

CHAPITRE 16 - NORMES, SUITES

Exercice 16.1

- existence : la fonction $t \mapsto |P(t) - P'(t)|$ est continue et positive sur $[0, 1]$, donc elle est majorée et $\|P\|$ existe et est positive.
- définie : soit P de norme nulle. La fonction polynomiale $P - P'$ est nulle sur $[0, 1]$, donc le polynôme $P - P'$ est le polynôme nul. On a donc $P = P'$, ce qui est impossible pour des raisons de degré si P n'est pas le polynôme nul. Ainsi $\|P\| = 0$ entraîne $P = 0$.
- homogénéité : si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\sup_{t \in [0,1]} |\lambda P(t) - \lambda P'(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |\lambda| |P(t) - P'(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [0,1]} |P(t) - P'(t)|,$$

puisque $|\lambda| \geq 0$. Cela donne $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$.

- inégalité triangulaire : soit $P, Q \in E$. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|(P+Q)(t) - (P+Q)'(t)| \leq |P(t) - P'(t)| + |Q(t) - Q'(t)| \leq \|P\| + \|Q\|.$$

On a donc un majorant, si bien que $\|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$.

Exercice 16.2

- l'application est la norme associée au produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire celui qui à (A, B) associe $\text{tr}({}^t A B)$.
- On effectue le calcul directement :

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (AB)_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)^2,$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n B_{kl}^2 \right).$$

On obtient alors

$$\|AB\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n B_{kl}^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n B_{kl}^2 \right) = \|A\|^2 \|B\|^2.$$

Exercice 16.3

1. On prouve les différents points :
 - existence : la fonction $t \mapsto x + ty$ est continue sur $[0, 1]$ et est donc bornée. Cela donne l'existence de $N((x, y))$
 - positivité : immédiat
 - caractère défini : si $N((x, y)) = 0$ alors pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq |x + ty| \leq 0$. Ainsi la fonction affine $t \mapsto x + ty$ est nulle est $x = y = 0$ (on peut prendre des valeurs pour t , par exemple 0 et 1).
 - homogénéité : si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{t \in [0,1]} |\lambda x + t \lambda y| = \sup_{t \in [0,1]} |\lambda| |x + ty| = |\lambda| \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|,$$

puisque $|\lambda| \geq 0$.

- inégalité triangulaire : soit (x, y) et (x', y') deux éléments de \mathbb{R}^2 . Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$|(x+x') + t(y+y')| \leq |x+ty| + |x'+ty'| \leq N((x, y)) + N((x', y')).$$

Cela étant valable pour tout $t \in [0, 1]$, on a bien $N((x, y) + (x', y')) \leq N((x, y)) + N((x', y'))$.

L'application est bien une norme.

2. On détermine la boule fermée (plus facile avec les bornes supérieures) unité. On a $N((x, y)) \leq 1$ si et seulement si, pour tout $t \in [0, 1]$, $|x + ty| \leq 1$. Les valeurs extrêmes de $x + ty$ sont en 0 et 1 si bien que $N((x, y)) = \max(|x|, |x+y|)$. Ainsi (x, y) est dans la boule fermée unité si et seulement si $|x| \leq 1$ et $|x+y| \leq 1$. On trace les bords du domaine $x = \pm 1$ et $x+y = \pm 1$. La boule est à l'intérieur.
3. Pour se donner une idée des constantes, on essaie de placer les différentes boules unités les unes dans les autres. Si on a deux normes N_1 et N_2 : la relation $N_1 \leq \alpha N_2$ donne que $\overline{B}_{N_2}(0, 1) \subset \overline{B}_{N_1}(0, \alpha)$ et réciproquement. On cherche le plus petit $\alpha > 0$ tel que $\overline{B}_{N_2}(0, 1) \subset \overline{B}_{N_1}(0, \alpha)$ ce qui donnera la meilleure constante telle que $N_1 \leq N_2$. Il n'y a alors plus qu'à le démontrer...

Exercice 16.4

1. On introduit $\Phi : (f, g) \in E^2 \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$. Il est clair que Φ est une forme bilinéaire symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Soit f un élément de E tel que $\Phi(f, f) = 0$. On a alors $\Phi(f, f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'^2(t) dt = 0$. Cela donne $f(0) = 0$ et, puisque f'^2 est continue et positive sur $[0, 1]$, $f' = 0$. Ainsi f est constante, et donc nulle puisque $f(0) = 0$. Ainsi, Φ est un produit scalaire et N est la norme euclidienne associée.

2. On écrit que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u) du$, ce qui donne

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| du \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)| du.$$

On sait que pour a et b réels, on a $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et on en déduit que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. Il vient alors

$$\left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \right)^2 \leq 2 \left(|f(0)|^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)| dt \right)^2 \right).$$

D'autre part on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_0^1 |f'(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^1 dt \cdot \int_0^1 f'(t)^2 dt = \int_0^1 f'(t)^2 dt.$$

D'où $|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \sqrt{2} \sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt}$, et donc pour tout $t \in [0, 1]$ $|f(t)| \leq \sqrt{2}N(f)$, d'où $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.

3. Utilisons la suite de fonctions de l'énoncé : pour $n \geq 1$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 16.5

On vérifie assez facilement l'existence, la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Il reste le caractère défini. On a $N(Q) = 0$ si et seulement si Q s'annule en chacun des x_k .

→ si $p + 1 > n$ (ou $p \geq n$) alors $N(Q) = 0$ entraîne $Q = 0$. On a bien une norme,

→ si $p < n$: on considère le polynôme $Q = \prod_{k=0}^p (X - x_k)$. Il est de degré $p + 1 \leq n$, non nul et $N(Q) = 0$. On n'a donc pas une norme.

Exercice 16.6

Supposons qu'il existe $x \in E$, non nul, tel que $N_1(x) < N_2(x)$. On note $y = x/N_2(x)$. On a alors $N_1(y) < N_2(y) = 1$ donc $y \in B_1 = B_2$ d'où $N_2(y) < 1$ ce qui donne une contradiction. On fait de même si $N_2(x) < N_1(x)$.

Exercice 16.7

→ existence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$ existent (fonctions continues sur $[0, 1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \int_0^1 f(t)t^n dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt$. La borne supérieure existe.

→ On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda f) = \sup \left\{ \left| \int_0^1 \lambda f(t)t^n dt \right| ; n \in \mathbb{N} \right\} = \sup |\lambda| \left\{ \left| \int_0^1 f(t)t^n dt \right| ; n \in \mathbb{N} \right\} = |\lambda|N(f).$$

→ si $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in E$,

$$\left| \int_0^1 \lambda(f+g)(t)t^n dt \right| \leq \left| \int_0^1 \lambda f(t)t^n dt \right| + \left| \int_0^1 \lambda g(t)t^n dt \right| \leq N(f) + N(g)$$

Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.

→ Si $N(f) = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \lambda f(t)t^n dt = 0$ et pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 \lambda f(t)P(t) dt = 0$. Il existe une suite de polynôme P_n qui converge vers f pour la norme infinie, alors

$$\left| \int_0^1 f^2(t) dt - \int_0^1 f(t)P_n(t) dt \right| \leq \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty,$$

de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Cela donne $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$ et $f = 0$.

Exercice 16.8

1. Pour la première norme, c'est du cours. La norme N est bien définie (la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est bornée) et positive. Si $N(u) = 0$ alors la suite u est constante. Puisque $u_0 = 0$, la suite est nulle. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se montrent de façon standard.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq 2N_\infty(u)$, donc $N(u) \leq 2N_\infty(u)$.
3. On cherche à montrer que N_∞/N n'est pas bornée : par exemple on cherche une suite de suites $(u^{(k)})$ telle que $N(u^{(k)}) = 1$ et $N_\infty(u^{(k)})$ tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$. On considère la suite $u^{(k)}$ telle que $u_n^{(k)} = n$ si $n \leq k$ et $u_n^{(k)} = k$ si $n > k$ (elle monte de 1 en 1 et

s'arrête au rang k). Alors $N(u^{(k)}) = 1$ et $N_\infty(u^{(k)}) = k$, si bien que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{N_\infty(u^{(k)})}{N(u^{(k)})} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 16.9

Pour tout $X \in M_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, grâce à l'inégalité triangulaire, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$|(AX)_k| \leq \left(\sum_{j=1}^p |a_{kj}| \right) \|X\|_\infty \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty.$$

En passant au maximum, il vient $\|AX\|_\infty \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty$ d'où $\|A\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| = M$.

Construisons un vecteur X unitaire tel que $\|AX\|_\infty = M$: soit i_0 tel que $M = \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j}|$. Écrivons le nombre complexe $a_{i_0 j}$ sous la forme $|a_{i_0 j}| e^{i\theta_j}$.

Posons $X = {}^t(e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_n})$. On a $(AX)_{i_0} = M$ et $\|X\|_\infty = 1$. Donc $\|A\| \geq \|AX\|_\infty \geq M$ et finalement $\|A\| = M = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$.

Il reste à montrer que c'est une norme. L'application est bien définie pour toute matrice, elle est à valeurs positives.

- si $\|A\| = 0$. On peut utiliser les deux expressions pour $\|A\|$. Avec les coefficients, on a, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p |a_{ij}| = 0$ donc pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{ij} = 0$. La matrice A est nulle. Ou bien, par définition de la borne supérieure, pour tout vecteur colonne X , on a $0 \leq \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\|$ donc $\|AX\|_\infty = 0$ pour tout vecteur X non nul. Ainsi $AX = 0$ pour tout vecteur X non nul donc $A = 0$ (on peut prendre pour X les vecteurs de la base canonique et ainsi chaque colonne de A est nulle).
- Pour l'homogénéité, de même, les deux expressions permettent de l'obtenir facilement.
- De même pour l'inégalité triangulaire... Si A et B sont deux matrices alors, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + |b_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Cela étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Ou bien : pour tout X vecteur colonne non nul, on a

$$\frac{\|(A+B)X\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{\|AX + BX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} + \frac{\|BX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\| + \|B\|.$$

De nouveau, on obtient $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ et X un vecteur colonne non nul, on a $\frac{\|MX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|M\|$, c'est-à-dire $\|MX\|_\infty \leq \|M\| \|X\|_\infty$. C'est également vrai si $X = 0$. Cela permet d'écrire

$$\|ABX\|_\infty = \|A(BX)\|_\infty \leq \|A\| \|BX\|_\infty \leq \|A\| \|B\| \|X\|_\infty$$

et ainsi, pour tout vecteur X non nul, $\frac{\|ABX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\| \|B\|$ d'où $\|A.B\| \leq \|A\| \|B\|$.

Exercice 16.10

1. On propose deux méthodes :

→ l'inégalité est vraie si l'un des réels est nul. On suppose que les deux sont strictement positifs. On écrit alors

$$\alpha\beta = (\alpha^p)^{1/p} (\beta^q)^{1/q}.$$

En prenant le logarithme, on a

$$\ln(\alpha\beta) = \frac{1}{p} \ln(\alpha^p) + \frac{1}{q} \ln(\beta^q).$$

Puisque la fonction logarithme est concave sur \mathbb{R}_+^* et que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec des termes positifs), on a

$$\ln\left(\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(\alpha^p) + \frac{1}{q} \ln(\beta^q).$$

Cela donne le résultat par composition par la fonction croissante exponentielle.

→ on fixe $\beta > 0$. On pose $f(\alpha) = \alpha\beta - \frac{\alpha^p}{p}$ pour $\alpha \geq 0$. La fonction est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée $f'(\alpha) = \beta - \alpha^{p-1}$. La fonction est nulle en 0, de limite $-\infty$ en $+\infty$ et possède un maximum global lorsque $\alpha = \beta^{\frac{1}{p-1}}$. On calcule la valeur en ce point :

$$f(\beta^{\frac{1}{p-1}}) = \beta^{1+\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p} \beta^{\frac{p}{p-1}} = \beta^{\frac{p}{p-1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{q} \beta^q.$$

2. On se place dans le cas indiqué. Pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q.$$

En intégrant entre a et b , on obtient

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

De le cas général, on note $I_1 = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ et $I_2 = \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}$. Si l'une de ces intégrales est nulle, alors la fonction correspondante est nulle et l'inégalité est vraie. Sinon on considère $\tilde{f} = \frac{f}{I_1}$. On a

$$\int_a^b |\tilde{f}(t)|^p dt = \frac{1}{\int_a^b |f(t)|^p dt} \cdot \int_a^b |f(t)|^p dt = 1.$$

On a le même résultat pour la fonction $\tilde{g} = g/I_2$. On applique le résultat précédent, ce qui donne

$$\left| \int_a^b \tilde{f}(t)\tilde{g}(t) dt \right| = \frac{1}{I_1 I_2} \left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq 1,$$

ce qui donne $\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq I_1 I_2$, c'est-à-dire le résultat.

3. On utilise l'écriture conseillée, on obtient alors

$$\int_a^b |f+g|^p \leq \int_a^b |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int_a^b |g| \cdot |f+g|^{p-1}.$$

On applique l'inégalité de Hölder à chacune des deux intégrales. La première donne

$$\int_a^b |f| \cdot |f+g|^{p-1} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)q} dt \right)^{1/q}.$$

Puisque $1/p + 1/q = 1$, soit $pq = p + q$, on a $(p-1)q = pq - q = p$. Cela donne la majoration

$$\int_a^b |f| \cdot |f+g|^{p-1} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \right)^{1/q}.$$

De même,

$$\int_a^b |g| \cdot |f+g|^{p-1} \leq \left(\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \right)^{1/q},$$

ce qui donne en ajoutant,

$$\int_a^b |f+g|^p \leq \left(\left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p \right)^{1/p} \right) \left(\int_a^b |f+g|^p \right)^{1/q}.$$

Si $\int_a^b |f+g|^p = 0$ l'inégalité cherchée est vraie, sinon, on peut diviser par $\left(\int_a^b |f+g|^p \right)^{1/q}$, ce qui donne, en utilisant $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, la relation.

4. L'application est bien définie et positive. L'homogénéité est immédiate. Si $\int_a^b |f|^p = 0$, puisque $|f|$ est continue et positive, alors f est nulle. L'inégalité triangulaire est prouvée au dessus.

Exercice 16.11

1. (a) Si x_n converge simplement vers x et x' . Soit $y \in E$. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x', y \rangle = 0$. Par différence, $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x' - x, y \rangle = 0$ donc $\langle x' - x, y \rangle = 0$. Cela étant vrai pour tout $y \in E$, on a $x - x' = 0$ et $x = x'$.
- (b) Par inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n - x\| \|y\|$. Par majoration, la convergence forte entraîne la convergence faible (vers la même limite).
2. \rightarrow si (x_n) converge fortement vers x : on a déjà la convergence faible. On a ensuite $\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$ (inégalité triangulaire) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| - \|x\| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$.
- \rightarrow Réciproquement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x, x \rangle = 0$ ce qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Alors

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2 \langle x_n, x \rangle$$

Avec les différentes limites, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2 \|x\|^2 = 0$.

3. Comme d'habitude, la dimension finie apporte l'existence d'une base et même ici d'une base orthonormée. Soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de E . On a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2$ et de même $\|x_n\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x_n, e_i \rangle^2$. La convergence faible donne, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2$. S'il y a convergence faible, on a donc la propriété $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$ et ainsi la convergence forte.

Exercice 16.13

- La fonction $t \mapsto |P(t)Q(t)|$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ d'où l'existence et la positivité de $N_Q(P)$. Une fois cela fait, on utilise les propriétés de la norme infinie sur $[-1, 1]$ pour obtenir :
 - $N_Q(P) = 0 \Leftrightarrow \|PQ\|_\infty = 0 \Leftrightarrow PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ puisque Q n'est pas le polynôme nul,
 - $N_Q(\lambda P) = \|\lambda PQ\|_\infty = |\lambda| \|PQ\|_\infty = |\lambda| N_Q(P)$,
 - $N_Q(P_1 + P_2) = \|P_1Q + P_2Q\|_\infty \leq \|P_1Q\|_\infty + \|P_2Q\|_\infty = N_Q(P_1) + N_Q(P_2)$.
- Supposons que Q ne s'annule pas sur $[-1, 1]$. Il existe $m, M > 0$ tels que, pour tout $t \in [-1, 1]$, $m \leq |Q(t)| \leq M$ et ainsi $m|P(t)| \leq |PQ(t)| \leq M|P(t)|$
 - pour tout $t \in [-1, 1]$, $|PQ(t)| \leq M|P(t)| \leq MN_1(P)$ donc $N_Q(P) \leq MN_1(P)$
 - pour tout $t \in [-1, 1]$, $m|P(t)| \leq |PQ(t)| \leq N_Q(P)$ donc $mN_1(P) \leq N_Q(P)$

Dans ce cas les normes sont équivalentes.

Supposons maintenant que Q s'annule en $a \in]-1, 1[$ (le principe est le même si c'est en ± 1 avec une gestion du côté). On a toujours $N_Q(P) \leq MN_1(P)$. On va construire un polynôme P telle que $N_1(P) = \|P\|_\infty = 1$ et $N_Q(P)$ aussi proche de 0 que souhaité. On se donne $\varepsilon > 0$. Puisque $Q(a) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $I = [a - \eta, a + \eta] \subset]-1, 1[$ et, pour tout $t \in I$, $|Q(t)| \leq \varepsilon$. Soit $R = 1 - \lambda(X - a)^2$ avec $\lambda > 0$. On a $R(a) = 1$ et $R \leq 1$. On prend λ suffisamment petit de sorte que $R(1) = 1 - \lambda(1 - a)^2$ et $R(-1)$ soient positifs. On a alors pour tout $t \in [-1, 1]$ avec $t \neq a$, $0 \leq R(t) < 1$. On note alors $P_n = R^n$. On a alors

$$N_Q(P_n) \leq \sup_{t \in [-1, 1] \setminus I} |P_n Q(t)| + \sup_{t \in I} |P_n Q(t)| \leq M(1 - \lambda\eta^2)^n + \varepsilon.$$

sur $[-1, 1] \setminus I$, R et P_n sont maximaux en $a \pm \eta$. Il existe donc n_0 tel que $N_Q(P_{n_0}) \leq 2\varepsilon$ et $\frac{N_A(P_{n_0})}{N_1(P_{n_0})} \leq 2\varepsilon$. On a donc la non-équivalence des normes.