CHAPITRE 15 - ESPACES PROBABILISÉS

Exercice 15.1

On note E_i l'événement « provient de l'entreprise i » et D l'événement « un objet est défectueux ». Comme E_1 et E_2 sont incompatibles, d'après la formule des probabilités totales, $P(D) = P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2) = \frac{17}{100}$ On cherche ensuite

$$P(E_2|D) = \frac{P(D|E_2)P(E_2)}{P(D)} = \frac{3}{17}$$

Exercice 15.2

On note $B = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ l'événement recherché. Puisque les événements sont indépendants, leurs complémentaires aussi et ainsi

$$\mathbb{P}(B) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \mathbb{P}\left(A_i\right)\right).$$

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant 1 - x \leqslant e^{-x}$ et ainsi $\mathbb{P}(B) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \exp(-\mathbb{P}\left(A_i\right)) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)\right)$.

Exercice 15.3

1. L'univers Ω est l'ensemble des 6-listes de $\{0,1\}^6$ comportant au plus 5 fois le 1. La tribu est l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$, la probabilité choisie correspond à ce qui est donné par l'énoncé (chaque situation n'est pas équiprobable).
2. On note A_k l'événement : « la boîte contient k chocolats ». La famille $(A_0, \ldots, A_5)$ est un système complet d'événement. On note C_1 l'événement « il y a un chocolat dans le premier compartiment ». On a

$$\mathbb{P}(C_1) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}\left(C_1|A_k\right)\mathbb{P}\left(A_k\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5} \mathbb{P}\left(C_1|A_k\right).$$

Pour déterminer chacune des probabilités conditionnelles, on a un simple problème de dénombrement (équiprobabilité de chaque répartition lorsque le nombre de chocolat est donné). Pour $k \geqslant 1$, le nombre totale de listes de 6 éléments avec k fois 1 est $\binom{6}{k}$ et le nombre totale de listes de 6 éléments avec k fois 1, commençant par 1 est $\binom{5}{k-1}$, d'où

$$\mathbb{P}\left(C_1|A_k\right) = \frac{\begin{pmatrix}5\\k-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}6\\k\end{pmatrix}} = \frac{k}{6}.$$

Finalement $\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{36}(1+2+\ldots+5) = \frac{5*6}{2*6*6} = \frac{5}{12}$

3. On note C_2 l'événement « il y a un chocolat dans le premier compartiment ». On veut déterminer $\mathbb{P}(C_2|C_1) = \frac{\mathbb{P}(C_2 \cap C_1)}{\mathbb{P}(C_1)}$. On détermine de même

$$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}\left(C_1 \cap C_2|A_k\right)\mathbb{P}\left(A_k\right)$$

On a $\mathbb{P}\left(C_1 \cap C_2|A_k\right) = 0$ pour $k = 0$ ou $k = 1$. Pour $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}\left(C_1 \cap C_2|A_k\right) = \begin{pmatrix}4\\k-2\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}6\\k\end{pmatrix} = \frac{k(k-1)}{30}$. On n'a plus qu'à calculer :

$$\mathbb{P}(C_2|C_1) = \frac{12}{5}\sum_{k=2}^{5} \mathbb{P}\left(C_1 \cap C_2|A_k\right)\frac{1}{6} = \frac{1}{5*15}\sum_{k=2}^{5} k(k-1) = \frac{8}{15}.$$

On peut remarquer que $\frac{8}{15} > \frac{5}{12}$

4. On a $\mathbb{P}\left(\overline{C_1}\right) = \frac{7}{12}$, $\mathbb{P}\left(\overline{C_1} \cap C_2|A_k\right) = \frac{\begin{pmatrix}4\\k-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}6\\k\end{pmatrix}} = \frac{k(6-k)}{30}$ et

$$\mathbb{P}\left(C_2|\overline{C_1}\right) = \frac{12}{7}\frac{1}{6*30}\sum_{k=1}^{5} k(6-k) = \frac{2*35}{5*6*7} = \frac{1}{3}$$

Exercice 15.4

1. Notons B_k (resp. V_k l'événement « on tire une boule bleue (resp. verte) au $k$ième tirage » On cherche la probabilité de l'événement $E = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}(V_1 \cap \dots V_{i-1} \cap B_i \cap V_{i+1} \cap \dots \cap V_n)$. Les événements C_i étant incompatibles, $P(E) = \sum_{i=1}^n P(C_i)$. Avec la formule des probabilités composées,
$$P(C_i) = P(V_1) \times P(V_2|V_1) \times \dots \times P(B_i|(V_1 \cap \dots \cap V_{i-1}) \times \dots \times P(V_n|V_1 \cap \dots \cap V_{n-1})$$
d'où
$$P(C_i) = \frac{v}{v+b} \times \dots \times \frac{v}{v+b} \times \frac{b}{v+b} \times \frac{v}{v+b-1} \times \dots \times \frac{v}{v+b-1} = \frac{bv^{n-1}}{(v+b)^i(v+b-1)^{n-i}}$$
et finalement
$$P(E) = \frac{bv^{n-1}}{(v+b-1)^n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{v+b-1}{v+b}\right)^i = \frac{bv^{n-1}}{(v+b-1)^{n-1}}\left[1 - \left(\frac{v+b-1}{v+b}\right)^n\right]$$
2. On a $\mathbb{P}(B_1|V_2) = \dfrac{\mathbb{P}(V_2 \cap B_1)}{\mathbb{P}(V_2)} = \dfrac{\mathbb{P}(V_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(V_2)}$. On a $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{b+v}$, $\mathbb{P}(V_2|B_1) = \dfrac{v}{b+v-1}$. Pour calculer $\mathbb{P}(V_2)$ on utilise la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_2) &= \mathbb{P}(V_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(V_2|V_1)\mathbb{P}(V_1) = \frac{v}{b+v-1}\frac{b}{b+v} + \frac{v}{b+v}\frac{v}{b+v}\\ &= \frac{v}{b+v}\left(\frac{b}{b+v-1} + \frac{v}{b+v}\right)\end{aligned}$$
Cela donne
$$\mathbb{P}(B_1|V_2) = \frac{b}{b+v-1}\frac{1}{\dfrac{b}{b+v-1} + \dfrac{v}{b+v}}$$
Si on note $N = v+b$, on obtient $\mathbb{P}(B_1|V_2) = \dfrac{bN}{N^2 - v}$.

Exercice 15.5

1. On a $X_1 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $p_1 = p$.
2. On exprime a_{n+1} en fonction des suites aux rang n - on note A_n : « le tirage n s'effectue dans l'urne A », et B_n et C_n pour les urnes B et C. On a
$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$$
avec $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) = p$, $\mathbb{P}(A_{n+1}|B_n) = \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n) = \dfrac{1-p}{2}$. Cela donne
$$a_{n+1} = pa_n + \frac{1-p}{2}b_n + \frac{1-p}{2}c_n.$$
On a le même type de résultat pour les autres suites. Avec $M = \begin{pmatrix} p & \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-p}{2} & p & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} & p\end{pmatrix}$, on a la relation $X_{n+1} = MX_n$.
3. On en déduit $X_{n+1} = M^n X_1$. Pour calculer M^n, le plus simple est d'écrire
$$M = \frac{1-p}{2}J_3 + \frac{3p-1}{2}I_3$$
où J est la matrice ne comportant que des 1 et qui vérifie $J^2 = 3J$ et plus généralement $J^k = 3^{k-1}J$ si $k \geqslant 1$. Par la formule du binôme, en notant $\alpha = \dfrac{1-p}{2}$ et $\beta = \dfrac{3p-1}{2}$,
$$\begin{aligned}M^n &= \beta^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}3^{k-1}\beta^k\alpha^{n-k}\right)J = \beta^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}3^k\beta^k\alpha^{n-k} - \alpha^n\right)J\\ &= \beta^n I + \frac{(3\beta+\alpha)^n - \alpha^n}{3}J = \beta^n I + \frac{1-\alpha^n}{3}J\end{aligned}$$
On a alors $X_{n+1} = M^n X_1$, première colonne de M^n, c'est-à-dire
$$X_{n+1} = \begin{pmatrix}\beta^n + \frac{1-\alpha^n}{3} \\ \frac{1-\alpha^n}{3} \\ \frac{1-\alpha^n}{3}\end{pmatrix}$$
On vérifie que $|\alpha| < 1$ et $|beta| < 1$, ce qui donne 3 fois la limite $\frac{1}{3}$ (assez logique)

Exercice 15.6

On se place dans l'univers $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ avec la tribu permettant d'obtenir les événements Pile ou Face au lancer k (événements indépendants) et la probabilité qui correspond.

1. On note F_k l'événement « on obtient Face au lancer k » et P_k l'événement contraire « on obtient Pile au lancer k ». Le lancer k de A correspond au $2k-1$-ème lancer. On veut déterminer
$$\mathbb{P}\left(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_{2k-2} \cap F_{2k-1}\right)$$
Les événements étant indépendants, on a
$$\mathbb{P}\left(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_{2k-2} \cap F_{2k-1}\right) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\ldots\mathbb{P}\left(P_{2k-2}\right)\mathbb{P}\left(F_{2k-1}\right) = (1-p)^{2k-2}p.$$
2. Si on note A_n l'événement « A gagne à son lancer n », et G_A l'événement « A gagne », on a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, cette union étant disjointe. On a par propriété d'une probabilité,
$$\mathbb{P}(G_A) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2n-2}p = p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p}.$$
3. On réalise le même travail sur l'événement G_B : « B gagne ».
$$\mathbb{P}(G_B) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2n-1}p = p(1-p)\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$
LA partie ne se termine pas lorsque aucun des joueurs ne gagne. Cela correspond à l'événement $\overline{G_A \cup G_B}$. Puisque G_A et G_B sont incompatibles, $\mathbb{P}(G_A \cup G_B) = \mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B) = \dfrac{1}{2-p} + \dfrac{1-p}{2-p} = 1$. La non terminaison du jeu est de probabilité nulle.
4. On a $\mathbb{P}(G_B) \geqslant \mathbb{P}(G_A)$ si et seulement si $1-p \geqslant 1$ soit $p \leqslant 0$ ce qui est impossible... il vaut mieux commencer (si la pièce est équilibrée alors $\mathbb{P}(G_A) = \dfrac{2}{3}$).

Exercice 15.7

On modélise le tirage de 2 dès en les distinguant (couleur par exemple). Un tirage est un élément de $[\![1;6]\!]^2$. On a 36 couples possibles. Sur couples, il y en a 4 pour lesquels la somme des dés est 5 et 6 dont la somme est 7. La probabilité d'obtenir une somme 5 à un lancer est $p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ et celle d'avoir 7 est $q = \frac{1}{6}$, celle d'avoir ni 5, ni 7 est $r = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$.

1. On note A_k l'événement « la somme des dés au tirage k est différente de 5 et 7 », B_k : « la somme des dés au tirage k est 5 » et C_k : « la somme des dés au tirage k est 7 ». On veut déterminer $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_n)$. Puisque les tirages sont indépendants, on a
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(B_n) = r^{n-1}p.$$
2. Le jeu s'arrête sur la somme 5 correspond à l'événement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$, la réunion étant disjointe. On a alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n) = \frac{p}{1-r} = \frac{1/9}{5/18} = \frac{2}{5}.$$
3. Même travail avec F_n : « on obtient la somme 7 au lancer n sans avoir obtenu 5 ou 7 avant ». On a $\mathbb{P}(F_n) = r^{n-1}q$ et la probabilité que le jeu s'arrête sur 7 est
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n) = \frac{q}{1-r} = \frac{1/6}{5/18} = \frac{3}{5}.$$
4. Les deux événements précédents sont incompatibles, donc la probabilité que le jeu s'arrête est $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$. La probabilité que le jeu ne s'arrête pas est nulle.

Exercice 15.9

On note J_n : « A_n joue », G_n : « A_n gagne le tournoi ».

1. On a $\mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}(G_n \cap J_n) = \mathbb{P}(G_n|J_n)\mathbb{P}(J_n)$. Or $\mathbb{P}(G_n|J_n) = \dfrac{1}{8}$ (le joueur doit gagner 3 fois de suite). Ainsi, $p_n = \frac{1}{8}q_n$.
2. On a au moins 3 parties, donc les 4 premiers joueurs participent et $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$. On prend $n \geqslant 5$ et on cherche une relation vérifiée par J_n. Si le joueur A_n entre en jeu (à la partie $n-1$), il ne peut rencontrer que les joueurs A_{n-1} ou A_{n-2} (et pas A_{n-3} car sinon il aurait gagné contre A_{n-4}, A_{n-2} et A_{n-1}). On a $J_n = J_{n,n-1} \cup J_{n,n-2}$ où $J_{n,k}$ est l'événement « A_n entre en jeu contre A_k. Ces deux événements sont incompatibles donc $\mathbb{P}(J_n) = \mathbb{P}\left(J_{n,n-1}\right) + \mathbb{P}\left(J_{n,n-2}\right)$. On a $J_{n,n-1}$ qui correspond à « A_{n-1} entre en jeu et gagne sa première partie » de probabilité $\mathbb{P}\left(A_{n-1} \text{ gagne sa première partie} | J_{n-1}\right)\mathbb{P}(J_{n-1}) = \dfrac{1}{2}q_{n-1}$. De même, si on note E=« A_{n-2} gagne sa première partie », F :

« A_{n-2} gagne sa seconde partie », on a

$$\mathbb{P}\left(J_{n,n-2}\right) = \mathbb{P}\left(J_{n-2}\cap E\cap F\right) = \mathbb{P}\left(J_{n-2}\right)\mathbb{P}\left(E|J_{n-2}\right)\mathbb{P}\left(F|(J_{n-2}\cap E\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times q_{n-2} = \frac{1}{4}q_{n-2}.$$

On obtient bien, $q_n = \frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{4}q_{n-2}$ pour $n\geqslant 5$, avec les conditions initiales $q_3 = q_4 = 1$.

3. On a une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Les racines de l'équation caractéristique $r^2 = \frac{1}{2}r+\frac{1}{4}$ sont distinctes et valent $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. On trouve comme solution

$$\forall n\geqslant 3,\, q_n = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(x_1^{n-1}-x_2^{n-1}\right).$$

remarque : les calculs sont pénibles si on écrit les conditions aux rangs 3 et 4 pour déterminer les constantes. Une astuce ici serait de poser w_n une suite qui vérifie la même relation de récurrence pour tout $n\geqslant 2$ avec $w_3 = w_4 = 1$, de calculer w_2, w_1 et w_0 par la relation de récurrence $w_2 = 4w_4-2w_3 = 2$, $w_1 = 4w_3-2w_2 = 0$ et $w_0 = 4w_2-2w_1 = 8$ afin de déterminer w_n pour tout n à partir de w_0 et w_1.

Exercice 15.10

1. On a $D_d = \left\{k.d, k\in\{1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right\}$. Cet ensemble comporte $\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor$ éléments et ainsi $\mathbb{P}\left(D_d\right) = \frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor$. Lorsque $d|n$, cela donne $\mathbb{P}\left(D_d\right) = \frac{1}{d}$.
2. Pour chaque $k\in[\![1\,;r]\!]$, $\mathbb{P}\left(D_{p_k}\right) = \frac{1}{p_k}$. Si on choisit une partie $J\subset[\![1\,;r]\!]$, alors $\bigcap_{j\in J} D_{p_j} = D_q$ où $q = \prod_{j\in J} p_j$ (les nombres sont deux à deux premiers entre eux donc m est divisible par chacun d'eux si et seulement si il est divisible par le produit). On a donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} D_{p_j}\right) = 1/\left(\prod_{j\in J} p_j\right) = \prod_{j\in J}\frac{1}{p_j} = \prod_{j\in J}\mathbb{P}\left(D_{p_j}\right)$$

et les événements sont bien mutuellement indépendants.

3. On a $m\in[\![1\,;n]\!]$ premier avec n si et seulement si m est premier avec chaque diviseur premier de n. Si on note $A = \left\{m\in[\![1\,;n]\!], m\wedge n = 1\right\}$ alors $A = \bigcap_{i=1}^{r}\overline{D_{p_i}}$. On en déduit, par indépendances des événements D_{p_k} et donc de leurs complémentaires, que

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{k=1}^{r}\mathbb{P}\left(\overline{D_{p_k}}\right) = \prod_{k=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

Exercice 15.11

Soit $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ - c'est bien un événement ($\mathcal{T}$ est une tribu). On note $B_N = \bigcap_{n\leqslant N} A_n$. Puisque les événements A_n sont mutuellement indépendants, $\mathbb{P}\left(B_N\right) = \prod_{k=0}^{N}\mathbb{P}\left(A_k\right)$. On a $A = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} B_N$ avec $(B_N)_{N\in\mathbb{N}}$ décroissante pour l'inclusion. On en déduit par propriété de la limite décroissante :

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(B_N\right) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=0}^{N}\mathbb{P}\left(A_k\right).$$

Exercice 15.12

1. fonction du second degré, le maximum est au milieu des deux racines 0 et 1 donc en 1/2 et vaut 1/4.
2. Si A et B sont incompatibles alors $B\subset\overline{A}$. On a $\mathbb{P}\left(B\right)\leqslant 1-\mathbb{P}\left(A\right)$ et $\mathbb{P}\left(()\, A\right)\mathbb{P}\left(B\right)\leqslant\mathbb{P}\left(A\right)\left(1-\mathbb{P}\left(A\right)\right)\leqslant\frac{1}{4}$ d'après la question précédente.
3. (a) On a $\mathbb{P}\left(B\right) = \mathbb{P}\left(B\cap A\right)+\mathbb{P}\left(B\cap\overline{A}\right)$. Cela donne

$$\mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right) = \mathbb{P}\left(B\cap A\right)\mathbb{P}\left(A\right)+\mathbb{P}\left(B\cap\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(A\right)$$

et ainsi

$$\mathbb{P}\left(A\cap B\right)-\mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right) = \mathbb{P}\left(A\cap B\right)\left(1-\mathbb{P}\left(A\right)\right)-\mathbb{P}\left(B\cap\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(A\right) = \mathbb{P}\left(A\cap B\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)-\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)\mathbb{P}\left(A\right)$$

(b) On a donc $\mathbb{P}\left(A\cap B\right)-\mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right)\leqslant\mathbb{P}\left(A\cap B\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\leqslant\frac{1}{4}$ puisque $A\cap B$ et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles. De même, on a

$$\mathbb{P}\left(A\cap B\right)-\mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right)\geqslant -\mathbb{P}\left(B\cap\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(A\right)\geqslant -\frac{1}{4}.$$

Finalement $\left|\mathbb{P}\left(A\cap B\right)-\mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right)\right|\leqslant\frac{1}{4}$.

Remarque : on peut retrouver cette relation à partir des fonctions indicatrices : si A est un événement alors $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$. Ainsi, en utilisant que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$:

$$|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = |\mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)\mathbb{E}(\mathbf{1}_B)| = |\mathrm{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)| \leqslant \sqrt{V(\mathbf{1}_A)V(\mathbf{1}_B)}$$

On a $V(\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(()\,\mathbf{1}_A^2) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)^2 = p - p^2 \leqslant \frac{1}{4}$ si on a posé $p = \mathbb{P}(A)$. On retrouve l'inégalité.

Exercice 15.13

Cela vient des propriétés simples de l'application image réciproque

1. $\mathcal{T}$ est bien contenu dans $\mathscr{P}(\Omega)$ et $\Omega = f^{-1}(\Omega') \in \mathcal{T}$,
2. Soit $A \in \mathcal{T}$. Il existe $B \in \mathcal{T}'$ tel que $A = f^{-1}(B)$. On a alors $\overline{A} = f^{-1}(\overline{B})$. Puisque $\mathcal{T}'$ est une tribu, $\overline{B} \in \mathcal{T}'$ et $\overline{A} = f^{-1}(\overline{B}) \in \mathcal{T}$.
3. On sait que $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ pour toute famille de parties de Ω'. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, il existe pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{T}'$ tel que $A_n = f^{-1}(B_n)$. Alors
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$
Puisque $\mathcal{T}'$ est une tribu, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est dans $\mathcal{T}'$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dans $\mathcal{T}$

Finalement $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω.

Exercice 15.14

1. Si on note $B_m = \bigcap_{m\geqslant n} A_m$, B_m est bien un événement en tant qu'intersection dénombrable d'événements. On a alors $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_m$ qui est un événement en tant qu'union dénombrable d'événements. On a la même chose pour C.
2. On note de nouveau $B_m = \bigcap_{m\geqslant n} A_m$ et $C_j = \bigcup_{p\geqslant j} A_p$ pour j et m entiers. Soit m et j deux entiers. Si on note $i = \max(m, j)$, alors $B_m \subset A_i \subset C_j$. Ainsi, pour tout m et j, on a $B_m \subset C_j$ donc $B_m \subset \bigcap_{j\in\mathbb{N}} C_j = C$. Puisque, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $B_m \subset C$, on a $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m \subset C$, c'est-à-dire $B \subset C$.
Plus précisément, on a les inclusions
$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_k \subset B_{k+1} \subset \ldots \subset B \subset C \subset \ldots \subset C_{j+1} \subset C_j \subset \ldots \subset C_1.$$
3. → On a $\omega \in B$ lorsqu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in B_{m_0}$, c'est-à-dire que $\omega \in A_m$ pour tout $m \geqslant m_0$: ω est dans tous les événements sauf un nombre fini.
→ On a $\omega \in C$ lorsque, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \geqslant m$ tel que $\omega \in A_{n_0}$: ω est dans un nombre infini d'événements.
Avec cela on retrouve que $B \subset C$.

Exercice 15.15

1. (a) On note $C_n = \bigcup_{m\geqslant n} A_m$ et $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Puisque C est l'intersection décroissante des C_n, on a $\mathbb{P}(C) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$. Or $\mathbb{P}(C_n) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_m)$. Le reste d'une série convergente tend vers 0, donc la limite cherchée est nulle.
   (b) L'événement C est de probabilité nulle et C est l'ensemble des éléments ω qui sont dans une infinité des A_n.
2. (a) inégalité de convexité standard.
   (b) On s'intéresse à l'événement contraire $\overline{C}$ et on va montrer que sa probabilité est nulle. On a $\overline{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m\geqslant n} \overline{A_m}\right)$. En tant que réunion croissante, on a $\mathbb{P}(\overline{C}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geqslant n} \overline{A_m}\right)$. On les événemnts A_n étant indépendants, les événements $\overline{A_n}$ le sont aussi. Ainsi, pour $N > n$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n}^{N} \overline{A_m}\right) = \prod_{m=n}^{N} \mathbb{P}\left(\overline{A_m}\right) = \prod_{m=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_m)) \leqslant \prod_{m=n}^{N} \exp(-\mathbb{P}(A_m)) = \exp\left(-\sum_{m=n}^{N} \mathbb{P}(A_m)\right).$$
On a utilisé le fait que $1 - \mathbb{P}(A_m) \geqslant 0$ pour majorer le produit. En passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient $\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geqslant n} \overline{A_m}\right) = 0$.
Finalement, par limite croissante, $\mathbb{P}\left(\overline{C}\right) = 0$.
   (c) On note A_n l'événement « on obtient Pile au lancer n ». Les événements A_n sont indépendants et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = p$. Ainsi $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est divergente. L'événement « on obtient Pile une infinité de fois » est limsup A_n et il est de probabilité 1. Pour la seconde question, on ne peut pas se contenter de considérer les événements $B_n = A_n \cap A_{n+1} \cap \ldots \cap A_{n+m-1}$ car ils ne sont pas indépendants. On découpe en paquet de taille m : on note $B_n = A_{mn} \cap A_{mn+1} \cap \ldots \cap A_{mn+m-1}$. On a $\mathbb{P}(B_n) = p^m$ (constant), les événements B_n sont indépendants et $\sum \mathbb{P}(B_n)$ diverge. La probabilité d'obtenir un nombre infini de séquence de m Piles consécutifs est donc 1.

Exercice 15.16

1. On note S_k l'événement « on n'a pas obtenu 6 au tirage k ». Les événements sont indépendants et $\mathbb{P}(S_k) = \dfrac{5}{6}$ pour tout k. On a $A_n = S_1 \cap \ldots \cap S_n$ d'où $\mathbb{P}(A_n) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
2. On a $F_k = S_1 \cap \ldots \cap S_{k-1} \cap \overline{S_k}$. De nouveau, par indépendance, $\mathbb{P}(F_n) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$.
3. On a $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Par continuité décroissante $\mathbb{P}(K) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
4. On a $\overline{K} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(F_k)$. Puisque les F_k sont disjoints, on a
$$\mathbb{P}\left(\overline{K}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1.$$
On en déduit que $\mathbb{P}(K) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{K}\right) = 0$.
5. Cette question rejoint l'exercice sur les limites supérieures et inférieures.
   → On note R_k l'événement « obtenir 6 au tirage k ». On a $\omega \in G$ si et seulement si, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $k \geqslant N$, $\omega \in R_k$ c'est-à-dire $\omega \in \bigcup\limits_{k\geqslant N} R_k$. En combinant, cela donne
$$G = \bigcap_{N\in\mathbb{N}^*}\left(\bigcup_{k\geqslant N} R_k\right).$$
   De même $\omega \in H$ si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in \bigcap\limits_{k\geqslant N} R_k$ ce qui permet d'écrire
$$H = \bigcup_{N\in\mathbb{N}^*}\left(\bigcap_{k\geqslant N} R_k\right).$$
   → Calcul de $\mathbb{P}(H)$: Les événements R_k sont indépendants. On a $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=N}^{M} R_k\right) = \dfrac{1}{6^{M-N+1}}$ et par continuité décroissante (par rapport à M), on a $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k\geqslant N} R_k\right) = 0$. Si on note $H_n = \bigcup\limits_{n=1}^{N}\left(\bigcap\limits_{k\geqslant N} R_k\right)$, par continuité croissante, on a
$$\mathbb{P}(H) = \lim_{N\to+\infty} \bigcup_{n=1}^{N}\left(\bigcap_{k\geqslant N} R_k\right) = \lim_{N\to+\infty} 0 = 0$$
   → Calcul de $\mathbb{P}(G)$: on note $G_N = \bigcup_{k\geqslant N} R_k$. C'est une suite décroissante d'événements donc $\mathbb{P}(G) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}(G_N)$. On vérifie alors que $\mathbb{P}(G_N) = 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ ou plutôt $\mathbb{P}\left(\overline{G_N}\right) = 0$. En effet, $\overline{G_N} = \bigcap_{k\geqslant N} \overline{R_k}$ et par continuité décroissante, on a $\mathbb{P}\left(\overline{G_N}\right) = \lim\limits_{M\to+\infty}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{M-N+1} = 0$.

Exercice 15.17

1. Il suffit de vérifier que $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} p_k = 1$ (puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k \geqslant 0$). Or $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} p_k = \dfrac{1}{\zeta(a)} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^a} = \dfrac{\zeta(a)}{\zeta(a)} = 1$.
2. On a $P_a(2\mathbb{N}^*) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_{2k} = \dfrac{1}{\zeta(a)} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k)^a} = \dfrac{1}{2^a}$. Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $P_a(p\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{p^a}$.
3. Les deux événements sont indépendants si $P_a(A\cap B) = P_a(A) \cap P_a(B) = \dfrac{1}{(jm)^a}$. Or $A \cap B = (j\mathbb{N}^*) \cap (m\mathbb{N}^*) = q\mathbb{N}^*$ où q est le ppcm de j et m. On a alors $P_a(A\cap B) = \dfrac{1}{a^q}$. Les événements sont indépendant si et seulement si $\vee\, m = jm$, c'est-à-dire si et seulement si j et m sont premiers entre-eux.
4. On considère un nombre fini des A_i : $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ avec $i_1 < \ldots < i_k$. On a $n \in \bigcap\limits_{q=1,\ldots,k} A_{i_q}$ si et seulement si p est un multiple non nul des nombres premiers associés $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$, donc si et seulement si n est multiple non nul de $p_{i_1} \ldots p_{i_k}$. On en déduit que $\bigcap\limits_{q=1,\ldots,k} A_{i_q} = (p_{i_1} \ldots p_{i_k})\mathbb{N}*$, de probabilité $\dfrac{1}{(p_{i_1} \ldots p_{i_k})^a} = \prod\limits_{q=1}^{k} P_a(A_{i_q})$. Les événements sont bien mutuellement indépendants.

5. On a $C_n = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Puisque les événements A_n sont mutuellement indépendants, leurs complémentaires le sont aussi et
$$P_a(C_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-P_a(A_i)) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i^a}\right).$$
6. Les C_n forment une suite décroissante pour l'inclusion. Leur intersection est l'ensemble des entiers non nuls divisibles par aucun nombre premiers, donc $C = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} C_p = \{1\}$. Par limite décroissante
$$P_a(C) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i^a}\right).$$
Or $P_a(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(a)}$. Ainsi
$$\zeta(a) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}.$$

Exercice 15.18

1. On a $(a,b)\notin A_n$ si et seulement si (a,b) est dans l'un des U_i. On a $\overline{A_n} = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$
2. ce sont les nombres $p\ell$ tant que $p\ell \leqslant n$, soit $p \leqslant \frac{n}{\ell}$. Il y en a donc $\lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor$.
3. L'ensemble $\bigcap_{i\in I} U_i$ est l'ensemble des couples (a,b) avec a et b tous les deux divisibles par $d = \prod_{i\in I} p_i$. Cela revient à dire que a et b sont chacun des multiples de d. Il y en a $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ pour chaque donc $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2$ couples possibles.
4. On applique la formule du crible :
$$\begin{aligned}\operatorname{card} A_n &= n^2 - \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right) = n^2 - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_j\leqslant k}\operatorname{card}\left(U_{i_1}\cap\ldots\cap U_{i_j}\right)\\ &= n^2 + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_j\leqslant k}\operatorname{card}\left(U_{i_1}\cap\ldots\cap U_{i_j}\right)\end{aligned}$$
Si d est un entier entre 1 et n, on calcule $\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2$:
→ si $d=1$ alors il vaut n^2,
→ si d contient un p_i^2, le terme est nul,
→ si $d = p_{i_1}\ldots p_{i_j}$, le terme vaut $(-1)^j \operatorname{card}\left(U_{i_1}\cap\ldots\cap U_{i_j}\right)$
On obtient bien $\operatorname{card}(A_n) = \sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2$.
5. une petite question toute simple... évidemment, on s'intéresse à $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{card}(A_n)$. On a $\frac{1}{n^2}\operatorname{card}(A_n) = \sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{n^2}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a (par encadrement simple), $\frac{1}{n^2}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{d^2}$. On s'attend donc à avoir une limite $\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}$. On justifiera cette limite dans un second temps. On s'intéresse à son calcul.
→ La série $\sum\frac{\mu(d)}{d^2}$ converge absolument, comme $\sum\frac{1}{n^2}$. Par résultat sur le sommes doubles :
$$S = \left(\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{(d,n)\in\mathbb{N}^{*2}}\frac{\mu(d)}{(dn)^2}$$
On effectue une sommation par paquet sur les paquets $I_k = \{(d,n)\in\mathbb{N}^{*2}, dn = k\}$. Cela donne
$$S = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\left(\sum_{d|k}\mu(d)\right)$$
→ on calcule $\sum_{d|k}\mu(d)$. On note $q_1,\ldots,q_m$ les diviseurs premiers de k. Lorsque d est divisible par l'un des q_j^2, $\mu(d)=0$. Lorsqu'on a p facteurs premiers deux à deux distincts dans d, on a $\mu(d) = (-1)^p$. Il y a exactement exactement $\binom{m}{p}$ p-uplets de la sorte. En les regroupant, on a
$$\sum_{d|k}\mu(d) = \sum_{p=0}^{m}(-1)^p\binom{m}{p} = (1-1)^m = 0,$$

sauf lorsque $k=1$ où on a alors un seul terme valant 1. Finalement

$$S = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{0}{k^2} = 1 = \frac{\pi^2}{6} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \text{ et } \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

→ il reste à montrer ce que l'on a admis, à savoir

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

On étudie la différence

$$S_n = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left(\frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 - \frac{1}{d^2} \right)$$

On a ensuite $0 \leqslant \frac{n}{d} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{d}$ et ainsi $\left(\frac{n}{d} - 1\right)^2 < \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \leqslant \frac{n^2}{d^2}$, puis

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2}{d^2} - 2\frac{n}{d} + 1\right) - \frac{1}{d^2} \leqslant \left(\frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 - \frac{1}{d^2}\right) \leqslant 0$$

On a ainsi $\left| \frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 - \frac{1}{d^2} \right| \leqslant \frac{2}{nd}$ et ainsi

$$|S_n| \leqslant \sum_{d=1}^{n} \left| \frac{1}{d^2} - \frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \right| \leqslant \frac{2}{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$$

On sait que $\displaystyle\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, ce qui donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$.

Exercice 15.19

1. On peut le faire de deux manières :
   → en vérifiant les différentes propriétés d'une tribu : Ω est obtenu pour $T = \mathbb{N}$, le complémentaire de $A = \bigcup_{n\in T} A_n$ est $\overline{A} = \bigcup_{n\in T'} A_n$ où $T' = \mathbb{N} \setminus T$ et la stabilité par union dénombrable (si $B_k = \bigcup_{n\in T_k} A_n$ alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{n\in T'} A_n$ où $T' = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$).
   → On considère l'application $f : \Omega \to \mathbb{N}$ qui à $\omega \in \Omega$ associe l'unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$. Avec cela, $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ image réciproque d'une tribu sur $\mathbb{N}$.
2. Soit $\mathfrak{T}$ une tribu infinie sur Ω. On commence par définir les ensembles A_n candidats : ce sont les ensembles les plus petits qu'on peut distinguer dans la tribu (A_n est l'intersection de tous les éléments de la tribu qui contiennent A_n). On définit une relation d'équivalence entre les éléments de Ω :

$$\omega \mathcal{R} \omega' \text{ lorsque } \forall t \in \mathfrak{T}, \omega \in t \Leftrightarrow \omega' \in t.$$

   Les classes d'équivalence pour cette relation forment une partition de Ω. Si $A \in \mathfrak{T}$, alors $A = \bigcup_{\omega\in A} \omega = \bigcup_{\omega\in A} \mathrm{Cl}(\omega)$ où $\mathrm{Cl}(\omega)$ est la classe de ω (cela vient directement de la relation d'équivalence : si ω est dans un élément de la tribu alors tous les éléments de la classe le sont). Puisque Ω est dénombrable, il y a au plus un nombre dénombrable de classes d'équivalences. De plus le nombre de classe d'équivalence ne peut pas être fini sinon il n'y aurait qu'un nombre fini d'éléments dans la tribu (au plus 2^p si p est le nombre de classes d'équivalence). Il y a donc un nombre dénombrable de classes d'équivalence. On note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ces classes d'équivalences. D'après la relation $A = \bigcup_{\omega\in A} \mathrm{Cl}(\omega)$, la tribu $\mathfrak{T}$ est contenu dans la tribu $\mathcal{A}$: tout élément de $\mathfrak{T}$ est de la forme $\bigcup_{n\in T} A_n$ pour un certain $T \subset \mathbb{N}$. Réciproquement, on vérifie que chaque A_n est bien dans $\mathfrak{T}$ (ce qui, par union dénombrable ou fini, justifiera que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont dans $\mathfrak{T}$). Si $\omega \in A_n$. On considère tous les éléments de la tribu qui contiennent ω : ce sont les $\bigcup_{n\in T_i} A_n$ où T_i est une famille de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Leur intersection est $B = \bigcup_{n\in T} A_n$ où T est l'intersection de tous les T_i donc $T \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ avec de plus $n \in T$ car A_n est dans tous les éléments de $\mathfrak{T}$ qui contiennent ω. Si $B \neq A_n$ alors on aurait une contradiction avec la définition de A_n car pour tout $\omega' \in B$, on a $\omega \mathcal{R} \omega'$. Finalement $A_n \in \mathfrak{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. D'après ce qu'on vient de voir, une tribu sur Ω est soit finie, soit en bijection avec $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ non dénombrable.