

CHAPITRE 18 - SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 18.2

Puisque $(a_n 1^n)$ converge vers 0, le rayon de convergence est au moins 1. Puisque $\sum a_n 1^n$ diverge, le rayon de convergence est au plus 1. Finalement $R = 1$.

Exercice 18.3

- On a $\lambda^n a_n z^n = a_n (\lambda z)^n$. Si $|\lambda z| < R$ (soit $|z| < R/|\lambda|$) alors $\sum \lambda^n a_n z^n$ converge, et si $|\lambda z| > R$ (soit $|z| > R/|\lambda|$) alors $\sum \lambda^n a_n z^n$ diverge. On en déduit que la nouvelle série entière a un rayon de convergence $R/|\lambda|$.
- Soit R' le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$. On remarque que $|a_n^2 z^n| = (|a_n|(\sqrt{|z|})^n)^2$.
 → Si $\sqrt{|z|} < R'$ (c'est-à-dire $|z| < R'^2$), alors $(a_n \sqrt{|z|}^n)$ est bornée, donc $(|a_n^2 z^n|)$ est bornée. On en déduit que $R' \geq R^2$ (tout z de la boule $B(0, R^2)$ vérifie $(a_n^2 z^n)$ est bornée, elle est donc contenue dans $B(0, R')$ et $R^2 \leq R'$).
 → Réciproquement, si $|z| < R'$, alors $(a_n^2 z^n)$ est bornée, donc la suite $(a_n \sqrt{|z|}^n)$ est bornée. On a donc $\sqrt{|z|} \leq R$, et cela, pour tout z tel que $|z| < R'$. Pour tout z tel que $|z| < R'$, on a $|z| \leq R^2$, on en déduit que $R' \geq R^2$ (pour tout $r < R'$, on a $B(0, r) \subset B(0, R^2)$, si bien que $R' \leq R^2$).

Exercice 18.4

- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < R$, et $z \in \mathbb{C}$. La suite $(|a_n| \alpha^n)$ est bornée. Soit M un majorant de cette suite. On a alors $\frac{|a_n|}{n!} |z|^n \leq M \frac{1}{n!} \left(\frac{|z|}{\alpha}\right)^n$, et comme la série de terme général $\frac{1}{n!} \left(\frac{|z|}{\alpha}\right)^n$ est une série convergente, on en déduit que la série de terme général $a_n z^n / n!$ converge absolument. La série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a donc un rayon de convergence infini.
- Lorsque $R = 0$, on ne peut pas dire grand chose. Il suffit de prendre $a_n = (n!)^\alpha$ où $\alpha > 0$. Si $\alpha = 1$, le nouveau rayon est 1, si $\alpha > 1$, il est nul et si $\alpha \in]0, 1[$, il est infini.

Exercice 18.5

- $1 \Rightarrow 2$: il existe un entier n_0 et $M \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{M}{n}$, ce qui donne $|a_n| \leq \frac{M^n}{n^n}$. Le rayon de convergence de $\sum n! a_n z^n$ est donc supérieur ou égal à celui de $\sum n! \frac{M^n}{n^n} z^n$. Soit $u_n = \frac{n!}{n^n} M^n z^n$ (on suppose $M > 0$ sinon tous les coefficients a_n sont nuls à partir d'un certain rang). Les termes u_n sont non nuls, et

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n} M|z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n M|z|.$$

Ce quotient tend vers $\frac{M|z|}{e}$ lorsque n tend vers $+\infty$, et la série entière a un rayon de convergence égale à e/M . On en déduit que la série entière de départ a un rayon de convergence strictement positif. Plus simplement, il suffit de constater que $|u_n| \leq (M|z|)^n$ et la série converge lorsque $|z| > 1/M$ (on a $n!/n^n \leq 1$).

- $2 \Rightarrow 1$: Soit R le rayon de convergence de la série entière et soit $M \in [0, R[$. La suite $(n! a_n M^n)$ est bornée. Il existe $K \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|n! a_n M^n| \leq K$. Cela donne $|a_n| \leq \frac{K}{n! M^n}$ et $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \frac{K^{1/n}}{M}$. La suite $(K^{1/n})$ converge vers 1. Par la forme faible de la formule de Stirling, on a $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sim \frac{n}{e}$. Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \frac{K^{1/n}}{M} = \frac{e}{M}$. La suite étant convergente, elle est bornée. On en déduit par conséquent que $(n \sqrt[n]{|a_n|})$ est bornée, ce qui signifie bien que $\sqrt[n]{|a_n|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 18.7

1. Exprimons $\sin x$ sous la forme $(e^{ix} + e^{-ix})/(2i)$. On a alors pour tout x réel

$$f(x) = \frac{1}{2i} (e^{(i+1)x} - e^{(-i+1)x}) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n x^n}{n!} \right).$$

On obtient alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} \frac{x^n}{n!},$$

et, puisque $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, on a $\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} = \sqrt{2}^n \sin(n\pi/4)$, et finalement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{2}^n \sin(n\pi/4) \frac{x^n}{n!}.$$

La série entière est donc de rayon infini (puisque la relation précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$).

2. Appliquons la formule du produit de Cauchy à $e^x \sin x$. Si l'on note a_n les coefficients de la série de $\sin x$, le coefficient b_n de x^n dans le produit est alors $b_n = \sum_{p=0}^n a_p \frac{1}{(n-p)!}$. Or a_p est nul si p est pair et $a_{2k+1} = (-1)^k / (2k+1)!$. On obtient donc

$$b_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient l'égalité avec la première question.

Exercice 18.8

Pour $x < 2$, on a $f(x) = \sqrt{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{1/2}$. On se ramène à une série connue et on obtient une série de rayon de convergence 2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \frac{1}{2^n} (-1)^n x^n \right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^{2n} n!} x^n \right). \end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le produit $2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n-1)(2n) = 2^n n!(2n-1)$, on peut encore écrire

$$f(x) = \sqrt{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{3n}(n!)^2} x^n \right).$$

Exercice 18.9

- La série entière de l'exponentielle étant de rayon infini, les fonctions $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{x^2}$ sont développables en série entière de rayon infini. Alors la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ l'est aussi comme primitive d'une fonction développable en série entière de rayon infini. Enfin f l'est également comme produit de deux fonctions développables en série entière de rayon infini.
- La fonction f est dérivable et, pour tout x réel, on a $f'(x) = 1 - 2xf(x)$ avec de plus $f(0) = 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$. On obtient

$$f'(x) + 2xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1}.$$

ce qui donne par changement d'indice

$$\begin{aligned} f'(x) + 2xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1}) x^n. \end{aligned}$$

Comme cette série doit être égale à la série constante 1, l'égalité précédente implique l'égalité des coefficients des deux séries. On a donc $a_1 = 1$, et, pour tout $n \geq 1$, on trouve $(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0$, avec de plus la condition initiale $a_0 = f(0) = 0$. Il résulte immédiatement par récurrence que les termes de rang pair sont nuls (ce qui était prévisible puisque la fonction f est impaire). Pour les termes de rang impair, on a la relation $a_{2p+1} = \frac{-2}{2p+1} a_{2p-1}$, d'où l'on déduit, également par récurrence, que $a_{2p+1} = \frac{(-2)^p}{(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 1}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-2)^p x^{2p+1}}{(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Exercice 18.10

- Le dénominateur s'annule lorsque $e^t = -x$. Si $x > -1$, le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^+ . La fonction $t \mapsto \frac{t}{x+e^t}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$. Pour $x = -1$, on a la continuité sur $]0, +\infty[$ et $\frac{t}{e^t-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$. L'intégrale est faussement impropre en 0. Le comportement en $+\infty$ est le même. Si $x < -1$, le dénominateur s'annule dans $]0, +\infty[$ et l'intégrale n'existe pas. Finalement l'ensemble de définition est $[-1, +\infty[$.

2. On a pour $t \geq 0$ et $|x| < 1$

$$\frac{t}{x + e^t} = \frac{te^{-t}}{1 + xe^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n t e^{-(n+1)t}$$

On note $f_n(t) = (-1)^n x^n t e^{-(n+1)t}$. On a $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |x^n| \int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)t} dt = \frac{|x^n|}{(n+1)^2}$. La série $\sum_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge. On a évidemment convergence simple de la série de fonctions sur $[0, +\infty[$ et la fonction somme est continue sur cet intervalle (elle vaut $\frac{t}{x + e^t}$). On a par conséquent

$$\text{pour tout } x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} x^n$$

On a notamment, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = (-1)^p \frac{p!}{(p+1)^2}$.

Exercice 18.12

On vérifie que le rayon de convergence est 1 (règle de d'Alembert) et que la série converge absolument en ± 1 . La fonction f est donc définie sur $[-1, 1]$. Elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$. On peut décomposer $\frac{1}{n(3n+1)}$ en éléments simples ou d'abord calculer $f'(x)$ (pour profiter de la simplification). Pour $x \in] -1, 1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^3)^n}{n} = -\ln(1-x^3)$. On a alors pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= -\int_0^x \ln(1-t^3) dt = -\left[t \ln(1-t^3) \right]_0^x - 3 \int_0^x \frac{t^3}{1-t^3} dt \\ &= -x \ln(1-x^3) - 3 \int_0^x \frac{t^3-1+1}{1-t^3} dt = -x \ln(1-x^3) + 3x - 3 \int_0^x \frac{1}{1-t^3} dt \end{aligned}$$

On effectue la décomposition en éléments simples :

$$\frac{-3}{1-t^3} = \frac{3}{(t-1)(1+t+t^2)} = \frac{1}{t-1} - \frac{t+2}{t^2+t+1} = \frac{1}{t-1} - \frac{t+1/2}{t^2+t+1} - \frac{3/2}{(t+1/2)^2+3/4}$$

et on termine le calcul des primitives avec ça :

$$f(x) = 3x - x \ln(1-x^3) + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Exercice 18.13

- Par encadrement, on a $\frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt$, c'est-à-dire $\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$. Puisque $\sum \frac{x^n}{n+1}$ a un rayon de convergence égal à 1, on en déduit que le rayon de convergence cherché est 1 également.
- Lorsque $t \in [0, 1]$ et $|x| < 1$, on a $\frac{t^n |x|^n}{1+t^2} \leq |x|^n$. La série de fonctions $t \mapsto \frac{t^n |x|^n}{1+t^2}$ converge donc normalement sur $[0, 1]$, et l'on peut intervertir les signes f et \sum . On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \sum_0^{+\infty} (tx)^n dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1-tx)}$$

On décompose en éléments simples

$$\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{1+tx}{1+t^2} + \frac{x^2}{1-tx} \right),$$

ce qui permet de calculer l'intégrale. Pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{1}{1+x^2} \left[\arctan t + \frac{x}{2} \ln(t^2+1) - x \ln(1-tx) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} x - x \ln(1-x) \right). \end{aligned}$$

Exercice 18.14

1. → Les deux séries ont même rayon de convergence que leur série dérivée $\sum \cos((n+1)\alpha) x^n$ et $\sum \sin((n+1)\alpha) x^n$. Puisque $|\cos((n+1)\alpha)| \leq 1$ et $|\sin((n+1)\alpha)| \leq 1$, on obtient que dans les deux cas la série est de rayon supérieur ou égal à 1.
- De l'égalité $\cos(2(n+1)\alpha) = 2\cos^2((n+1)\alpha) - 1$, on déduit que la suite $(\cos((n+1)\alpha))$ ne peut converger vers 0 (sinon on obtiendrait $0 = -1$ par passage à la limite). La série de terme général $x^n \cos((n+1)\alpha)$ est donc de rayon 1, ainsi que la série de terme général $\frac{x^n \cos(n\alpha)}{n}$.

→ De l'égalité $\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha$, on déduit que si la suite $(\sin(n\alpha))$ converge vers 0, alors la suite $(\cos(n\alpha)\sin\alpha)$ converge vers 0, et puisque la suite $(\cos(n\alpha))$ ne converge pas vers 0, on a $\sin\alpha = 0$, soit $\alpha = k\pi$, avec k entier. Réciproquement, si $\alpha = k\pi$ avec k entier, alors la suite $(\sin(n+1)\alpha)$ est la suite nulle.

→ Conclusion : la série entière $\sum \frac{x^n}{n} \sin(n\alpha)$ est de rayon 1 lorsque α n'est pas un multiple entier de π et est de rayon infini sinon.

2. Lorsque $|x| < 1$, on peut calculer la somme des deux séries simultanément en posant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{e^{in\alpha}}{n}$. On obtient en dérivant

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha} x^n = \frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x} = \frac{e^{i\alpha}(1 - e^{-i\alpha}x)}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

Ainsi $f'(x) = \frac{\cos\alpha - x}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + i \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$. Alors A est la primitive nulle en 0 de $\Re f$. Donc $A(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

3. Si l'on pose $B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\alpha)$, alors B est la primitive nulle en 0 de $\Im f$. En dérivant la fonction $h : x \mapsto \arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$, qui est nulle en 0, on obtient bien $h'(x) = \text{Im } f$, d'où le résultat.

Exercice 18.15

1. On note $u_n = a_n x^n$. Ce terme est non nul pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{2n-1}{2n+1} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x = -\frac{2n-1}{2n+1} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} x = -\frac{2(2n-1)}{n+1} x$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 4|x|$. Le rayon de convergence de la série entière est $\frac{1}{4}$.

2. On reprend le calcul précédent qui donne $(n+1)a_{n+1} = -(4n-2)a_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (4n-2) a_n x^n$$

Avec $a_1 = -2$, cela donne, $f'(x) = -2 + 4x f'(x) - 2f(x)$ soit encore $(1-4x)f'(x) + 2f(x) = -2$. On résout cette équation différentielle sur $]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$. Une solution particulière est la fonction constante égale à 1. Les solutions de l'équation homogène sont les multiples de $x \mapsto \exp(\frac{1}{2} \ln|4x-1|) = \sqrt{1-4x}$. On a donc $f(x) = 1 + A\sqrt{1-4x}$. Puisque $f(0) = 0$, on a finalement

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[, f(x) = 1 - \sqrt{1-4x}.$$

Exercice 18.16

1. La fonction f est la somme d'une série entière. On calcule le rayon de convergence de cette série entière. Soit $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$. Si $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \neq 0$ et $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2}$, de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Donc le rayon est infini et f est définie et continue sur \mathbb{R} .

2. On peut écrire $f(x), f'(x)$ et $f''(x)$ et essayer de trouver une combinaison entre ces fonctions. Plus généralement, on peut partir du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et reconstituer les fonctions. On pose $u_n(x) = a_n x^{2n}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = -\frac{x^2}{(2n+2)^2} u_n(x)$ c'est-à-dire $(2n+2)^2 a_{n+1} x^{2n+2} = -x^2 a_n x^{2n}$ et pour $x \neq 0$, $(2n+2)^2 a_{n+1} x^{2n} = -a_n x^{2n}$. On somme ces relations (toujours pour $x \neq 0$) et on reconstitue les fonctions. On a tout d'abord, $\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)^2 a_{n+1} x^{2n} = -f(x)$. Pour faire apparaître $f''(x)$, on décompose $(2n+2)^2 = (2n+2)(2n+1) + (2n+2)$ cela donne

$$-f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)(2n+1) a_{n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2) a_{n+1} x^{2n}$$

en multipliant par x (pour faire apparaître $f'(x)$ dans la dernière somme), on obtient finalement $-xf(x) = xf''(x) + f'(x)$ donc f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$.

3. Pour $x > 1$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} t^{2n} e^{-xt} \right) dt$. On définit la fonction v_n sur \mathbb{R}^+ par $v_n(t) = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} t^{2n} e^{-xt}$. La fonction v_n est continue sur \mathbb{R}_+ , intégrable sur \mathbb{R}_+ (puisque $v_n(t) = o(1/t^2)$) et, à l'aide du changement de variable $u = xt$, puis d'intégrations par parties successives, on montre que

$$\int_0^{+\infty} v_n(t) dt = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \frac{1}{x^{2n+1}} \int_0^{+\infty} u^{2n} e^{-u} du = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}.$$

Puisque v_n est de signe fixe, on a $\int_0^{+\infty} |v_n(t)| dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}$. On note α_n ce dernier réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2 x^2} =$

$\frac{2n+1}{(2n+2)x^2}$. Cette suite tend vers $1/x^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Puisque $\frac{1}{x^2} \in]0, 1[$, la série $\sum \alpha_n$ converge. De plus $\sum v_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est la fonction continue $t \mapsto f(x)e^{-xt}$. Le théorème d'intégration terme à terme donne $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}$. Il reste à prouver que cette somme vaut $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Pour $x > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \frac{1}{x^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \frac{1}{x^{2n+1}}$$

où $\beta_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!} = (1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

La formule générale est valable pour $n = 0$. Si $x > 1$, on trouve la formule demandée

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}} = F(x).$$

Exercice 18.17

La série de fonctions $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut donc inverser les sommations et

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \right).$$

L'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{ipt} dt$ est nulle lorsque p est non nul, et vaut 2π lorsque p est nul. Dans la série précédente, toutes les intégrales sont nulles sauf lorsque $n = k$, et on obtient donc

$$A_n(r) = \frac{a_n r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = a_n r^n.$$

Si, pour tout z complexe, on a $|f(z)| \leq M$, alors

$$|A_n(r)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M dt = M,$$

et l'on en déduit que pour tout entier $n > 0$ et tout réel $r > 0$, on a l'inégalité $|a_n r^n| \leq M$, ou encore $|a_n| \leq M/r^n$. En faisant tendre r vers l'infini, on en déduit que $|a_n| \leq 0$, et donc $a_n = 0$. On a alors $f(z) = a_0$ et la fonction f est constante. La fonction sinus donne un exemple de fonction qui est développable en série entière de rayon infini, et bornée sur \mathbb{R} mais non constante.

Exercice 18.18

On commence par remarquer qu'il existe M tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum \frac{M}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini donc f est bien définie sur \mathbb{R} .

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $|a_n| \leq \varepsilon$. On découpe la somme en passant par n_0 :

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_k}{k!} x^k \right) + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

ce qui donne la majoration, pour $x \geq 0$,

$$|f(x)| \leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_k}{k!} x^k \right| + \varepsilon \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_k}{k!} x^k \right| + \varepsilon e^x.$$

Cela donne $|f(x)|e^{-x} \leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_k}{k!} x^k \right| e^{-x} + \varepsilon$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_k}{k!} x^k \right| e^{-x} = 0$, donc il existe $A > 0$ tel que, pour

$x \geq A$, $\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_k}{k!} x^k \right| e^{-x} \leq \varepsilon$. Pour tout $x \geq A$, on a $|f(x)|e^{-x} \leq 2\varepsilon$. Cela donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{-x} = 0$ c'est-à-dire $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^x)$.

2. On écrit $a_n = \ell + b_n$ avec b_n de limite nulle. On a alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ell + b_n}{n!} x^n = \ell e^x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

D'après la question précédente, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^x)$. Ainsi $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ell e^x$.

Exercice 18.19

1. Le critère de d'Alembert peut s'appliquer et le rayon de convergence est 1.

2. On note $g(t) = L(zt)$. La fonction est définie lorsque $|zt| < 1$. Si on note $R = 1/|z|$, alors pour tout $t \in]-R, R[$, $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} t^n$ et g est somme d'une série entière de rayon de convergence strictement supérieur à 1, donc est notamment de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, avec de plus,

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z^n t^{n-1} = z \sum_{n=0}^{+\infty} (-zt)^n = \frac{z}{1+zt}.$$

On note alors $h(t) = \exp(g(t))$. On justifie que h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et $h'(t) = g'(t) \exp(g(t))$ - ce n'est a priori pas immédiat car g est à valeurs complexes. On le montre de façon générale en écrivant $g(t) = a(t) + ib(t)$ avec a, b à valeurs réelles. On a alors $h(t) = e^{a(t)} (\cos(b(t)) + i \sin(b(t)))$ qu'on peut dériver et dont la dérivée donnera bien ce que l'on souhaite (à écrire en vrai).

Finalement, u est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et $u'(t) = \frac{1}{(1+zt)^2} (g'(t) \exp(g(t)) (1+zt) - z \exp(g(t))) = 0$. La fonction u est donc constante sur $[0, 1]$. On a donc $u(1) = u(0) = 1$, ce qui donne $\exp(L(z)) = 1+z$ (si $|z| < 1$).

3. On trigonalise la matrice A dans $M_n(\mathbb{C})$ et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (pas forcément distinctes). On a alors $\det(I_n + zA) = \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k z)$. On note M le module maximal des valeurs propres. Pour $|z| < 1/M$, on a alors $1 + \lambda_k z = \exp(L(\lambda_k z))$ et

$$\det(I_n + zA) = \exp\left(\sum_{k=1}^n L(\lambda_k z)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \lambda_k^n z^n\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k^n z^n\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{tr}(A^n) z^n\right)$$

Remarque : la permutation entre les deux sommes utilise seulement la linéarité (on a une somme de n séries convergentes)

Exercice 18.20

On exprime les coefficients de la série entière à l'aide des intégrales, pour tout $r > 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt.$$

En majorant, on obtient

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} (Ar^d + B)$$

et ce terme tend vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$ si $n > d$. On a donc $a_n = 0$ pour tout $n > d$ et $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$.

Exercice 18.21

En utilisant le DSE de la fonction sinus (valable sur \mathbb{R}), on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin(q^n x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(q^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k q^{n(2k+1)} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

On cherche donc à permuter les deux sommes pour écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k q^{n(2k+1)} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k q^{n(2k+1)} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n(2k+1)} \right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ce qui donnerait, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{1 - q^{2k+1}} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Pour justifier la permutation, on applique le théorème de Fubini. Il suffit de justifier la convergence d'une des sommes doubles avec la valeur absolue des termes : on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| (-1)^k q^{n(2k+1)} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} |q|^{n(2k+1)} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|q^n x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sh}(|q^n x|)$$

et puisque $\operatorname{sh}(|q^n x|) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x| \cdot |q|^n$, la série $\sum \operatorname{sh}(|q^n x|)$ converge ce qui justifie la sommabilité et la permutation précédente.

Exercice 18.22

1. $1 - \ln 2$
2. $\arctan \frac{1}{4}$
3. $\int_0^1 \frac{dt}{t^3+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$

Exercice 18.23

Pour tout $x \in]0, 1[$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (la relation est également vraie en 1 d'après le théorème d'Abel radial) et, pour tout $x \in]0, 1[$,

$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ (l'égalité est vraie en 0 en prolongeant par continuité par la valeur 1). On note $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$. La série de

fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$, la somme est la fonction $x \mapsto \frac{\arctan x}{x}$, continue sur $]0, 1[$ et $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$. La série

$\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc le théorème d'intégration terme à terme s'applique, ce qui donne le résultat.

Remarque : si on note $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$ pour $x \in]0, 1[$ et $f(0) = 1$, la fonction est continue en 0, DSE avec un rayon de convergence 1. On peut intégrer :

$$\forall x \in]0, 1[, \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

Puisque $\sum (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge absolument, fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ est continue en 1, ce qui permet de faire tendre x vers 1 dans l'égalité précédente et ainsi d'obtenir le résultat d'une autre manière

Exercice 18.24

1. on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{a_n}{n!} x^n \right| = \frac{0}{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|x|^n}{n!} \right)$ et la série converge. Le rayon de convergence est donc infini et la fonction S est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. On note $g(x) = S(x)e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n e^{-x}$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ et sa somme g est continue sur \mathbb{R}^+ . On a $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$ (par récurrence) donc $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|$. Puisque $\sum a_n$ converge absolument, le théorème d'intégration terme à terme s'applique et on obtient

$$\int_0^{+\infty} S(t)e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 18.25

1. On note $I =]-\pi, 0[\cap]0, \pi[$ et $J =]-\pi, \pi[$. Pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \sin x}{x^2} \frac{x}{\sin x}.$$

Puisque $x - \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$, on en déduit $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{6}$ et f tend vers 0 en 0.

2. Soit $h(x) = \frac{x - \sin x}{x^2}$ prolongé par 0 en 0. Pour tout $x \in I$, on a

$$h(x) = -\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+3)!}.$$

L'égalité est vraie également en 0. Ainsi h est la somme d'une série entière sur J , donc h est indéfiniment dérivable sur J . On montre de même que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, prolongée par 1 en 0, est indéfiniment dérivable sur J . Ne s'annulant pas sur J sont inverse l'est aussi. Finalement f est de classe \mathcal{C}^∞ sur J .

Exercice 18.27

1. On a $u_1 = u_2 = 1$ (une seule façon de calculer le produit). Pour un produit $a_1 \times a_2 \times a_3$, on a 2 façons de faire le calcul.
2. Pour effectuer un produit de n termes avec n au moins égal à 2, on termine par un dernier produit entre un produit avec les k premiers termes (avec $k \geq 1$) et les $n-k$ derniers (avec k au plus égal à $n-1$). Pour ce type de produit, on a u_k façons de calculer le produit des k premiers termes et u_{n-k} pour les $n-k$ derniers. Le nombre total de façons est donc $u_k u_{n-k}$ et cela pour k allant de 1 à $n-1$. On obtient

la relation voulue : $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$.

3. On note donc $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$. On a, pour $|x| < R$,

$$S(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} \right) x^n$$

On retrouve exactement le produit de Cauchy de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ avec elle-même (on peut retrouver la formule usuelle en posant par exemple $u_0 = 0$). Le premier terme de $S^2(x)$ est bien un terme en x^2 . Finalement, pour $|x| < R$, on a

$$S(x) = x + S^2(x).$$

On résout cette équation du second degré pour trouver $S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$. Puisque $S(0) = 0$, on a $S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$. On n'a plus qu'à redévelopper en série entière pour trouver les coefficients u_k par unicité : pour $|x| < \frac{1}{4}$,

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot (-1) \cdots (-2n+3)}{2^n} \frac{(-4x)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! 2^n 2^{n-1}} \frac{(-4x)^n}{n!}$$

donc

$$S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$$

ce qui donne, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$. On vérifie pour les premières valeurs de n : pour $n = 1$, on trouve 1, pour $n = 2$, $\frac{2!}{2!} = 1$ et $u_3 = \frac{4!}{3!2!} = 2$.

Remarque : on peut écrire aussi $u_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$.

Exercice 18.28

- On vérifie par récurrence que la suite (a_n) est bien définie et à valeurs non nulles. De plus $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 0 donc le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$ et sa somme totale f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1}(\ell x)^{n+1} - a_{n+1}x^{n+1} = \ell a_n x^n$. En sommant ces égalités on obtient la relation $f(\ell x) - f(x) = \ell x f(x)$ c'est-à-dire

$$f(\ell x) = (1 + \ell x)f(x).$$

Soit Z l'ensemble des x tels que $f(x) = 0$. La relation (*) montre

- $-1 \in Z$
- si x est dans Z , ℓx est aussi dans Z
- si $x \neq -1$ est dans Z alors $\frac{x}{\ell}$ est dans Z .

On en déduit $Z = \{-\ell^n, n \in \mathbb{N}\}$. En effet, de i) et ii) on déduit que $\{-\ell^n, n \in \mathbb{N}\} \subset Z$. Inversement supposons par l'absurde l'existence de $x \in Z \setminus \{-\ell^n, n \in \mathbb{N}\}$. Alors, d'après iii), Z contiendrait tous les réels $\frac{x}{\ell^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. C'est absurde car par continuité de f on aurait

$$1 = a_0 = f(0) = \lim_n f\left(\frac{x}{\ell^n}\right) = 0.$$