CHAPITRE 14 - FAMILLES SOMMABLES

Exercice 14.1

On sait (exemple du cours) que la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

1. On a $(p+q)^2 = p^2+2pq+q^2 \geqslant p^2+q^2$. Ainsi $\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{(p+q)^{2\alpha}}$. Si $\alpha \leqslant 1$ alors la famille n'est pas sommable.
2. Dans l'autre sens, $(p+q)^2 = p^2+2pq+q^2 \leqslant 2(p^2+q^2)$ et $\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \leqslant \dfrac{2^\alpha}{(p+q)^{2\alpha}}$. Si $\alpha > 1$, la famille est sommable.

En conclusion, la famille $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 14.2

1. Par comparaison série-intégrale, on a $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. La série $\sum R_n$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, soit $\alpha > 2$. On peut alors calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)$. On peut alors écrire cette somme sous forme de somme double $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n}\right)$ avec $a_{k,n} = 0$ si $k \leqslant n$ et $a_{k,n} = \dfrac{1}{k^\alpha}$ sinon. La famille $\left(a_{n,k}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable (l'une des sommes doubles converge et les termes sont positifs ou nuls). On peut la calculer en échangeant l'ordre des sommes :
$$S = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{k^\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Exercice 14.3

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble M_k est fini, sinon en prenant $kM+1$ termes de cet ensemble on aurait une somme finie de termes supérieure à M (on a $\operatorname{card}(M_k) \leqslant Mk$). On a alors
$$\{i \in I, u_i \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} M_k.$$
Cette union dénombrable d'ensemble fini est un ensemble fini ou dénombrable.

Exercice 14.4

On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = x^{2n-1}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(x^{2n-1})^p = \sum_{p=1}^{+\infty}(x^{2n-1})^p$. Si $|x|<1$, alors $\left|\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^{2n-1}$, terme général d'une série convergente. On a donc l'existence de la première somme, ainsi que
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)}.$$
On s'intéresse donc à la famille $\left(x^{p(2n-1)}\right)_{(p,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. On vérifie tout d'abord que la famille est sommable. On justifie la sommation par paquets : à n fixé, $\sum |x|^{p(2n-1)}$ est convergente, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(|x|^{2n-1})^p = \frac{|x|^{2n-1}}{1-|x|^{2n-1}}$, terme général d'une série convergente (même argument qu'au dessus). On peut donc resommer la première somme double :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{p(2n+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} x^p \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2pn} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{1-x^{2p}}.$$

Exercice 14.5

Le terme général de la série est négligeable devant $1/n^2$ ce qui garantit la convergence absolue de la série. On décompose la fraction en éléments simples pour un $n \in \mathbb{N}$ donné : $\dfrac{1}{X(X+1)\dots(X+n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{X+k}$ et on a $\alpha_k = \dfrac{1}{(-k)(-k+1)\dots(-1)(1.2\dots(n-k)} = \dfrac{(-1)^k}{k!(n-k)!}$. Cela donne, pour $z \notin -\mathbb{N}$,
$$\frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(z+k)}$$

ainsi que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(z+k)}\right)$$

L'idée est de pouvoir écrire, en permutants les sommes

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(z+k)}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n\geqslant k} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(z+k)}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} \sum_{n\geqslant k}\frac{1}{(n-k)!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} \sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{m!} = e\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(z+k)}
\end{aligned}$$

Pour justifier ces calculs, il suffit d'avoir la sommabilité de la famille $\left(\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(z+k)}\right)_{n\geqslant k\geqslant 0}$ et pour cela prouver une sommation par paquets de $\left(\frac{1}{k!(n-k)!|z+k|}\right)_{n\geqslant k\geqslant 0}$. On effectue la même que précédemment : d'abord par rapport à n pour $n \geqslant k$ pour k fixé : $s_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k!(n-k)!|z+k|} = \frac{e}{k!|z+k|}$. Enfin $\sum s_k$ converge. Cela termine la preuve.

Exercice 14.6

On propose deux solutions :

1. On considère la famille $\left(\frac{ka_n}{n(n+1)}\right)_{(k,n)\in I}$ où $I = \{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, k\leqslant n\}$. On a une famille à termes positifs. On a la sommabilité dès qu'on l'a sur un ensemble de paquets bien choisis. On prend les termes à n fixé :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{ka_n}{n(n+1)} = \frac{a_n}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{a_n}{2}.$$

   La famille $(\frac{a_n}{2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable (série convergente à termes positifs) donc la famille de départ est bien sommable, de somme $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. On peut alors réaliser une sommation par paquets avec les paquets à k fixé cette fois. Cela donne la somme demandée

2. on se ramène à une série double avec $a_{n,k} = \frac{ka_n}{n(n+1)}$ si $k\leqslant n$ et 0 sinon. On est alors ramené au théorème de permutation sur les séries doubles (en gros même chose qu'au dessus mais avec $s_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{ka_n}{n(n+1)} = \frac{a_n}{2}$.

Exercice 14.7

1. en posant $x = 1-\lambda$, on est amené à calculer

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}x^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}x^{k-n} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$$

   Si on note, pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, alors pour tout $x\in]-1,1[$, on a

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

   Ainsi, pour tout $x\in]-1,1[$, on a $\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$. Si $\lambda\in]0,1[$ alors $1-\lambda\in]0,1[$ et $\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n} = \frac{1}{\lambda^{n+1}}$.

2. On pose pour $n, k\in\mathbb{N}^2$,

$$w_{n,k} = \begin{cases} \binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n}\lambda^k u_k & \text{si} \quad k\geqslant n\\ 0 & \text{si} \quad k<n\end{cases}$$

   On fixe k, on a alors

$$s_k = \sum_{n=0}^{+\infty}|w_{n,k}| = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n}\lambda^k|u_k| = \left(\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\frac{1}{(1-\lambda)^n}\right)(1-\lambda)^k\lambda^k|u_k| = \left(1+\frac{1}{1-\lambda}\right)^k(1-\lambda)^k\lambda^k|u_k| = (\lambda(2-\lambda))^k|u_k|$$

Puisque $\lambda\in[0,1]$, on a $0\leqslant\lambda(2-\lambda)\leqslant 1$ donc $0\leqslant s_k\leqslant|u_k|$. La série $\sum|u_k|$ converge. On a donc la sommabilité puis, avec les mêmes calculs sans valeurs absolues, une somme valant $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda(2-\lambda))^k u_k$.

Exercice 14.8

On a $\zeta(n)-1=\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^n}$. On s'intéresse alors à la somme de la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{k^n}\right)_{k,n\geqslant 2}$. On justifie que la famille est sommable afin de permuter l'ordre de sommation. On note $u_{k,n}=\dfrac{(-1)^n}{k^n}$ et on a $|u_{k,n}|=\dfrac{1}{k^n}$. Pour $k\geqslant 2$ fixé, la série $\displaystyle\sum_n\frac{1}{k^n}$ converge (série géométrique) et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{k^n}=\frac{1}{k^2}\frac{1}{1-1/k}=\frac{1}{k(k-1)}$, terme général d'une série convergente. La famille est donc sommable. Cela justifie l'existence de la somme demandée. On a, de plus, par sommation par paquet (permutation des sommes ici) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(\zeta(n)-1) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}=\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}=\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{k}\right)^n\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\frac{1}{1+1/k}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 14.9

Pour $|x|<1$, on a $\dfrac{x^n}{1-x^n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}x^{nk}$. La somme de départ (elle converge puisque $\left|\dfrac{x^n}{1-x^n}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}|x|^n$) est donc égale à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}x^{nk}$.
On note $I_p=\{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2, xk=p\}$. Les ensembles I_p pour $p\geqslant 1$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$. Sous convert de sommabilité, on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}x^{nk}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{(n,k)\in I_p}x^{nk}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{(n,k)\in I_p}x^{p}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\operatorname{card}(I_p)x^p$$

On remarque que $I_p=\{(n,\frac{p}{n}),n|p\}$ est cardinale $d(p)$. Cela donne le résultat. On justifie la sommabilité en reprenant la somme double de départ avec $|x|$: pour $\in\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}|x|^{np}=\frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ et ce terme équivaut à $|x|^n$ lorsque $n\to+\infty$ donc est le terme général d'une série convergente. La famille est sommable.

Exercice 14.11

La série est à termes positifs, on peut donc effectuer une sommation par paquets afin de déterminer sa nature. On regroupe tous les termes pour lesquels le plus grand diviseur premier est un certain nombre premier. Plus précisément, on note $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. Dire que $q_n=p_j$ signifie que n s'écrit $p_j\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{j}p_i^{\alpha_i}\right)$ où les α_i sont des entiers naturels quelconques. On note alors A_j l'ensemble des entiers pour lesquels le plus grand diviseur premier est p_j. Les ensembles A_j pour $j\in\mathbb{N}^*$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$. On calcule la somme sur l'un de ces ensembles :

$$s_j=\sum_{n\in A_j}\frac{1}{nq_n}=\frac{1}{p_j}\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_j)\in\mathbb{N}^j}\left(\frac{1}{p_j\displaystyle\prod_{i=1}^{j}p_i^{\alpha_i}}\right)=\frac{1}{p_j^2}\prod_{i=1}^{j}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{p_i^k}\right)=\frac{1}{p_j^2}\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_i}},$$

en utilisant des séries géométriques et le théorème de Fubini. Il reste à évaluer la nature de $\sum s_j$ et pour cela, on essaie de majorer s_j. On note $q_j=\displaystyle\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_i}}$. On doit majorer q_j et pour cela plutôt $\ln q_j$:

$$\ln(q_j)=\sum_{i=1}^{j}\ln\frac{p_i}{p_i-1}=\sum_{i=1}^{j}\ln\left(1+\frac{1}{p_i-1}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{p_i-1}$$

Une minoration de p_i par $i+1$ est un peu trop juste : elle donnerait

$$\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{p_i-1}\leqslant\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}=H_j$$

mais alors q_j serait majoré par $\alpha_j=\exp(H_j)=\exp(\ln j+\gamma+o(1))$ avec $\alpha_j\underset{j\to+\infty}{\sim}je^{\gamma}$. On obtient une majoration de s_j par un terme équivalent à $e^{\gamma}\dfrac{j}{p_j^2}$.

- → si on sait que $p_j \underset{j\to+\infty}{\sim} j\ln j$, on peut terminer : le majorant est $\mathrm{O}(\frac{1}{j\ln^2 j})$ terme général d'une série convergente.
- → si on ne veut utiliser que $p_j \geqslant j$, on a besoin d'un majorant plus précis (on a de la marge). Par exemple $p_j \geqslant 2j-1$ si $j \geqslant 2$. Cela donne alors

$$q_j \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2i-2} = 1 + \frac{1}{2} H_{j-1}$$

le majorant de s_j est alors un $\mathrm{O}(\frac{\sqrt{j}}{j^2})$ donc le terme général d'une série convergente.