

CHAPITRE 18 - FONCTIONS VECTORIELLES

Exercice 18.1

On note $C_1(x), \dots, C_n(x)$ les colonnes de $D_n(x)$. On remarque que $C'_i(x) = C_{i+1}(x)$ si $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. On peut alors dériver D_n et obtenir

$$D'_n(x) = \det(C'_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)) + \dots + \det(C_1(x), \dots, C'_{n-1}(x), C_n(x)) + \det(C_1(x), \dots, C_{n-1}(x), C'_n(x)).$$

Ces déterminants sont tous nuls (deux colonnes identiques) sauf le dernier. En développant par blocs, on a alors $D'_n(x) = D_{n-1}(x)$. On constate également que $D_n(0) = 0$. Par récurrence simple, on montre alors que $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 18.2

On note $M = \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\|$. On a, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u) du = \int_a^t f'(u) du$. Cela donne $\|f(t)\| \leq \int_a^t \|f'(u)\| du \leq M(t-a)$.

En intégrant entre a et b , on obtient

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq M \frac{(b-a)^2}{2}$$

ce qui ne suffit pas. On a cependant

$$\left\| \int_a^{(a+b)/2} f(t) dt \right\| \leq M \frac{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{8}$$

Le même travail avec $f(t) = f(b) + \int_b^t f'(u) du = -\int_t^b f'(u) du$ permet d'obtenir

$$\left\| \int_{(a+b)/2}^b f(t) dt \right\| \leq M \frac{\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{8}$$

et finalement le résultat en sommant et avec l'inégalité triangulaire.