## CHAPITRE 16 - RÉVISIONS : CONVEXITÉ

**Exercice 16.1**

On cherche $\lambda$ tel que $b = \lambda a + (1-\lambda)c$. On trouve $\lambda = \frac{b-c}{a-c}$. On a alors $b = \frac{b-c}{a-c}a + \frac{a-b}{a-c}c$.

**Exercice 16.2**

- → On note $\|M\| = \sqrt{x^2+y^2}$ si $M(x,y)$. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points de la boule et $\lambda \in [0,1]$. On a $\|\lambda A + (1-\lambda)B\| \leqslant |\lambda|\,\|A\| + |1-\lambda|\,\|B\| \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1$.
- → On doit justifier que l'inagélité reste stricte (attention lorsqu'on multiplie par 0). On a toujours $\|\lambda A + (1-\lambda)B\| \leqslant |\lambda|\,\|A\| + |1-\lambda|\,\|B\|$. Or l'un des réels $\lambda$ ou $1-\lambda$ est non nul donc l'inégalité reste stricte et $\|\lambda A + (1-\lambda)B\| < \lambda + 1 - \lambda = 1$. On peut aussi supposer que $\lambda \in ]0,1[$ (les cas 0 et 1 sont immédiats) pour écrire directement $\|\lambda A + (1-\lambda)B\| < \lambda + 1 - \lambda = 1$.

**Exercice 16.3**

- → Si $Epi(f)$ est convexe. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. Le segment reliant $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est dans l'épigraphe de $f$. On note $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ et $t = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. On a $x \in I$ et $(z,t)$ est dans l'épigraphe de $f$ (barycentre de $(A,\lambda)$ et $(B, 1-\lambda)$ où $A$ à pour coordonnées $(x, f(x))$ et $B$ $(y, f(y))$). On a donc $t \geqslant f(z)$ ce qui correspond à la définition de la convexité de $f$.
- → Si $f$ est convexe. Soient $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ deux points de $Epi(f)$ et $\lambda \in [0,1]$. On note $C = \lambda A + (1-\lambda)B$. On a $C$ de coordonnées $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$ dans l'épigraphe de $f$ donc $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geqslant f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$. On $y_1 \geqslant f(x_1)$ et $y_2 \geqslant f(x_2)$. Pusique $\lambda$ et $1-\lambda$ sont positifs, on a
$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geqslant \lambda \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geqslant f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$
la dernière inégalité provenant de la convexité de $f$. Cela donne $y_C \geqslant f(x_C)$ donc $C$ est bien dans l'épigraphe de $f$.

**Exercice 16.4**

C'est la traduction directe de la formule des 3 pentes. Par exemple si $z > b$ (avec $z \in I$), on a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, ce qui donne, puisque $z - a > 0$,
$$f(z) \geqslant f(a) + (z-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
La droite $(D)$ a pour équation $y = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ainsi si $z > b$, le point $(z, f(z))$ est au dessus du point de même abscisse sur la droite $(D)$.

**Exercice 16.5**

- → on commence par étudier la position du graphe par rapport à la droite passant par deux points. Soient $b > a$ et $A(a, f(a)), B(b, f(b))$. On sait que le segment $[AB]$est dans l'épigraphe de $f$. On va étudier au dela de $b$. Soit $x > b > a$. On a la croissance du taux d'accroissement en $a$ : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui se traduit par $f(x) \geqslant f(a) + m(x-a)$ avec $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ lorsque $x > b$. Le graphe est donc au dessus de la droite $(AB)$ au dela de $B$. De même avant $A$ (faire un dessin pour bien comprendre).
- → Supposons qu'il existe $b > a$ avec $f(b) > f(a)$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Supposons qu'il existe $b > a$ avec $f(a) > f(b)$ alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. La fonction $f$ est donc constante.

**Exercice 16.6**

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, cela donne
$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right),$$
c'est-à-dire
$$\frac{n}{x_1 + \ldots + x_n} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$$
ce qui donne le résultat en récrivant l'inégalité.

**Exercice 16.7**

On note $h = \sup(f, g)$. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a
$$f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y).$$
De même $g(z) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$ et finalement, $h(z) = \sup(f(z), g(z)) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$. La fonction $h$ est convexe.

**Exercice 16.8**

Plusieurs façons de le montrer avec les différentes caractérisations. Par exemple, on peut fixer $a \in I$. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est à la fois croissante et décroissante sur $I \backslash \{a\}$. Elle est donc constante. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I \backslash \{a\}$, $f(x) - f(a) = \alpha(x-a)$, donc $f(x) = f(a) + \alpha(x-a)$. La relation est en encore vraie en $a$. La fonction est affine.

**Exercice 16.9**

1. La fonction est de classe $\mathscr{C}^2$. On calcule $f''$ et on vérifie que $f'' \geqslant 0$.
2. Soit $y_i$ tel que $x_i = \exp(y_i)$. On utilise la convexité précédente sur les $y_i$. Cela donne

$$\ln\left((1+\exp(\frac{y_1+\ldots+y_n}{n})\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\exp(y_k)).$$

   En composant par la fonction croissante exponentielle et en simplifiant avec $x_k = \exp(y_k)$, il vient

$$1+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\right)^{1/n}.$$

3. On simplifie l'inégalité qu'on veut prouver par $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$. Cela devient

$$1+\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{b_i}{a_i})\right)^{1/n},$$

   ce qui est l'inégalité de la question précédente appliquée aux réels $b_i/a_i$

**Exercice 16.10**

Soit $g(x) = f(x) - M(x-a)(b-x)$. On a $g$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$, $g'' = f'' + M \geqslant 0$ donc $g$ est convexe sur $[a,b]$. De plus $g(a) = g(b) = 0$ et par convexité, $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$ (courbe sous sa corde). Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant M(x-a)(b-x)$. On effectue la même chose avec $h(x) = f(x) + M(x-a)(b-x)$ pour obtenir $h \geqslant 0$ par concavité. Finalement, pour tout $x \in [a,b]$,

$$-M(x-a)(b-x) \leqslant f(x) \leqslant M(x-a)(b-x),$$

ce qui donne le résultat.

**Exercice 16.11**

Soit $G$ un point du plan. On a $MA^2 = (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2$. Ainsi

$$2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.(2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}) + 2GA^2 + 3GB^2$$

Si on choisit $G$ barycentre de $(A,2)$ et $(B,3)$, alors $2MA^2+3MB^2 = 5MG^2+2GA^2+3GB^2$. On a également, pour tout $M$, $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$, notamment $3\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AG}$ et $2\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{BG}$. Cela donne $GA^2 = \frac{9}{25}a^2$ et $GB^2 = \frac{4}{25}a^2$. On a ainsi $2MA^2+3MB^2 = 5MG^2 + \frac{30}{25}a^2$. L'équation revient à $5MG^2 = \frac{20}{25}a^2 = \frac{4}{5}a^2$ ou encore $MG^2 = \frac{4}{25}a^2$. L'ensemble des points est le cercle de centre $G$ et de rayon $\frac{2}{5}a$ (et $B$ est sur ce cercle).

**Exercice 16.12**

1. Supposons qu'il existe $a$ tel que $f(a) < 0$. On ne peut pas avoir $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \geqslant a$ (sinon le limite ne serait pas nulle). Il existe donc $b > a$ tel que $f(b) > f(a)$. En utilisant la croissance du taux d'accroissement en $a$, on vérifie que $f(x) \geqslant f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$ si $x > b$. Puisque $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$, on aurait $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soit $y = mx+p$ une équation de l'asymptote. On pose $g(x) = f(x) - (mx+p)$. On vérifie facilement que $g$ est encore convexe. De plus la limite de $g$ en $+\infty$ est nulle. On a par conséquent $g \geqslant 0$, ce qui donne $f(x) \geqslant mx+p$ si $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 16.13**

1. Il suffit de l'écrire. Soit $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. On a $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$. Puisque $f$ est croissante, on a

$$(f\circ g)(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant f\left(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\right) \leqslant \lambda(f\circ g)(x)+(1-\lambda)(f\circ g)(y),$$

   la dernière inégalité s'obtenant par convexité de $f$.
2. Le sens direct est simple : la fonction $\ln f$ est convexe, la fonction $g : x \mapsto \exp(\alpha x)$ est convexe croissante sur $\mathbb{R}$ car $\alpha > 0$, donc la composée $f^\alpha$ est convexe. Réciproquement, on écrit la convexité de $f^\alpha$. On fixe $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. On a, après avoir composer par la fonction

logarithme qui est croissante

$$\alpha \ln f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \ln(\lambda f^{\alpha}(x) + (1-\lambda) f^{\alpha}(y)).$$

On note $u(\alpha) = \alpha \ln f(\lambda x + (1-\lambda) y)$ et $v(\alpha) = \ln(\lambda f^{\alpha}(x) + (1-\lambda) f^{\alpha}(y))$ pour $\alpha \geqslant 0$ (les fonctions sont bien définies en 0 avec $u(0) = v(0) = 0$. On a pour tout $\alpha \geqslant 0$, $(v-u)(\alpha) \geqslant 0$. Les deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et, puisque $(v-u)(0) = 0$, on doit avoir $(v-u)'(0) \geqslant 0$. On a $u'(0) = \ln f(\lambda x + (1-\lambda) y)$ et $v'(0) = \lambda \ln f(x) + (1-\lambda) \ln f(y)$. En écrivant $u'(0) \leqslant v'(0)$, on obtient

$$\ln f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda \ln f(x) + (1-\lambda) \ln f(y).$$