(x)$. La première relation donne $\lambda = 1$ ou $f(0) = 0$. On s'intéresse à la seconde. La fonction Tf est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ donc λf également.
 - si $\lambda = 0$, alors pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 0$ donc, pour tout $x > 0$, $\int_0^x f(t) dt = 0$ et en dérivant f est nulle sur \mathbb{R}_+^* donc sur \mathbb{R}^+ par continuité. Le réel $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.
 - si $\lambda \neq 0$, en divisant par λ , on obtient que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . On a alors, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x).$$

On peut dériver et obtenir, pour tout $x > 0$, $f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x)$ et ainsi f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$xy' + (1 - \frac{1}{\lambda})y = 0$$

On résout cette équation sur \mathbb{R}_+^* : il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = A \exp\left(-\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln x\right) = Ax^{\frac{1}{\lambda}-1}$. On veut que f soit continue sur \mathbb{R}_+ ce qui impose $\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0$ soit $0 < \lambda \leq 1$. Réciproquement ces fonctions conviennent.

Bilan : les valeurs propres de T sont les réels dans $]0, 1]$ et pour $\lambda \in]0, 1]$, l'espace propre associé est $\text{Vect}(f_\lambda)$ où $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Exercice 13.15

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A .

- Supposons que $P(A)$ est nilpotente. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P^k(A) = 0$ et ainsi P^k est un multiple de μ_A . Chaque valeur propre de A est racine de P .
 - Réciproquement soit P un polynôme qui admet les λ_i comme racine. Alors P^n est un multiple de χ_A donc $P^n(A) = P(A)^n = 0$.
- En conclusion $P(A)$ est nilpotente si et seulement si chaque valeur propre de A est racine de P .

Exercice 13.16

- On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X - 3)(X + 2)$ et donc $\text{Sp } A = \{-2, 3\}$ et $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.
- On effectue le produit avec une matrice quelconque $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Après calcul, on obtient $ND = DN$ si et seulement si $b = c = 0$, soit N est diagonale.
- Pour déterminer les matrices qui commutent avec A , on effectue la travail « en changeant de base »- on utilise la même relation de similitude : on a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On a $AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec D , c'est-à-dire, $AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$. L'espace des matrices commutant avec A est donc

$$C(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Pour justifier que $C(A) = \text{Vect}(I_2, A)$, on a au moins deux possibilités :

- on effectue les calculs (bof)
- on remarque que $\text{Vect}(I_2, A)$ est contenu dans $C(A)$ et que les deux sous-espaces vectoriels ont même dimension.

Exercice 13.18

1. Déterminons le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \underset{C_1 - \sum_{i=1}^3 C_i}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ X-1 & X-3 & 1 \\ X-1 & -2 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \underset{L_2 - L_1, L_3 - L_1}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^3\end{aligned}$$

Ainsi A admet 1 comme unique valeur propre.

2. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A , A est inversible. Si A était diagonalisable elle serait semblable à la matrice identité et donc égale à la matrice identité. Puisque ce n'est pas le cas, A n'est pas diagonalisable.
3. Notons P_m le polynôme minimal de A . P_m divise χ_A et P_m est un polynôme annulateur de A . On a $A - I_3 \neq 0$ et $(A - I_3)^2 = 0$. Ainsi $P_m = (X - 1)^2$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$: $X^n = (X - 1)^2 Q + (aX + b)$. Puisque 1 est racine double de $(X - 1)^2$ on obtient : $1 = a + b$ et, après dérivation, $n = a$. Finalement $R = nX + 1 - n$. Puisque $P_m = (X - 1)^2$ est un polynôme annulateur de A on a d'après (1) et (2) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = nA + (1 - n)I_3$$

Exercice 13.20

1. Par un simple développement par rapport à la première colonne, on trouve $\chi_{J_n} = X^n - 1$. Ce polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans \mathbb{C} . La matrice est diagonalisable avec n valeurs propres simples qui sont les racines n -ièmes de l'unité. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Il existe P inversible telle que $J_n = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$.
2. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à J_n . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de \mathbb{C}^n , alors $f(e_i) = e_{i-1}$ avec la convention $e_k = e_{n-k}$ si $k \leq 0$. On en déduit que J_n^k est une matrice du même type avec la diagonale de 1 qui se déplace, jusqu'à $J_n^n = I_n$. On en déduit que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k = Q(J_n)$ où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Puisque $J_n = PDP^{-1}$, on a $J_n^k = PD^k P^{-1}$ ainsi que $A = Q(J_n) = PQ(D)P^{-1}$. On en déduit que

$$\det A = \det Q(D) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k).$$

Exercice 13.21

1. Il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de p est diagonale $\begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r} \end{pmatrix}$. La matrice de $\text{Id}_E + \lambda p$ dans cette base est alors $\begin{pmatrix} (1 + \lambda)I_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $(1 + \lambda)^r$.
2. Si V est nul, alors $\text{rg } B = 0$, sinon la matrice B a toutes ses colonnes proportionnelles et $\text{rg } B = 1$.
3. La matrice B est symétrique réelle donc diagonalisable. On peut le faire sans utiliser cela. Le réel 0 est valeur propre avec un sous-espace propre de dimension $n - 1$. La multiplicité de la racine est donc au moins $n - 1$ et $\chi_B = X^{n-1}(X - \alpha)$. En développant, on trouve que $\alpha = \text{tr } B = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$. Finalement B admet deux valeurs propres, 0 avec un espace propre de dimension $n - 1$ et $\sum_{i=1}^n a_i^2$ avec un espace propre de dimension 1. La matrice B est diagonalisable.
4. On note $\alpha = \text{tr } B = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$. On remarque que $M = I_n + B$. On peut s'inspirer de la première question pour obtenir un déterminant $1 + \alpha$. On peut aussi remarquer que $B/\alpha = C$ est la matrice d'un projecteur de rang 1. Ainsi $M = I + \alpha C$ et on retrouve le déterminant directement avec la question 1.

Exercice 13.22

1. Si x est non nul, on le complète en une base de \mathbb{C}^n . La matrice de u dans cette base est diagonale donc x est vecteur propre de u . Un exercice déjà fait montre alors que u est une homothétie.
2. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{C}^n et A la matrice de u dans cette base. Si P est inversible alors $P^{-1}AP = A$ donc $AP = PA$ pour toute matrice P inversible.
- Si $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la matrice $I_n + E_{ij}$ est inversible. $A(I_n + E_{ij}) = A + A + E_{ij} = (I_n + E_{ij})A = A + E_{ij}A$ et ainsi A commute avec toutes les matrices E_{ij} donc avec toutes les matrices (par combinaison linéaire)
- Par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ et continuité de $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$, on a, pour toute matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$, $AB = BA$.

La matrice A commute avec toutes les matrices donc A est scalaire (voir autre exercice).

Exercice 13.24

1. on discute suivant la dimension du sous-espace stable :

→ les seuls espaces stables de dimension 0 et 3 sont respectivement $\{0\}$ et \mathbb{R}^3 .

→ les sous-espaces stables de dimension 1 sont les droites dirigées par un vecteur propre. On détermine les espaces propres de M . On trouve une seule valeur propre réelle qui est 1 et un espace propre associé qui est la droite dirigée par $(1, 1, 1)$. Cette droite est donc la seule droite stable par M .

→ Un plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable si et seulement si le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A^T . La matrice a les mêmes valeurs propres que A . L'espace propre associé est $\text{Vect}((1, 0, 1))$. Ainsi le seul plan stable est le plan d'équation $x + z = 0$.

2. C'est le cas ici car la droite propre et le plan stable sont supplémentaires (le vecteur $(1, 1, 1)$ n'est pas dans le plan).

Exercice 13.25

La matrice est trigonalisable. Puisque son rang est 2, l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension $n-2$ et A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale $\alpha, \beta, 0, \dots, 0$. On a alors

$$\chi_A = X^{n-2}(X-\alpha)(X-\beta) = X^{n-2}(X^2 - (a+b)X + ab).$$

De plus $\text{tr} A = \alpha + \beta + (n-2) \cdot 0$ et $\text{tr} A^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (n-2) \cdot 0^2$. On en déduit que $(\text{tr} A)^2 - \text{tr}(A^2) = 2\alpha\beta$. Finalement, $\chi_A = X^{n-2} \left(X^2 - (\text{tr} A)X + \frac{(\text{tr} A)^2 - \text{tr}(A^2)}{2} \right)$.

Exercice 13.26

1. On regarde la dimension de l'espace engendré par l'image de la base e : si $v = 0$ alors le rang de f est nul, sinon il vaut 1.

2. Lorsque $v = 0$, f est nulle donc diagonalisable. Sinon $\text{rg} f = 1$ et $\dim \ker f = n-1$. Ainsi 0 est valeur propre de f d'ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique au moins $n-1$. On en déduit alors que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, P_f(X) = X^{n-1}(X-\lambda).$$

En examinant le coefficient de degré $n-1$, on a $\text{tr} f = \lambda$, si bien que $P_f = X^{n-1}(X - \text{tr} f)$. On discute suivant cette trace :

→ si $\text{tr} f \neq 0$, alors c'est une seconde valeur propre; elle est de multiplicité 1 donc l'espace propre associé est de dimension 1. La somme des dimensions des espaces propres vaut n et f est diagonalisable.

→ si $\text{tr} f = 0$, alors $P_f = X^n$. La valeur propre 0 est de multiplicité n et l'espace propre associé est de dimension $n-1$. L'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

Exercice 13.27

Le polynôme $P = (X+1)^3(X+2)$ est annulateur de f . Le polynôme minimal est un diviseur de ce polynôme P . Si f est diagonalisable alors son polynôme minimal serait parmi les polynômes $X+1$, $X+2$ et $(X+1)(X+2)$. Or le polynôme $Q = (X+1)^2(X+2)$ n'est pas annulateur donc aucun des trois polynômes précédents ne peut l'être (Q en est un multiple à chaque fois). En conclusion f n'est pas diagonalisable.

Exercice 13.28

1. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \phi^2(M) &= \text{tr}(\phi(M))I_n - \phi(M) = (n-1)\text{tr}(M)I_n - (\text{tr}(M)I_n - M) \\ &= (n-2)(\text{tr}(M)I_n - M) + (n-1)M = (n-2)\phi(M) + (n-1)M. \end{aligned}$$

Le polynôme $P = X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-n+1)$ est scindé à racines simples et c'est un polynôme annulateur de ϕ , donc ϕ est diagonalisable.

2. Pour $n \geq 2$, ϕ n'est visiblement pas une homothétie donc ϕ admet pour valeur propre -1 et $n-1$. On a $M \in E_{-1}(\phi)$ si, et seulement si, $\text{tr}(M)I_n = 0$ donc $E_{-1}(M) = \{M \in M_n(\mathbb{C}), \text{tr}(M) = 0\}$, c'est-à-dire l'hyperplan des matrices de trace nulle (de dimension n^2-1). Le second sous-espace propre est donc une droite, et on vérifie que $\phi(I_n) = (n-1)I_n$ donc $E_{n-1}(\phi) = \text{Vect}(I_n)$.

3. La trace de ϕ est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité : $\text{tr} \phi = (n^2-1) \times (-1) + (n-1) = -n(n-1)$. De même, le déterminant de ϕ est égal au produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité : $\det \phi = (-1)^{n^2-1} \times (n-1) = (-1)^{n-1}(n-1)$ (n^2 a même parité que n).

4. Le polynôme caractéristique est $\chi_\phi(X) = (X+1)^{n^2-1}(X-n+1)$.

5. ϕ est inversible puisque $\det \phi \neq 0$. On détermine ϕ^{-1} grâce au polynôme annulateur, en effet $\phi^2 - (n-2)\phi - (n-1)\text{Id} = 0$ donc

$$\phi \circ (\phi - (n-2)\text{Id}) = (n-1)\text{Id},$$

ce qui donne $\varphi^{-1} = \frac{1}{n-1}(\varphi - (n-2)\text{Id})$.

Exercice 13.29

On a plusieurs moyens pour le faire.

- le plus rapide est de constater que si M est symétrique alors $f(M) = 3M$ et si M est antisymétrique $f(M) = -M$. Puisque $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires, on a décomposé $M_n(\mathbb{R})$ en somme de deux sous-espaces vectoriels de vecteurs propres donc f est diagonalisable, ses éléments propres sont $(3, S_n(\mathbb{R}))$ (avec une dimension $\frac{n(n+1)}{2}$) et $(-1, A_n(\mathbb{R}))$ (avec une dimension $\frac{n(n-1)}{2}$).
- si on ne le remarque pas, on peut chercher un polynôme annulateur de f : pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$f^0(M) = (\text{Id})(M) = M, f(M) = M + 2M^T \text{ et } f^2(M) = f(M + 2M^T) = M + 2M^T + 2(M^T + 2M) = 5M + 4M^T$$

On a donc $f^2(M) - 2f(M) = 3M = 3f^0(M)$, c'est-à-dire $(f^2 - 2f - 3\text{Id})(M) = 0$ pour toute matrice M . Ainsi le polynôme $X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$ est annulateur, scindé à racines simples. L'endomorphisme est diagonalisable et $\text{Sp}f \subset \{-1, 3\}$. On résout $f(M) = 3M$: c'est équivalent à $M = M^T$. De même $f(M) = -M$ si et seulement si M est antisymétrique.

Il existe une base de $M_n(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est diagonale avec $\frac{n(n+1)}{2}$ termes diagonaux de valeur 3 et les $\frac{n(n-1)}{2}$ autres de valeur -1 . Cela donne $\det f = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ et $\text{tr} f = 3 \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + 2n$.

Exercice 13.30

On cherche à résoudre l'équation $p \circ f + f \circ p = \lambda f$. Ce n'est pas immédiat sous cette forme (mais faisable). On voit mieux ce qu'il se passe matriciellement. On choisit une base \mathcal{B} de E adaptée au projecteur p : on a $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $F = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (avec les tailles correspondantes). On écrit la relation $FP + PF = \lambda F$. On obtient

$$\begin{pmatrix} 2A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} (2-\lambda)A & (1-\lambda)B \\ (1-\lambda)C & -\lambda D \end{pmatrix} = 0.$$

Si λ est différent de 0, 1 et 2, alors $F = 0$.

- cas $\lambda = 0$: on a $A = B = C = 0$ et D quelconque. On en déduit que E_0 est de dimension $(n-r)^2$, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.
- cas $\lambda = 1$: on trouve que E_1 est de dimension $2r(n-r)$, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$.
- cas $\lambda = 2$: on trouve que E_2 est de dimension r^2 , constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La somme des dimensions des espaces propres est $(r+n-r)^2 = n^2$. L'application est diagonalisable.

Exercice 13.31

On note $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ainsi que $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ une base de vecteurs propres pour B , associés aux valeurs propres α et β . On note enfin (Y_1, \dots, Y_n) une base de vecteurs propres pour A associés aux valeurs propres μ_1, \dots, μ_n . On cherche un vecteur propre pour A sous la forme conseillée :

$$M \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aAX_1 + bAX_2 \\ cAX_1 + dAX_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

On se doute qu'on va créer des vecteurs propres en utilisant les vecteurs propres de A . Si on essaie avec $X_1 = X_2 = Y_i$, on obtient

$$M \cdot \begin{pmatrix} Y_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)\mu_i Y_i \\ (c+d)\mu_i Y_i \end{pmatrix},$$

mais ce vecteur n'est pas, en général, colinéaire à $\begin{pmatrix} Y_i \\ Y_i \end{pmatrix}$ (c'est pire si on choisit $X_1 = Y_i$ et $X_2 = Y_j$ avec $i \neq j$). On change légèrement ce vecteur en

le cherchant sous la forme $\begin{pmatrix} k_1 Y_i \\ k_2 Y_i \end{pmatrix}$. On obtient

$$M \cdot \begin{pmatrix} k_1 Y_i \\ k_2 Y_i \end{pmatrix} = \mu_i \begin{pmatrix} (ak_1 + bk_2) Y_i \\ (ck_1 + dk_2) Y_i \end{pmatrix},$$

et dire que ce vecteur est propre revient à dire que $\begin{pmatrix} ak_1 + bk_2 \\ ck_1 + dk_2 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$, donc que ce dernier vecteur est un vecteur propre de B . On

va alors considérer les n vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 Y_i \\ y_1 Y_i \end{pmatrix}$, propres pour M pour la valeur propre $\alpha \mu_i$ et les n vecteurs $\begin{pmatrix} x_2 Y_i \\ y_2 Y_i \end{pmatrix}$, propres pour M pour la valeur

propre $\beta\mu_i$. Il reste à montrer que ces $2n$ vecteurs sont linéairement indépendants pour obtenir une base de vecteurs propres de M . On effectue une combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^n c_i \begin{pmatrix} x_1 Y_i \\ y_1 Y_i \end{pmatrix} + d_i \begin{pmatrix} x_2 Y_i \\ y_2 Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (c_i x_1 + d_i x_2) Y_i \\ \sum_{i=1}^n (c_i y_1 + d_i y_2) Y_i \end{pmatrix} = 0.$$

Par indépendance de la famille (Y_1, \dots, Y_n) , on obtient les $2n$ équations $c_i x_1 + d_i x_2 = 0$ et $c_i y_1 + d_i y_2 = 0$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, c'est-à-dire les n systèmes

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice étant inversible (base de vecteurs propres pour B), les scalaires c_i et d_i sont nuls. Cela termine la démonstration.

Exercice 13.32

- On montre facilement que φ est un endomorphisme de E (la seule petite difficulté est de justifier que les éventuels termes de degré $2n+1$ disparaissent).
- On pourrait écrire la matrice de l'endomorphisme dans la base canonique, mais cela ne donne rien de bien intéressant. Soit P un polynôme non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$. on va considérer cette relation comme une équation différentielle sur $]1, +\infty[$ (on peut identifier polynôme et fonction polynôme sur un tel intervalle - la résolution de l'équation différentielle se fait facilement sur un intervalle sur lequel $(x^2 - 1)$ ne s'annule pas, et on choisit $]1, +\infty[$ pour que $x - 1$ et $x + 1$ soient positifs. Ainsi $\varphi(P) = \lambda P$ si, et seulement si,

$$\forall x \in]1, +\infty[, (x^2 - 1)P'(x) = (2nx + \lambda)P(x).$$

On décompose la fraction rationnelle :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \frac{2nx + \lambda}{x^2 - 1} = \frac{n + \lambda/2}{x - 1} + \frac{n - \lambda/2}{x + 1}.$$

Cela donne, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$P(x) = C \exp \left((n + \frac{\lambda}{2})(x - 1) + (n - \frac{\lambda}{2})(x + 1) \right) = C(x - 1)^{n + \lambda/2} (x + 1)^{n - \lambda/2}.$$

On n'obtient pas forcément un polynôme. C'est le cas lorsque $n \pm \frac{\lambda}{2}$ sont deux entiers. Puisque la somme des deux exposants vaut $2n$, il suffit que l'un soit un entier entre 0 et $2n$ pour que l'autre le soit également. Supposons que $\lambda/2 = p \in \llbracket -n; n \rrbracket$. On a $\lambda_p = 2p$ qui est valeur propre avec des polynômes propres associés $P = C(X - 1)^{n+p}(X + 1)^{n-p}$. On obtient ainsi $2n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes, avec pour chacune un espace propre de dimension 1. Puisque E est de dimension $2n + 1$, on en déduit que φ est diagonalisable, possède $2n + 1$ valeurs propres simples et chaque espace propre est de dimension 1.

Exercice 13.33

Le polynôme caractéristique de M s'écrit $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n = 1$ et $a_0 = (-1)^n \det M \neq 0$ puisque M est inversible. Ce polynôme est annulateur, et

$$a_0 I_n + \sum_{k=1}^n a_k M^k = 0. \text{ Cela peut s'écrire } M \left(\sum_{k=1}^n a_k M^{k-1} \right) = -a_0 I_n, \text{ ou encore}$$

$$M \left(\sum_{k=1}^n -\frac{a_k}{a_0} M^{k-1} \right) = I_n.$$

Cela prouve que l'inverse de M est $\sum_{k=1}^n -\frac{a_k}{a_0} M^{k-1}$, polynôme en M .

Exercice 13.34

Le polynôme $X(X^2 + 1) = X(X + i)(X - i)$ est annulateur. Le théorème de décomposition des noyaux donne $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus \ker(u^2 + \text{Id})$.

- on doit commencer par montrer que u n'est pas injective. Il y a plusieurs façons pour le prouver. La seule racine réelle de $X^3 + X$ est 0, c'est donc la seule valeur propre possible. Puisque χ_u est de degré 3, il admet une racine réelle, donc 0. Ainsi 0 est valeur propre et u n'est pas injective ($\ker u$ est de dimension au moins 1). On peut également considérer la matrice de u dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Cette matrice admet $X^3 + X$ comme polynôme annulateur. Ses valeurs propres complexes sont parmi 0, i , $-i$. Puisque les espaces propres $E_i(A)$ et $E_{-i}(A)$ sont de même dimension (donc au maximum 1), l'espace $E_0(A)$ ne peut pas être réduit à 0. On peut également supposer que u est inversible. Alors $u \circ (u^2 + \text{Id}) = 0$ donne $u^2 + \text{Id} = 0$. On obtient $u^2 = -\text{Id}$. En prenant le déterminant, on obtient $(\det u^2) = (\det u)^2 = -1^3 = -1$, ce qui est difficile pour un carré de \mathbb{R} .
- On cherche une famille libre (e_2, e_3) telle que $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = -e_2$. On obtient notamment $u^2(e_2) = -e_2$. Puisque $u \neq 0$, on a $\dim \ker u \leq 2$, si bien que $\dim \ker(u^2 + \text{Id}) \geq 1$. Il existe donc au moins un vecteur non nul dans $\ker(u^2 + \text{Id})$. On le note e_2 et on pose $e_3 = u(e_2)$. On montre facilement que $(u^2 + \text{Id})(e_3) = 0$. La famille (e_2, e_3) est libre. En effet, si $e_3 = u(e_2) = \alpha e_2$, on aurait

$u^2(e_2) = \alpha^2 e_2 = -e_2$ donc $\alpha^2 = -1$ ce qui est impossible (α est réel). La famille (e_2, e_3) est donc une famille libre de $\ker(u^2 + \text{Id})$. On prend e_1 un vecteur non nul de $\ker u$. Par somme directe, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, et est donc une base de \mathbb{R}^3 . Dans cette base, la matrice de u est celle demandée.

Exercice 13.35

Soit $P = X^3 - X - 1$. On a $P' = 3X^2 - 1$. Une rapide étude montre que P est croissant sur $]\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$, décroissant entre les deux. Il admet un maximum local $P(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$, et finalement une unique racine réelle $\alpha > 0$ (entre 1 et 2). Notons β et $\bar{\beta}$ les deux racines complexes conjuguées. Le polynôme P est donc scindé à racines simples et A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Elle est semblable à une matrice diagonale de diagonale α (k fois), β (m fois) et $\bar{\beta}$ (m' fois). On montre que $m = m'$: soit parce qu'on sait que l'application $X \mapsto \bar{X}$ est une bijection entre les deux sous-espaces propres associés à ces deux valeurs conjuguées, soit parce que la trace est réelle et sa partie imaginaire est $(m - m')\text{Im}(\beta)$. Finalement, on a $\det A = \alpha^k (\beta \bar{\beta})^m = \alpha^k |\beta|^{2m} > 0$.

Exercice 13.36

1. Soit $x = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de V pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela revient à $V \cdot x = \lambda x$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} Y &= \lambda X \\ UX &= \lambda Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y &= \lambda X \\ UX &= \lambda^2 X \end{cases}$$

Pour que λ soit valeur propre de V , il faut que λ^2 soit valeur propre de U , de plus si X est vecteur propre de U pour λ^2 , alors le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour V . Réciproquement soit μ une valeur propre de U pour le vecteur propre de X . Si λ est une racine carrée de μ , on pose $x = \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$. On a alors

$$Vx = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ U & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ \lambda^2 X \end{pmatrix} = \lambda x.$$

On a en fait prouvé que l'application

$$\begin{cases} E_\delta(V) & \rightarrow E_{\delta^2}(U) \\ \begin{pmatrix} X \\ \delta X \end{pmatrix} & \rightarrow X \end{cases}$$

est un isomorphisme.

2. → Chaque vecteur propre de U pour une valeur propre λ non nulle (on note δ tel que $\delta^2 = \lambda$) donne un vecteur propre pour V pour la valeur propre δ , à savoir $\begin{pmatrix} X \\ \delta X \end{pmatrix}$ et un pour la valeur propre $-\delta$, $\begin{pmatrix} X \\ -\delta X \end{pmatrix}$. Supposons que U soit diagonalisable et inversible (0 n'est pas valeur propre de U). Considérons une base de vecteurs propres de U , (X_1, \dots, X_n) associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda^2$. On note δ_i une racine de λ_i . On va montrer que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \delta_1 X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ \delta_n X_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ -\delta_1 X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ -\delta_n X_n \end{pmatrix} \right),$$

est une base de $M_{2n}(\mathbb{C})$. Considérons une combinaison linéaire de ces vecteurs, avec des coefficients $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. La relation donne

$$\begin{cases} a_1 X_1 + \dots + a_n X_n & + & b_1 X_1 + \dots + b_n X_n & = & 0 \\ a_1 \delta_1 X_1 + \dots + a_n \delta_n X_n & - & (b_1 \delta_1 X_1 + \dots + b_n \delta_n X_n) & = & 0. \end{cases}$$

La première équation donne $(a_1 + b_1)X_1 + \dots + (a_n + b_n)X_n = 0$ et la seconde $\delta_1(a_1 - b_1)X_1 + \dots + \delta_n(a_n - b_n)X_n = 0$. L'indépendance linéaire de la famille de vecteurs propres, et le fait que $\delta_i \neq 0$ donnent les équations $a_i + b_i = 0 = a_i - b_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On en déduit que toutes les constantes sont nulles. On a donc obtenu une base de vecteurs propres et V est diagonalisable.

- Si U est diagonalisable et non inversible. L'étude précédente nous indique qu'il n'y a pas d'autres sous-espaces propres que ceux trouvés en première question. Chaque espace propre de U donne deux espaces propres pour V de même dimension, sauf pour la valeur propre 0 où on obtient un seul sous-espace. La somme des dimensions est alors $2n - \dim E_0(U) < 2n$ et V n'est pas diagonalisable.

Exercice 13.37

On a $\Phi_u^2(v) = v \circ u^2$, $\Phi_u^k(v) = v \circ u^k$ et, par linéarité, si P est un polynôme $P(\Phi_u)(v) = v \circ P(u)$.

- Supposons que u est diagonalisable et soit P un polynôme annulateur scindé à racines simples de u . Alors $P(\Phi_u) = 0$, si bien que Φ_u est diagonalisable.
- Supposons que Φ_u est diagonalisable et soit P un polynôme annulateur scindé à racines simples de Φ_u . Alors, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, on a $P(\Phi_u)(v) = 0 = v \circ P(u)$. Notamment avec $v = \text{Id}_E$, on obtient $P(u) = 0$ et finalement u est diagonalisable.

Exercice 13.38

Soit F la somme directe de tous les sous-espaces propres de u . On doit montrer que $F = E$. Supposons que cela n'est pas le cas. Ce sous-espace est stable par u , il admet donc un supplémentaire G stable par u de dimension au moins 1. L'endomorphisme induit u_G admet alors une valeur propre (G est un \mathbb{C} -espace vectoriel) et un vecteur propre associé x . Ainsi u admet un vecteur propre en dehors de F , ce qui est une contradiction avec la définition de F .

Exercice 13.39

→ On effectue une combinaison linéaire des puissances de A :

$$\sum_{k=0}^p \mu_k A^k = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=0}^p \mu_k b_i^k \right) B_i.$$

Si on note $Q = \sum_{k=0}^p \mu_k X^k$, alors $Q(A) = \sum_{i=1}^p Q(b_i) B_i$ (pour tout polynôme Q de degré au plus p). En prenant les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points b_i , il existe L_i tel que $L_i(b_j) = \delta_{ij}$ et $L_i(A) = B_i$.

→ Avec $R = \prod_{i=1}^p (X - b_i)$ de degré p , scindé à racines simples, on a $R(A) = 0$. La matrice A est donc diagonalisable.

→ Le polynôme $(X - b_i)L_i$ est annulateur de A car tous les b_k sont racines du polynôme $L_i L_j$ et ainsi $(X - b_i)L_i$ est multiple de R (annulateur) donc $(A - b_i I_n)B_i = 0$ soit $AB_i = b_i B_i$. On montre alors par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \sum_{i=1}^p b_i^k B_i$: si la propriété est vraie à un rang k , alors

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = A \sum_{i=1}^p b_i^k B_i = \sum_{i=1}^p b_i^k AB_i = \sum_{i=1}^p b_i^{k+1} B_i.$$

Exercice 13.40

- $\text{rg } A = n$: la matrice A est inversible est $AB = BA = \det(A)I_n$. Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $\lambda \neq 0$ (A est inversible donc 0 n'est pas valeur propre). On a alors $BAX = \lambda BX$, ce qui donne $BX = \frac{\det A}{\lambda} X$, si bien que X est vecteur propre de B .
- $\text{rg } A \leq n - 2$: la matrice B est nulle, donc tous les vecteurs non nuls sont propres pour B .
- $\text{rg } A = n - 1$. On a montré que $\text{rg } B = 1$. Si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ non nulle. On a $AX = \lambda X$ et $BAX = 0 = \lambda BX$. Puisque $\lambda \neq 0$, on en déduit que $BX = 0$ et X est un vecteur propre pour B (pour la valeur propre nulle). Il reste le cas de la valeur propre nulle pour A . Puisque $\text{rg } A = n - 1$, on a $\dim \ker A = 1$. On considère $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. On a $ABX = 0$, ce qui signifie que $BX \in \ker A$. Puisque $\dim \ker A = 1$ et $X \in \ker A$ non nul tout vecteur de $\ker A$ est colinéaire à X , notamment BX est colinéaire à X , ce qui signifie que X est vecteur propre de B .

Exercice 13.41

1. Écrivons $\chi_A = \prod_{k=1}^p (X - a_k)^{\alpha_k}$ avec a_1, a_2, \dots, a_k les racines distinctes de χ_A . On a alors $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^p (B - a_k I_n)^{\alpha_k}$ et

$$\det(\chi_A(B)) = \prod_{k=1}^p (\det(B - a_k I_n))^{\alpha_k}.$$

Ainsi $\chi_A(B)$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des facteurs du produit est nul, c'est-à-dire si et seulement si l'un des $\det(B - a_k I_n)$ est nul, ce qui signifie que l'une des valeurs propres de A est valeur propre de B . Par contraposée, on a le résultat.

2. Par récurrence très simple, on a $A^k P = P B^k$. Par linéarité, si Q est un polynôme quelconque, on a $Q(A)P = P Q(B)$. Notamment, avec $Q = \chi_A$ et puisque $\chi_A(A) = 0$, il vient $P \chi_A(B) = 0$. Si A et B n'ont pas de valeur propre commune alors $\chi_A(B)$ est inversible et on obtient $P = 0$. Cette contradiction montre que A et B ont une valeur propre commune.
3. Puisque $\chi_{B^T}(X) = \det(B^T - x I_n) = \det(B - x I_n) = \chi_B(x)$, les matrices B et B^T ont même valeur propre. Il existe alors X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \lambda X$ et Y un vecteur colonne non nul tel que $B^T Y = \lambda Y$ soit $Y^T B = \lambda Y^T$. Considérons alors la matrice $P = X Y^T$ carrée de taille n . On a $AP = A X Y^T = \lambda P$ et $PB = X Y^T B = \lambda P$. Donc $AP = PB$ et P a au moins un coefficient non nul puisque X et Y sont deux vecteurs colonnes non nuls.

Exercice 13.42

1. On montre par récurrence que $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$. Considérons l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E) : h \mapsto h \circ g - g \circ h$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(f^k) = k f^k$. Si f^k n'est jamais nul alors k est valeur propre de φ pour tout entier ce qui est impossible (infinité de valeurs propres). Il existe donc k tel que $f^k = 0$.
2. C'est un peu plus compliqué... Supposons que x est un vecteur propre commun à f et $g : f(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$. On a alors $f(g(x)) = \lambda \mu x$ et $g(f(x)) = \lambda \mu x$. Cela donne $(f \circ g - g \circ f)(x) = 0 = f(x)$. Donc x est un vecteur propre pour f pour la valeur propre 0. On va justifier que g admet un vecteur propre dans $\ker f$. Soit $F = \ker f : F$ est de dimension non nulle car f est nilpotente donc non inversible et F est stable par f . On montre que F est stable par g : si $f(x) = 0$, alors $f(x) = 0 = (f \circ g - g \circ f)(x) = f(g(x)) - g(f(x)) = f(g(x))$ donc $g(x) \in \ker f$. On

peut donc considérer les endomorphismes induits par f et g sur F . Alors \tilde{g} est un endomorphisme de F de dimension au moins 1 donc \tilde{g} admet au moins une valeur propre complexe et un vecteur propre x dans F . Ce vecteur est automatiquement vecteur propre pour f .

3. On va se ramener au cas précédent. On pose $\tilde{f} = f + kg$, donc $f = \tilde{f} - kg$. On a (on retire les \circ)

$$\tilde{f}g - g\tilde{f} = (fg - gf) = \alpha f + \beta g = \alpha \tilde{f} + (\beta - k\alpha)g$$

On suppose pour commencer que $\alpha \neq 0$ et on choisit $k = \frac{\beta}{\alpha}$. On a alors $\tilde{f}g - g\tilde{f} = \alpha \tilde{f}$. On note $\tilde{g} = \frac{1}{\alpha}g$, ce qui nous ramène à l'équation $\tilde{f}\tilde{g} - \tilde{g}\tilde{f} = \tilde{f}$. Alors il existe un vecteur propre commun aux deux endomorphismes : $\tilde{f}(x) = ax$ et $\tilde{g}(x) = bx$. En revenant à f et g , on obtient assez facilement que x est un vecteur commun à f et g .

Lorsque $\alpha = 0$, l'équation de départ est alors $f g - g f = \beta g$. Si $\beta = 0$, alors f et g commutent et ont un vecteur propre commun (voir un autre exercice classique). Sinon, on pose $\tilde{f} = -\frac{1}{\beta}f$ pour se ramener à $g\tilde{f} - \tilde{f}g = g$ et ainsi au problème précédent (en permutant le rôle de f et g).

Exercice 13.43

1. Puisque A est diagonalisable, elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Si ce polynôme ne vérifie par $P(0) = 0$, alors 0 n'est pas racine et le polynôme $Q = XP$ est encore scindé à racines simples, et bien entendu annulateur. Ce polynôme est nul en

0. On note B la matrice de taille $2n$ donnée. On vérifie rapidement que $B^2 = \begin{pmatrix} 2A^2 & 2A^2 \\ 2A^2 & 2A^2 \end{pmatrix}$, et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1}A^k & 2^{k-1}A^k \\ 2^{k-1}A^k & 2^{k-1}A^k \end{pmatrix}$. Notons $B' = B/2$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B'^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ A^k & A^k \end{pmatrix}$. Soit $P = \sum_{k=1}^d a_k X^k$ un polynôme annulateur scindé à racines simples de A , nul en 0. On a

$$P(B') = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d a_k B'^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ P(A) & P(A) \end{pmatrix} = 0_{2n}.$$

Ainsi B' est diagonalisable et $B = 2B'$ aussi (on choisit un polynôme annulateur nul en 0 car B^0 n'a pas une bonne forme).

2. On calcule de même B^k . On vérifie par récurrence que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$. Supposons que $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ est un polynôme annulateur de B . On a

$$P(B) = 0_{2n} = \begin{pmatrix} P(A) & C \\ 0 & P(A) \end{pmatrix},$$

où $C = \sum_{k=0}^n k a_k A^k = AP'(A)$. Si B est diagonalisable, alors on choisit P annulateur scindé à racines simples pour B . On a alors $P(A) = 0$ et $AP'(A) = 0$, soit P et XP' annulent A . Or P et P' n'ont aucune racine commune puisque P est à racines simples. La seule racine complexe commune possible entre P et XP' est donc 0. Puisque les valeurs propres de A sont des racines de P et de XP' , la seule valeur propre possible de A est 0. Puisque A est diagonalisable, son polynôme minimal est donc X , ce qui signifie $A = 0$.

Exercice 13.44

1. Les valeurs propres réelles de f sont des racines de P . Il n'y a donc pas de valeurs propres réelles pour f . Si E était de dimension impaire, alors χ_f serait de degré impair et admettrait alors au moins une racine réelle.

2. Soit $F = \text{Vect}(x, y)$. Pour montrer que F est stable par f , il suffit de montrer que $f(x)$ et $f(y)$ sont dans F (par linéarité). On a $f(x) = y - ax \in F$. On a $f(y) = f^2(x) + af(x)$. Or $f^2 + af + b\text{Id} = 0$ donc $f(y) = -bx$. Ainsi F est stable par f .

3. On choisit $x_1 \neq 0$ et on pose $y_1 = f(x_1) + ax_1$ ainsi que $F_1 = \text{Vect}(x_1, y_1)$. On a $f(y_1) = -bx_1$ et $f(x_1) = -ax_1 + y_1$. La matrice de l'endomorphisme induit par f sur F_1 dans la base (y_1, x_1) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. On va construire une base de E formée de blocs de cette forme. On suppose qu'on a déjà construit p sous-espaces F_1, \dots, F_p de la forme précédente (avec $F_k = \text{Vect}(x_k, y_k)$ où $y_k = f(x_k) + ax_k$) en somme directe (on l'a fait pour $p = 1$). Soit $G = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Si $G = E$, on a fini. Sinon, on considère un vecteur $x \notin G$ et on pose $y = f(x) + ax$ et $F = \text{Vect}(x, y)$. On montre que la somme $F + G$ est directe. Soit $u + (\alpha x + \beta y) = 0$ avec $u \in G$. On a $f(u) + \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$. De ces deux équations, on obtient

$$\alpha x + \beta y = -u \text{ et } \alpha(y - ax) + \beta(-bx) = -f(u)$$

soit

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = -u \\ -(b\beta + a\alpha)x + \alpha y = -f(u) \end{cases}$$

la combinaison $aL_1 - \beta L_2$ donne $(\alpha^2 + a\alpha\beta + b\beta^2)x \in G$. Puisque $x \notin G$, cela donne $(\alpha^2 + a\alpha\beta + b\beta^2) = 0$. Si $\beta \neq 0$, alors en posant $t = \alpha/\beta$, on obtient $t^2 + at + b = 0$ ce qui est impossible. Finalement $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$ et il reste $u = 0$. La somme est directe. On peut alors poser $x_{p+1} = x$, $y_{p+1} = y$ et $F_{p+1} = F$ et poursuivre le raisonnement jusqu'à arriver à E .

Une autre solution en débordant légèrement du programme.

On note z et \bar{z} les deux racines complexes conjuguées de $X^2 + aX + b$, $n = 2p$ et $A \in M_{2p}(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base de E . On a A annulée par $P = (X - z)(X - \bar{z})$ donc A est diagonalisable. Les deux complexes sont valeurs propres (sinon on aurait $A = zI_{2p}$ ou $A = \bar{z}I_{2p}$). Si $AX = zX$, alors $A\bar{X} = \bar{z}\bar{X}$. L'application $X \mapsto \bar{X}$ est une bijection linéaire entre $E_z(A)$ et $E_{\bar{z}}(A)$. On note X_1, \dots, X_p une base de $E_z(A)$. Immédiatement $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)$

est une base de vecteurs propres de A et si Q est la matrice de colonnes $X_1, \bar{X}_1, \dots, X_p, \bar{X}_p$ alors $Q^{-1}AQ$ est diagonale de diagonale $z, \bar{z}, \dots, z, \bar{z}$. La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique P et elle est semblable sur \mathbb{C} à la matrice diagonale de diagonale z, \bar{z} : il existe $R \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $R^{-1}CR = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$. En considérant la matrice M constituée de p blocs B et la matrice diagonale par blocs S constituée de p blocs R , on a $S^{-1}MS$ diagonale de diagonale z, \bar{z} p fois. Les matrices A et M sont donc semblables dans $M_n(\mathbb{C})$. Puisqu'elles sont toutes les deux dans $M_n(\mathbb{R})$, elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13.45

On note $B = A^2 - 2A$. La matrice est diagonalisable : si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres, alors

$$M_{n1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(B - \lambda_k I_n) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(A^2 - 2A - \lambda_k I_n).$$

Soit $P_k = X^2 - 2X - \lambda_k$. On voudrait appliquer le théorème de décomposition des noyaux à $\ker P_k(A)$. Pour cela il suffit que P possède deux racines distinctes. Son discriminant est $4 + 4\lambda$. Si $\lambda \neq -1$, alors on peut noter α_k et β_k les deux racines de P_k . On a alors $\ker(A^2 - 2A - \lambda_k I_n) = \ker(A - \alpha_k I_n) \oplus \ker(A - \beta_k I_n)$.

On s'intéresse au cas $\lambda = -1$. Cela revient à étudier $\ker(A - I_n)^2$. Or 1 n'est pas valeur propre de A donc $A - I_n$ est bijective, donc $(A - I_n)^2$ aussi et le cas $\lambda = -1$ ne peut se produire (on a $\ker(A - I_n)^2 = \{0\}$). Finalement

$$M_{n1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=1}^p (\ker(A - \alpha_k I_n) \oplus \ker(A - \beta_k I_n)).$$

L'espace est somme d'espaces propres de A (certains termes de la somme sont éventuellement nuls), donc A est diagonalisable.

Exercice 13.46

Notons f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B . Les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Puisque χ_A est scindé à racines simples, A et f sont diagonalisables et chaque espace propre est de dimension 1. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (2 à 2 distinctes) de f et e_1, \dots, e_n une base de vecteurs propres associée. L'espace propre $E_i = \text{Vect}(e_i)$ est stable par g , ce qui signifie que $g(e_i)$ est colinéaire à e_i . La base est aussi une base de vecteurs propres pour g : les deux endomorphismes sont simultanément diagonalisables. En revenant aux matrices, il existe une matrice inversible Q telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$ où D est diagonale de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et Δ diagonale de diagonale μ_1, \dots, μ_n . Dire que $B = P(A)$ revient à dire que $\Delta = P(D)$, ce qui se ramène aux conditions $\mu_i = P(\lambda_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Puisque les valeurs λ_i sont deux à deux distinctes, les polynômes d'interpolation de Lagrange permettent d'obtenir une solution - avec unicité sur P si on lui impose un degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Exercice 13.47

- Notons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ les valeurs propres distinctes (et réelles) de A . Soit Q une matrice inversible telle que $Q^{-1}AQ = D$ où D est la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}.$$

On a alors $Q^{-1}A^{2p+1}Q = D^{2p+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2p+1} I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k^{2p+1} I_{n_k} \end{pmatrix}$. L'application $t \mapsto t^{2p+1}$ est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , donc les réels λ_i^{2p+1}

sont deux à deux distincts. On considère le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(\lambda_i^{2p+1}) = \lambda_i$ pour $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$. Ce polynôme existe car les points d'interpolation sont deux à deux distincts. On a alors $P(A^{2p+1}) = QP(D^{2p+1})Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$ par construction de P .

- En reprenant le polynôme de la question précédente, on a $A = P(A^{2p+1}) = P(B^{2p+1})$. Ainsi A est un polynôme en B . On en déduit que A et B commutent. Si Q est une matrice inversible telle que $Q^{-1}BQ$ est diagonale, alors $Q^{-1}B^{2p+1}Q$ est diagonale et $P(Q^{-1}B^{2p+1}Q) = Q^{-1}P(B^{2p+1})Q = Q^{-1}AQ$ est diagonale. Les matrices A et B sont donc simultanément diagonalisables (on aurait pu le montrer en utilisant le résultat montré en exercice : si deux matrices sont diagonalisables et commutent alors elles sont simultanément diagonalisables). On a donc $Q^{-1}AQ$ matrice diagonale de diagonale $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $Q^{-1}BQ$ matrice diagonale de diagonale β_1, \dots, β_n . Puisque $A^{2p+1} = B^{2p+1}$, on obtient $\alpha_i^{2p+1} = \beta_i^{2p+1}$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. De nouveau, par bijectivité, on en déduit que $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i . On a montré que $A = B$.

- Avec $A = I_n$ et $B = -I_n$, on a $A^2 = B^2 = I_n$, les matrices sont diagonalisables mais pas égales.

Exercice 13.48

- 1) \Rightarrow 2) : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Le polynôme X^p est donc annulateur. La seule valeur propre de A est donc 0 (A admet au moins une valeur propre car on travaille dans un \mathbb{C} -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$). La matrice A est trigonalisable, avec sur la diagonale les valeurs propres de A . Ainsi A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.
- 2) \Rightarrow 3) : A est semblable à T triangulaire supérieure de diagonale nulle, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à T^k . La matrice T^k reste triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc est de trace nulle. Ainsi $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(T^k) = 0$.
- 3) \Rightarrow 1) : pas du tout évident... on montre d'autres implications.
- 3) \Rightarrow 2) : A est semblable à T triangulaire supérieure. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et n_1, \dots, n_p leurs multiplicités respectives. On obtient facilement $\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^p n_i \lambda_i^k$. Les $p \leq n$ premières équations donnent un système qu'on écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^p & \dots & \lambda_p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} = 0.$$

Le déterminant de la matrice est $\lambda_1 \dots \lambda_p$ multiplié par un déterminant de Vandermonde. Si aucune valeur propre n'est nulle, la matrice est inversible, tous les n_i sont nuls, ce qui est impossible puisque la somme des multiplicités vaut n . L'une des valeurs propres est nulle. Quitte à renuméroter, on peut supposer que c'est la dernière. On écrit alors les $p-1$ premières équations, sans λ_p , ni n_p . Par les arguments précédents, on obtient que toutes les autres multiplicités sont nulles. Finalement A n'a qu'une valeur propre, 0, de multiplicité n . Par trigonalisation, on obtient 2).

- 2) \Rightarrow 1) : le polynôme caractéristique de A est X^n . Il est annulateur, donc $A^n = 0$ et A est nilpotente.

Exercice 13.49

On a $f + g = (\text{Id} + g f^{-1}) \cdot f$. On note $h = g f^{-1}$. L'endomorphisme $f + g$ est inversible si et seulement si $\text{Id} + h$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de h . L'endomorphisme h est de rang 1. L'espace propre associé à la valeur propre 0 est donc de dimension $n-1$. Si on prend une base du noyau de h et qu'on la complète en une base \mathcal{B} , alors la matrice de h dans cette base commence par $n-1$ colonne de 0 et se termine par une dernière colonne. On note α le coefficient en position (n, n) :

$$M_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & x \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

On a alors $\alpha = \text{tr}(h)$ et -1 n'est pas valeur propre pour h si et seulement si $\text{th} h \neq -1$.

Remarque : à partir de cette réduction, on peut écrire la matrice de $\text{Id} + h$ dans la même base et obtenir que $\det(\text{Id} + h) = 1^{n-1}(1 + \text{tr} h)$ ce qui redonne le résultat.

Exercice 13.50

On note a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B . On a donc la relation $a \circ b = 0$ et ainsi $\text{Im } b \subset \ker a$. L'idée est la même qu'habituellement : on va déterminer un vecteur propre commun à a et b afin de commencer la trigonalisation, puis on achève par récurrence sur la dimension des matrices (avec des matrices de passage par blocs).

- si B est nulle alors a admet un vecteur propre x et ce vecteur est automatiquement propre pour b (puisque $b(x) = 0 = 0 \cdot x$).
- Si B est non nulle. Soit $F = \text{Im } b$. Cet espace est stable par b et est de dimension au moins 1. On peut donc considérer l'endomorphisme \tilde{b} induit par b sur F . Il admet un polynôme caractéristique de degré au moins 1, admet une valeur propre complexe et ainsi un vecteur $x \neq 0$ dans F tel que $b(x) = \lambda x$. Ce vecteur est dans $F = \text{Im } b \subset \ker a$ donc $a(x) = 0$.

Dans toutes les situations, on a donc déterminé un vecteur propre commun à a et b . Il existe donc Q inversible telle que

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix} \text{ ou } A = Q \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

et

$$Q^{-1} B Q = \begin{pmatrix} \beta & L' \\ (0) & \tilde{B} \end{pmatrix} \text{ ou } B = Q \begin{pmatrix} \beta & L' \\ (0) & \tilde{B} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

La relation $AB = Q \begin{pmatrix} \alpha\beta & M \\ (0) & \tilde{A}\tilde{B} \end{pmatrix} Q^{-1} 0$ donne alors $\tilde{A}\tilde{B} = 0$. On peut donc poursuivre la démonstration par récurrence. Si la propriété est vraie en dimension $n-1$, alors il existe $R \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $R^{-1} \tilde{A} R$ et $R^{-1} \tilde{B} R$ sont triangulaires supérieures. En considérant $P = Q \cdot \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix}$, alors $P^{-1} A P$ et $P^{-1} B P$ sont triangulaires supérieures :

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1} A Q \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & N \\ (0) & R^{-1} \tilde{A} R \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.51

La matrice est sous la forme $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On détermine le polynôme caractéristique (on développe par rapport à la dernière colonne) :

$$\begin{vmatrix} X-1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & X-1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X-1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{vmatrix} + (X-1)^n$$

En soustrayant à chaque colonne la colonne suivante dans ce nouveau déterminant, on obtient

$$\begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & X-1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X-1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & X-1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -X & X-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-X)^{n-2} = (-1)^{n-1} X^{n-2}$$

Finalement $P_n = \chi_{A_n} = (X-1)^n - X^{n-2}$

2.
3. On vérifie que λ_n tend vers $+\infty$: si on fixe $A > 1$, $P_n(A) = (A-1)^n - A^{n-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -A^{n-2}$ et $P_n(A)$ tend vers $-\infty$. À partir d'un certain rang tous les λ_n sont supérieurs à A . On a alors

$$(\lambda_n - 1)^n = \lambda_n^{n-2} \Leftrightarrow n \ln(\lambda_n - 1) = (n-2) \ln(\lambda_n) \Leftrightarrow -2 \ln \lambda_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

ce qui donne $2 \ln \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\lambda_n}$ ou encore $2 \lambda_n \ln \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$. Les limites étant infinies, les logarithmes sont équivalents. Or $\ln(2 \lambda_n \ln \lambda_n) = \ln 2 + \ln \lambda_n + \ln(\ln \lambda_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \lambda_n$ donc $\ln \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ et en remplaçant dans $2 \lambda_n \ln \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, on obtient $\lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2 \ln n}$.

Exercice 13.52

1. La matrice B est la matrice de la transposition $\tau = \tau_{1,2}$. On note σ le cycle $(12\dots n)$. La question est donc de savoir quel est le groupe engendré par τ et σ . On peut montrer qu'on peut obtenir toutes les transpositions et finalement toutes les permutations. En effet, $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ est la transposition τ_{23} , $\sigma^k \circ \tau \circ \sigma^{-k}$ est la transposition $\tau_{k,k+1}$ si $k < n$ et $\tau_{n,1}$ si $k = n$. On a donc toutes les transpositions $\tau_{i,i+1}$. À partir de ces permutations, on peut créer toutes les transpositions, puis toutes les permutations.
2. (G, \times) est donc isomorphe à (\mathfrak{S}_n, \circ) . Pour tout $g \in G$, on a $g^{n!} = I_n$ et $X^{n!} - 1$ est un polynôme annulateur de g . Les racines réelles sont ± 1 . Ainsi g sera diagonalisable si et seulement si $X^2 - 1$ est annulateur donc si $g^2 = I_n$ (ce sont des produits de transpositions à support disjoint : un élément a de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est envoyé sur un autre élément b , qui revient à a avec g (sauf si $b = a$, c'est-à-dire lorsque a est un point fixe).

Exercice 13.56

On a $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. En outre, le rang de $A - \lambda_i I_n$ est au moins $n-1$ car les lignes 1 à $n-1$ sont « échelonnées ». Donc chaque espace propre est de dimension 1 et A est diagonalisable si et seulement si les λ_i sont deux à deux distincts.

Exercice 13.57

1. Cela revient à dire que, pour tout $X \neq 0$, il existe λ_X tel que $AX = \lambda_X X$. On note E_1, \dots, E_n la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $AE_i = \lambda_i E_i$. On note $X = E_1 + \dots + E_n$ et μ tel que $AX = \mu X$. En développant et en utilisant l'unicité de l'écriture dans une base, on en déduit que tous les λ_i sont égaux à μ et ainsi $A = \mu I_n$ (les deux coïncident sur une base).
2. On montre que A stabilise tout sous-espace de dimension $k-1$ ce qui permet de conclure par récurrence. Prenons H un sous-espace de dimension $k-1$ de $E = M_{n,1}(\mathbb{C})$. Le sous-espace H est de codimension au moins 2 donc on peut trouver deux vecteurs non nuls et non colinéaires X, Y tels que $X \notin H, Y \in H$. Alors A stabilise $H \oplus \mathbb{K}X$ et $H \oplus \mathbb{K}Y$ donc stabilise l'intersection, c'est-à-dire H . Si donc $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on obtient que A est une matrice d'homothétie en appliquant le lemme. Sinon $k = n$ et on obtient directement que $A = \lambda I_n$.
3. On va démontrer que les matrices qui conviennent sont les matrices d'homothétie non nulles. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui commute

avec tous les éléments de sa classe de conjugaison. On sait que A possède une valeur propre (non nulle) λ et il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$AX = \lambda X$$

Observons que si $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, alors PX est vecteur propre pour λ de PAP^{-1} . Plus précisément, en notant $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ , on a :

$$E_\lambda(PAP^{-1}) = PE_\lambda(A)$$

Comme A et PAP^{-1} commutent, on en déduit que A stabilise $PE_\lambda(A)$. Ceci est vrai pour tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Si $k = \dim E_\lambda(A)$, alors on vient de démontrer que A stabilise tout sous-espace de dimension k de \mathbb{C}^n . En effet, ceci découle du fait que lorsque P parcourt $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, $PE_\lambda(A)$ parcourt tous les sous-espaces de dimension k de \mathbb{C}^n . On conclut alors avec le résultat précédent.