

CHAPITRE 14 - RÉDUCTION (PREMIÈRE PARTIE)

Exercice 14.1

On vérifie rapidement que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (mais pas de $\mathbb{R}_n[X]$ en général car le degré de $f(P)$ est la plupart du temps strictement supérieur à celui de P). Pour déterminer les éléments propres, on examine l'équation $f(P) = \lambda P$. Si P est de degré exactement n : $P = a_n X^n + \dots$ avec $a_n \neq 0$. Le terme de degré $n+2$ de $f(P) - \lambda P$ est $na_n - 3a_n = (n-3)a_n$. Il doit être nul donc $n = 3$. Un polynôme propre est donc de degré 3. On prend $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$\begin{aligned} f(P) &= (X^3 + X)(3aX^2 + 2bX + c) - (3X^2 - 1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ &= (2b - 3b)X^4 + (c + 3a - 3c + a)X^3 + (2b - 3d + b)X^2 + (c + c)X + d \\ &= -bX^4 + (4a - 2c)X^3 + (3b - 3d)X^2 + 2cX + d \end{aligned}$$

On doit alors résoudre $f(P) = \lambda P$. Par unicité de l'écriture d'un polynôme dans la base canonique, on obtient les équations

$$b = 0; 4a - 2c = \lambda a; 3b - 3d = \lambda b; 2cX = \lambda c; d = \lambda d$$

Ce système d'équations est équivalent à $b = d = 0; (4 - \lambda)a = 2c; (2 - \lambda)c = 0$.

- si λ ne vaut ni 2, ni 4 alors a et c sont aussi nuls et $P = 0$.
- si $\lambda = 2$, il reste $a = c$. Le réel 2 est valeur propre et l'espace propre associé est $\text{Vect}(X^3 + X)$.
- si $\lambda = 4$, alors $c = 0$ et a quelconque. Le réel 4 est valeur propre et l'espace propre associé est $\text{Vect}(X^3)$.

Exercice 14.2

On utilise les opérations par blocs :

$$\begin{aligned} \chi_C(x) &= \begin{vmatrix} xI_n - A & -B \\ -B & xI_n - A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} xI_n - A & -B \\ xI_n - (A+B) & xI_n - (A+B) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} xI_n - (A-B) & -B \\ 0 & xI_n - (A+B) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en effectuant les opérations par blocs $L_2 \rightarrow L_2 + L_1$ puis $C_1 \rightarrow C_1 - C_2$. Le déterminant vaut alors $\det(xI_n - (A+B)) \cdot \det(xI_n - (A-B))$, ce qui donne $\chi_C = \chi_{A+B} \cdot \chi_{A-B}$.

Exercice 14.3

Puisque χ_f est scindé (sur \mathbb{C}), l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre λ . Considérons $F = E_\lambda(f)$. Cet espace est de dimension au minimum 1 et tout vecteur non nul de F est un vecteur propre de f . On montre que g admet un vecteur propre dans F : puisque f et g commutent, F est stable par g . L'endomorphisme induit g_F est un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $\dim F \geq 1$, donc admet une valeur propre μ . Soit x un vecteur propre associé, il vérifie $g_F(x) = g(x) = \mu x$ mais également $f(x) = \lambda x$ puisque $x \in F$. Ainsi f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 14.4

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\text{Sp}A = \{-2, 3\}$ et $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.
2. On effectue le produit avec une matrice quelconque $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Après calcul, on obtient $ND = DN$ si et seulement si $b = c = 0$, soit N est diagonale.
3. Pour déterminer les matrices qui commutent avec A , on effectue la travail « en changeant de base »- on utilise la même relation de similitude : on a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On a $AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec D , c'est-à-dire, $AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$. L'espace des matrices commutant avec A est donc

$$C(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Pour justifier que $C(A) = \text{Vect}(I_2, A)$, on a au moins deux possibilités :

- on effectue les calculs (bof)
- on remarque que $\text{Vect}(I_2, A)$ est contenu dans $C(A)$ et que les deux sous-espaces vectoriels ont même dimension.

Exercice 14.5

- On regarde la dimension de l'espace engendré par l'image de la base e : si $v = 0$ alors le rang de f est nul, sinon il vaut 1.
- Lorsque $v = 0$, f est nulle donc diagonalisable. Sinon $\text{rg} f = 1$ et $\dim \ker f = n - 1$. Ainsi 0 est valeur propre de f d'ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique au moins $n - 1$. On en déduit alors que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, P_f(X) = X^{n-1}(X - \lambda).$$

En examinant le coefficient de degré $n - 1$, on a $\text{tr} f = \lambda$, si bien que $P_f = X^{n-1}(X - \text{tr} f)$. On discute suivant cette trace :

- si $\text{tr} f \neq 0$, alors λ est une seconde valeur propre; elle est de multiplicité 1 donc l'espace propre associé est de dimension 1. La somme des dimensions des espaces propres vaut n et f est diagonalisable.
- si $\text{tr} f = 0$, alors $P_f = X^n$. La valeur propre 0 est de multiplicité n et l'espace propre associé est de dimension $n - 1$. L'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

Exercice 14.9

- Par un simple développement par rapport à la première colonne, on trouve $\chi_{J_n} = X^n - 1$. Ce polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans \mathbb{C} . La matrice est diagonalisable avec n valeurs propres simples qui sont les racines n -ièmes de l'unité. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Il existe P inversible telle que $J_n = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$.
- Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à J_n . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de \mathbb{C}^n , alors $f(e_i) = e_{i-1}$ avec la convention $e_k = e_{n-k}$ si $k \leq 0$. On en déduit que J_n^k est une matrice du même type avec la diagonale de 1 qui se déplace, jusqu'à $J_n^n = I_n$. On en déduit que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k = Q(J_n)$ où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Puisque $J_n = PDP^{-1}$, on a $J_n^k = PD^k P^{-1}$ ainsi que $A = Q(J_n) = PQ(D)P^{-1}$. On en déduit que

$$\det A = \det Q(D) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k).$$

Exercice 14.10

- Il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de p est diagonale $\begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r} \end{pmatrix}$. La matrice de $\text{Id}_E + \lambda p$ dans cette base est alors $\begin{pmatrix} (1 + \lambda)I_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $(1 + \lambda)^r$.
- Si V est nul, alors $\text{rg} B = 0$, sinon la matrice B a toutes ses colonnes proportionnelles et $\text{rg} B = 1$.
- La matrice B est symétrique réelle donc diagonalisable. On peut le faire sans utiliser cela. Le réel 0 est valeur propre avec un sous-espace propre de dimension $n - 1$. La multiplicité de la racine est donc au moins $n - 1$ et $\chi_B = X^{n-1}(X - \alpha)$. En développant, on trouve que $\alpha = \text{tr} B = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$. Finalement B admet deux valeurs propres, 0 avec un espace propre de dimension $n - 1$ et $\sum_{i=1}^n a_i^2$ avec un espace propre de dimension 1. La matrice B est diagonalisable.
- On note $\alpha = \text{tr} B = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$. On remarque que $M = I_n + B$. On peut s'inspirer de la première question pour obtenir un déterminant $1 + \alpha$. On peut aussi remarquer que $B/\alpha = C$ est la matrice d'un projecteur de rang 1. Ainsi $M = I + \alpha C$ et on retrouve le déterminant directement avec la question 1.

Exercice 14.11

- on discute suivant la dimension du sous-espace stable :
 - les seuls espaces stables de dimension 0 et 3 sont respectivement $\{0\}$ et \mathbb{R}^3 .
 - les sous-espaces stables de dimension 1 sont les droites dirigées par un vecteur propre. On détermine les espaces propres de M . On trouve une seule valeur propre réelle qui est 1 et un espace propre associé qui est la droite dirigée par $(1, 1, 1)$. Cette droite est donc la seule droite stable par M .
 - Un plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable si et seulement si le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^t A$. La matrice a les mêmes valeurs propres que A . L'espace propre associé est $\text{Vect}((1, 0, 1))$. Ainsi le seul plan stable est le plan d'équation $x + z = 0$.
- C'est le cas ici car la droite propre et le plan stable sont supplémentaires (le vecteur $(1, 1, 1)$ n'est pas dans le plan).

Exercice 14.12

- on justifie que F est définie et continue sur \mathbb{R}^+ . Soit H une primitive de f sur \mathbb{R}^+ (f est continue sur \mathbb{R}^+). Pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{H(x) - H(0)}{x - 0}$ donc F est continue sur \mathbb{R}^+ et $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = H'(0) = f(0)$. Ainsi F est continue sur \mathbb{R}^+ et T est bien une application de E dans E .

→ on prouve la linéarité : soient f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $T(f + \lambda g)(0) = (f + \lambda g)(0) = (Tf + \lambda Tg)(0)$. Si $x > 0$, alors on a également, par linéarité de l'intégrale, $T(f + \lambda g)(x) = (Tf + \lambda Tg)(x)$. Finalement $T(f + \lambda g) = Tf + \lambda Tg$ est T est un endomorphisme de E .

2. Soit λ une valeur propre de T et $f \neq 0$ telle que $Tf = \lambda f$. On a $f(0) = \lambda f(0)$ et, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lambda f(x)$. La première relation donne $\lambda = 1$ ou $f(0) = 0$. On s'intéresse à la seconde. La fonction Tf est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ donc λf également.

→ si $\lambda = 0$, alors pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 0$ donc, pour tout $x > 0$, $\int_0^x f(t) dt = 0$ et en dérivant f est nulle sur \mathbb{R}_+^* donc sur \mathbb{R}^+ par continuité. Le réel $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.

→ si $\lambda \neq 0$, en divisant par λ , on obtient que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . On a alors, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x).$$

On peut dériver et obtenir, pour tout $x > 0$, $f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x)$ et ainsi f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$x y' + (1 - \frac{1}{\lambda}) y = 0$$

On résout cette équation sur \mathbb{R}_+^* : il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = A \exp\left(-\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln x\right) = Ax^{\frac{1}{\lambda}-1}$. On veut que f soit continue sur \mathbb{R}_+ ce qui impose $\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0$ soit $0 < \lambda \leq 1$. Réciproquement ces fonctions conviennent.

Bilan : les valeurs propres de T sont les réels dans $]0, 1]$ et pour $\lambda \in]0, 1]$, l'espace propre associé est $\text{Vect}(f_\lambda)$ où $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Exercice 14.13

On cherche à résoudre l'équation $p \circ f + f \circ p = \lambda f$. Ce n'est pas immédiat sous cette forme (mais faisable). On voit mieux ce qu'il se passe matriciellement. On choisit une base \mathcal{B} de E adaptée au projecteur p : on a $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $F = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (avec les tailles correspondantes). On écrit la relation $FP + PF = \lambda F$. On obtient

$$\begin{pmatrix} 2A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} (2-\lambda)A & (1-\lambda)B \\ (1-\lambda)C & -\lambda D \end{pmatrix} = 0.$$

Si λ est différent de 0, 1 et 2, alors $F = 0$.

→ cas $\lambda = 0$: on a $A = B = C = 0$ et D quelconque. On en déduit que E_0 est de dimension $(n-r)^2$, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

→ cas $\lambda = 1$: on trouve que E_1 est de dimension $2r(n-r)$, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

→ cas $\lambda = 2$: on trouve que E_2 est de dimension r^2 , constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La somme des dimensions des espaces propres est $(r+n-r)^2 = n^2$. L'application est diagonalisable.

Exercice 14.14

On note $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ainsi que $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ une base de vecteurs propres pour B , associés aux valeurs propres α et β . On note enfin (Y_1, \dots, Y_n) une base de vecteurs propres pour A associés aux valeurs propres μ_1, \dots, μ_n . On cherche un vecteur propre pour A sous la forme conseillée :

$$M. \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aAX_1 + bAX_2 \\ cAX_1 + dAX_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

On se doute qu'on va créer des vecteurs propres en utilisant les vecteurs propres de A . Si on essaie avec $X_1 = X_2 = Y_i$, on obtient

$$M. \begin{pmatrix} Y_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)\mu_i Y_i \\ (c+d)\mu_i Y_i \end{pmatrix},$$

mais ce vecteur n'est pas, en général, colinéaire à $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$ (c'est pire si on choisit $X_1 = Y_i$ et $X_2 = Y_j$ avec $i \neq j$). On change légèrement ce vecteur en

le cherchant sous la forme $\begin{pmatrix} k_1 Y_1 \\ k_2 Y_1 \end{pmatrix}$. On obtient

$$M. \begin{pmatrix} k_1 Y_1 \\ k_2 Y_1 \end{pmatrix} = \mu_i \begin{pmatrix} (ak_1 + bk_2) Y_1 \\ (ck_1 + dk_2) Y_1 \end{pmatrix},$$

et dire que ce vecteur est propre revient à dire que $\begin{pmatrix} ak_1 + bk_2 \\ ck_1 + dk_2 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$, donc que ce dernier vecteur est un vecteur propre de B . On va alors considérer les n vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 Y_i \\ y_1 Y_i \end{pmatrix}$, propres pour M pour la valeur propre $\alpha\mu_i$ et les n vecteurs $\begin{pmatrix} x_2 Y_i \\ y_2 Y_i \end{pmatrix}$, propres pour M pour la valeur propre $\beta\mu_i$. Il reste à montrer que ces $2n$ vecteurs sont linéairement indépendants pour obtenir une base de vecteurs propres de M . On effectue une combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^n c_i \begin{pmatrix} x_1 Y_i \\ y_1 Y_i \end{pmatrix} + d_i \begin{pmatrix} x_2 Y_i \\ y_2 Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (c_i x_1 + d_i x_2) Y_i \\ \sum_{i=1}^n (c_i y_1 + d_i y_2) Y_i \end{pmatrix} = 0.$$

Par indépendance de la famille (Y_1, \dots, Y_n) , on obtient les $2n$ équations $c_i x_1 + d_i x_2 = 0$ et $c_i y_1 + d_i y_2 = 0$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, c'est-à-dire les n systèmes

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice étant inversible (base de vecteurs propres pour B), les scalaires c_i et d_i sont nuls. Cela termine la démonstration.

Exercice 14.15

- On montre facilement que φ est un endomorphisme de E (la seule petite difficulté est de justifier que les éventuels termes de degré $2n+1$ disparaissent).
- On pourrait écrire la matrice de l'endomorphisme dans la base canonique, mais cela ne donne rien de bien intéressant. Soit P un polynôme non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$. on va considérer cette relation comme une équation différentielle sur $]1, +\infty[$ (on peut identifier polynôme et fonction polynôme sur un tel intervalle - la résolution de l'équation différentielle se fait facilement sur un intervalle sur lequel $(x^2 - 1)$ ne s'annule pas, et on choisit $]1, +\infty[$ pour que $x-1$ et $x+1$ soient positifs. Ainsi $\varphi(P) = \lambda P$ si, et seulement si,

$$\forall x \in]1, +\infty[, (x^2 - 1)P'(x) = (2nx + \lambda)P(x).$$

On décompose la fraction rationnelle :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \frac{2nx + \lambda}{x^2 - 1} = \frac{n + \lambda/2}{x-1} + \frac{n - \lambda/2}{x+1}.$$

Cela donne, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$P(x) = C \exp\left(\left(n + \frac{\lambda}{2}\right)(x-1) + \left(n - \frac{\lambda}{2}\right)(x+1)\right) = C(x-1)^{n+\lambda/2}(x+1)^{n-\lambda/2}.$$

On n'obtient pas forcément un polynôme. C'est le cas lorsque $n \pm \frac{\lambda}{2}$ sont deux entiers. Puisque la somme des deux exposants vaut $2n$, il suffit que l'un soit un entier entre 0 et $2n$ pour que l'autre le soit également. Supposons que $\lambda/2 = p \in \llbracket -n; n \rrbracket$. On a $\lambda_p = 2p$ qui est valeur propre avec des polynômes propres associés $P = C(X-1)^{n+p}(X+1)^{n-p}$. On obtient ainsi $2n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, avec pour chacune un espace propre de dimension 1. Puisque E est de dimension $2n+1$, on en déduit que φ est diagonalisable, possède $2n+1$ valeurs propres simples et chaque espace propre est de dimension 1.

Exercice 14.16

1. Soit $x = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de V pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela revient à $V \cdot x = \lambda x$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} Y & = & \lambda X \\ UX & = & \lambda Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y & = & \lambda X \\ UX & = & \lambda^2 X \end{cases}$$

Pour que λ soit valeur propre de V , il faut que λ^2 soit valeur propre de U , de plus si X est vecteur propre de U pour λ^2 , alors le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour V . Réciproquement soit μ une valeur propre de U pour le vecteur propre de X . Si λ est une racine carrée de

μ , on pose $x = \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$. On a alors

$$Vx = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ U & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ \lambda^2 X \end{pmatrix} = \lambda x.$$

On a en fait prouvé que l'application

$$\begin{cases} E_\delta(V) & \rightarrow & E_{\delta^2}(U) \\ \begin{pmatrix} X \\ \delta X \end{pmatrix} & \mapsto & X \end{cases}$$

est un isomorphisme.

2. → Chaque vecteur propre de U pour une valeur propre λ non nulle (on note δ tel que $\delta^2 = \lambda$) donne un vecteur propre pour V pour la valeur propre δ , à savoir $\begin{pmatrix} X \\ \delta X \end{pmatrix}$ et un pour la valeur propre $-\delta$, $\begin{pmatrix} X \\ -\delta X \end{pmatrix}$. Supposons que U soit diagonalisable et inversible (0 n'est pas

valeur propre de U). Considérons une base de vecteurs propres de U , (X_1, \dots, X_n) associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda^2$. On note δ_i une racine de λ_i . On va montrer que la famille

$$\left(\begin{array}{c} X_1 \\ \delta_1 X_1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} X_n \\ \delta_n X_n \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} X_1 \\ -\delta_1 X_1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} X_n \\ -\delta_n X_n \end{array} \right),$$

est une base de $M_{2n}(\mathbb{C})$. Considérons une combinaison linéaire de ces vecteurs, avec des coefficients $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. La relation donne

$$\begin{cases} a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b_1 X_1 + \dots + b_n X_n = 0 \\ a_1 \delta_1 X_1 + \dots + a_n \delta_n X_n - (b_1 \delta_1 X_1 + \dots + b_n \delta_n X_n) = 0. \end{cases}$$

La première équation donne $(a_1 + b_1)X_1 + \dots + (a_n + b_n)X_n = 0$ et la seconde $\delta_1(a_1 - b_1)X_1 + \dots + \delta_n(a_n - b_n)X_n = 0$. L'indépendance linéaire de la famille de vecteurs propres, et le fait que $\delta_i \neq 0$ donnent les équations $a_i + b_i = 0 = a_i - b_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On en déduit que toutes les constantes sont nulles. On a donc obtenu une base de vecteurs propres et V est diagonalisable.

→ Si U est diagonalisable et non inversible. L'étude précédente nous indique qu'il n'y a pas d'autres sous-espaces propres que ceux trouvés en première question. Chaque espace propre de U donne deux espaces propres pour V de même dimension, sauf pour la valeur propre 0 où on obtient un seul sous-espace. La somme des dimensions est alors $2n - \dim E_0(U) < 2n$ et V n'est pas diagonalisable.

Exercice 14.17

On a $(P_1 + iP_2)A = B(P_1 + iP_2)$, ce qui donne en séparant les coefficients réels et imaginaires purs $P_1A = BP_1$ ainsi que $P_2A = BP_2$. On en déduit que $(P_1 + \lambda P_2)A = B(P_1 + \lambda P_2)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Il reste à trouver λ de sorte que la matrice $P_\lambda = P_1 + \lambda P_2$ est inversible. Considérons $f : \lambda \mapsto \det(P_1 + \lambda P_2)$. Cette fonction est polynomiale de degré au plus n , et n'est pas identiquement nulle puisque $f(i) \neq 0$. Elle admet un nombre fini de racines si bien qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) \neq 0$. Pour cette valeur, on a $P_\lambda \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A = P_\lambda^{-1} \cdot B \cdot P_\lambda$.

Exercice 14.18

Soit F la somme directe de tous les sous-espaces propres de u . On doit montrer que $F = E$. Supposons que cela n'est pas le cas. Ce sous-espace est stable par u , il admet donc un supplémentaire G stable par u de dimension au moins 1. L'endomorphisme induit u_G admet alors une valeur propre (G est un \mathbb{C} -espace vectoriel) et un vecteur propre associé x . Ainsi u admet un vecteur propre en dehors de F , ce qui est une contradiction avec la définition de F .

Exercice 14.19

- $\text{rg } A = n$: la matrice A est inversible est $AB = BA = \det(A)I_n$. Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $\lambda \neq 0$ (A est inversible donc 0 n'est pas valeur propre). On a alors $BAX = \lambda BX$, ce qui donne $BX = \frac{\det A}{\lambda} X$, si bien que X est vecteur propre de B .
- $\text{rg } A \leq n - 2$: la matrice B est nulle, donc tous les vecteurs non nuls sont propres pour B .
- $\text{rg } A = n - 1$. On a montré que $\text{rg } B = 1$. Si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ non nulle. On a $AX = \lambda X$ et $BAX = 0 = \lambda BX$. Puisque $\lambda \neq 0$, on en déduit que $BX = 0$ et X est un vecteur propre pour B (pour la valeur propre nulle). Il reste le cas de la valeur propre nulle pour A . Puisque $\text{rg } A = n - 1$, on a $\dim \ker A = 1$. On considère $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. On a $ABX = 0$, ce qui signifie que $BX \in \ker A$. Puisque $\dim \ker A = 1$ et $X \in \ker A$ non nul tout vecteur de $\ker A$ est colinéaire à X , notamment BX est colinéaire à X , ce qui signifie que X est vecteur propre de B .

Exercice 14.20

1. On montre par récurrence que $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$. Considérons l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E) : h \mapsto h \circ g - g \circ h$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(f^k) = kf^k$. Si f^k n'est jamais nul alors k est valeur propre de φ pour tout entier ce qui est impossible (infinité de valeurs propres). Il existe donc k tel que $f^k = 0$.
2. C'est un peu plus compliqué... Supposons que x est un vecteur propre commun à f et $g : f(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$. On a alors $f(g(x)) = \lambda \mu x$ et $g(f(x)) = \lambda \mu x$. Cela donne $(f \circ g - g \circ f)(x) = 0 = f(x)$. Donc x est un vecteur propre pour f pour la valeur propre 0. On va justifier que g admet un vecteur propre dans $\ker f$. Soit $F = \ker f : F$ est de dimension non nulle car f est nilpotente donc non inversible et F est stable par f . On montre que F est stable par g : si $f(x) = 0$, alors $f(x) = 0 = (f \circ g - g \circ f)(x) = f(g(x)) - g(f(x)) = f(g(x))$ donc $g(x) \in \ker f$. On peut donc considérer les endomorphismes induits par f et g sur F . Alors \tilde{g} est un endomorphisme de F de dimension au moins 1 donc \tilde{g} admet au moins une valeur propre complexe et un vecteur propre x dans F . Ce vecteur est automatiquement vecteur propre pour f .
3. On va se ramener au cas précédent. On pose $\tilde{f} = f + kg$, donc $f = \tilde{f} - kg$. On a (on retire les \circ)

$$\tilde{f}g - g\tilde{f} = (fg - gf) = \alpha f + \beta g = \alpha \tilde{f} + (\beta - k\alpha)g$$

On suppose pour commencer que $\alpha \neq 0$ et on choisit $k = \frac{\beta}{\alpha}$. On a alors $\tilde{f}g - g\tilde{f} = \alpha \tilde{f}$. On note $\tilde{g} = \frac{1}{\alpha}g$, ce qui nous ramène à l'équation $\tilde{f}\tilde{g} - \tilde{g}\tilde{f} = \tilde{f}$. Alors il existe un vecteur propre commun aux deux endomorphismes : $\tilde{f}(x) = ax$ et $\tilde{g}(x) = bx$. En revenant à f et g , on obtient assez facilement que x est un vecteur commun à f et g .

Lorsque $\alpha = 0$, l'équation de départ est alors $fg - gf = \beta g$. Si $\beta = 0$, alors f et g commutent et ont un vecteur propre commun (voir un autre exercice classique). Sinon, on pose $\tilde{f} = -\frac{1}{\beta}f$ pour se ramener à $g\tilde{f} - \tilde{f}g = g$ et ainsi au problème précédent (en permutant le rôle de f et g).

Exercice 14.21

Notons f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B . Les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Puisque χ_A est scindé à racines simples, A et f sont diagonalisables et chaque espace propre est de dimension 1. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (2 à 2 distinctes) de f et e_1, \dots, e_n une base de vecteurs propres associée. L'espace propre $E_i = \text{Vect}(e_i)$ est stable par g , ce qui signifie que $g(e_i)$ est colinéaire à e_i . La base est aussi une base de vecteurs propres pour g : les deux endomorphismes sont simultanément diagonalisables. En revenant aux matrices, il existe une matrice inversible Q telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$ où D est diagonale de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et Δ diagonale de diagonale μ_1, \dots, μ_n . Dire que $B = P(A)$ revient à dire que $\Delta = P(D)$, ce qui se ramène aux conditions $\mu_i = P(\lambda_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Puisque les valeurs λ_i sont deux à deux distinctes, les polynômes d'interpolation de Lagrange permettent d'obtenir une solution - avec unicité sur P si on lui impose un degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Exercice 14.22

On a $f + g = (\text{Id} + gf^{-1}) \cdot f$. On note $h = gf^{-1}$. L'endomorphisme $f + g$ est inversible si et seulement si $\text{Id} + h$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de h . L'endomorphisme h est de rang 1. L'espace propre associé à la valeur propre 0 est donc de dimension $n - 1$. Si on prend une base du noyau de h et qu'on la complète en une base \mathcal{B} , alors la matrice de h dans cette base commence par $n - 1$ colonne de 0 et se termine par une dernière colonne. On note α le coefficient en position (n, n) :

$$M_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & x \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

On a alors $\alpha = \text{tr}(h)$ et -1 n'est pas valeur propre pour h si et seulement si $\text{th} h \neq -1$.

Remarque : à partir de cette réduction, on peut écrire la matrice de $\text{Id} + h$ dans la même base et obtenir que $\det(\text{Id} + h) = 1^{n-1}(1 + \text{tr} h)$ ce qui redonne le résultat.

Exercice 14.23

La matrice est trigonalisable. Puisque son rang est 2, l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension $n - 2$ et A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale $\alpha, \beta, 0, \dots, 0$. On a alors

$$\chi_A = X^{n-2}(X - \alpha)(X - \beta) = X^{n-2}(X^2 - (a + b)X + ab).$$

De plus $\text{tr} A = \alpha + \beta + (n - 2) \cdot 0$ et $\text{tr} A^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (n - 2) \cdot 0^2$. On en déduit que $(\text{tr} A)^2 - \text{tr}(A^2) = 2\alpha\beta$. Finalement, $\chi_A = X^{n-2} \left(X^2 - (\text{tr} A)X + \frac{(\text{tr} A)^2 - \text{tr}(A^2)}{2} \right)$.

Exercice 14.24

On note a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B . On a donc la relation $a \circ b = 0$ et ainsi $\text{Im } b \subset \ker a$. L'idée est la même qu'habituellement : on va déterminer un vecteur propre commun à a et b afin de commencer la trigonalisation, puis on achève par récurrence sur la dimension des matrices (avec des matrices de passage par blocs).

- si B est nulle alors a admet un vecteur propre x et ce vecteur est automatiquement propre pour b (puisque $b(x) = 0 = 0 \cdot x$).
- Si B est non nulle. Soit $F = \text{Im } b$. Cet espace est stable par b et est de dimension au moins 1. On peut donc considérer l'endomorphisme \tilde{b} induit par b sur F . Il admet un polynôme caractéristique de degré au moins 1, admet une valeur propre complexe et ainsi un vecteur $x \neq 0$ dans F tel que $b(x) = \lambda x$. Ce vecteur est dans $F = \text{Im } b \subset \ker a$ donc $a(x) = 0$.

Dans toutes les situations, on a donc déterminé un vecteur propre commun à a et b . Il existe donc Q inversible telle que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix} \text{ ou } A = Q \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

et

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \beta & L' \\ (0) & \tilde{B} \end{pmatrix} \text{ ou } B = Q \begin{pmatrix} \beta & L' \\ (0) & \tilde{B} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

La relation $AB = Q \begin{pmatrix} \alpha\beta & M \\ (0) & \tilde{A}\tilde{B} \end{pmatrix} Q^{-1} = 0$ donne alors $\tilde{A}\tilde{B} = 0$. On peut donc poursuivre la démonstration par récurrence. Si la propriété est vraie en dimension $n - 1$, alors il existe $R \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $R^{-1}\tilde{A}R$ et $R^{-1}\tilde{B}R$ sont triangulaires supérieures. En considérant $P = Q \cdot \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont triangulaires supérieures :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1}AQ \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & N \\ (0) & R^{-1}\tilde{A}R \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.25

La matrice est sous la forme $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On détermine le polynôme caractéristique (on développe par rapport à la dernière colonne) :

$$\begin{vmatrix} X-1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & X-1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X-1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{vmatrix} + (X-1)^n$$

En soustrayant à chaque colonne la colonne suivante dans ce nouveau déterminant, on obtient

$$\begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & X-1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X-1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & X-1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -X & X-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-X)^{n-2} = (-1)^{n-1} X^{n-2}$$

Finalement $P_n = \chi_{A_n} = (X-1)^n - X^{n-2}$

2.
3. On vérifie que λ_n tend vers $+\infty$: si on fixe $A > 1$, $P_n(A) = (A-1)^n - A^{n-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -A^{n-2}$ et $P_n(A)$ tend vers $-\infty$. À partir d'un certain rang tous les λ_n sont supérieurs à A . On a alors

$$(\lambda_n - 1)^n = \lambda_n^{n-2} \Leftrightarrow n \ln(\lambda_n - 1) = (n-2) \ln(\lambda_n) \Leftrightarrow -2 \ln \lambda_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

ce qui donne $2 \ln \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\lambda_n}$ ou encore $2 \lambda_n \ln \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$. Les limites étant infinies, les logarithmes sont équivalents. Or $\ln(2 \lambda_n \ln \lambda_n) = \ln 2 + \ln \lambda_n + \ln(\ln \lambda_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \lambda_n$ donc $\ln \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ et en remplaçant dans $2 \lambda_n \ln \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, on obtient $\lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2 \ln n}$.

Exercice 14.26

On a $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. En outre, le rang de $A - \lambda_i I_n$ est au moins $n-1$ car les lignes 1 à $n-1$ sont « échelonnées ». Donc chaque espace propre est de dimension 1 et A est diagonalisable si et seulement si les λ_i sont deux à deux distincts.

Exercice 14.27

1. Cela revient à dire que, pour tout $X \neq 0$, il existe λ_X tel que $AX = \lambda_X X$. On note E_1, \dots, E_n la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $AE_i = \lambda_i E_i$. On note $X = E_1 + \dots + E_n$ et μ tel que $AX = \mu X$. En développant et en utilisant l'unicité de l'écriture dans une base, on en déduit que tous les λ_i sont égaux à μ et ainsi $A = \mu I_n$ (les deux coïncident sur une base).
2. On montre que A stabilise tout sous-espace de dimension $k-1$ ce qui permet de conclure par récurrence. Prenons H un sous-espace de dimension $k-1$ de $E = M_{n,1}(\mathbb{C})$. Le sous-espace H est de codimension au moins 2 donc on peut trouver deux vecteurs non nuls et non colinéaires X, Y tels que $X \notin H, Y \in H$. Alors A stabilise $H \oplus \mathbb{K}X$ et $H \oplus \mathbb{K}Y$ donc stabilise l'intersection, c'est-à-dire H . Si donc $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on obtient que A est une matrice d'homothétie en appliquant le lemme. Sinon $k = n$ et on obtient directement que $A = \lambda I_n$.
3. On va démontrer que les matrices qui conviennent sont les matrices d'homothétie non nulles. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui commute avec tous les éléments de sa classe de conjugaison. On sait que A possède une valeur propre (non nulle) λ et il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$AX = \lambda X$$

Observons que si $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, alors PX est vecteur propre pour λ de PAP^{-1} . Plus précisément, en notant $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ , on a :

$$E_\lambda(PAP^{-1}) = PE_\lambda(A)$$

Comme A et PAP^{-1} commutent, on en déduit que A stabilise $PE_\lambda(A)$. Ceci est vrai pour tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Si $k = \dim E_\lambda(A)$, alors on vient de démontrer que A stabilise tout sous-espace de dimension k de \mathbb{C}^n . En effet, ceci découle du fait que lorsque P parcourt $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, $PE_\lambda(A)$ parcourt tous les sous-espaces de dimension k de \mathbb{C}^n . On conclut alors avec le résultat précédent.