

CHAPITRE 19 - ESPACES VECTORIELS NORMÉS

APPLICATIONS LINÉAIRES, CONNEXITÉ

Exercice 19.1

1. Soient (a, b) et (a', b') deux éléments de $A \times B$. Il existe $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A$ et $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow B$ continues avec $\gamma_1(0) = a, \gamma_1(1) = a'$ et $\gamma_2(0) = b, \gamma_2(1) = b'$.

Le chemin $\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & A \times B \\ t & \longmapsto & (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{cases}$ est bien continu et relie (a, b) à (a', b') donc $A \times B$ est connexe par arcs.

2. De même, $\tilde{\gamma} : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & A + B \\ t & \longmapsto & \gamma_1(t) + \gamma_2(t) \end{cases}$ est un chemin continu qui relie $a + b$ à $a' + b'$ donc $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice 19.2

Soit $A \in \Delta_n$. On va joindre A à I_n . Soit $f(t) = tA + (1-t)I_n$. Si P est inversible et vérifie $P^{-1}AP = D$ diagonale, alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $P^{-1}f(t)P = tD + (1-t)I_n$ diagonale. Pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t)$ est diagonalisable, et on a $f(0) = I_n$ et $f(1) = A$. L'ensemble Δ_n est bien connexe par arcs.

Exercice 19.3

1. L'application déterminant est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, alors son image par \det serait connexe par arcs. Or $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si z n'est pas un réel négatif, alors l'application $t \mapsto t + (1-t)z$ (segment) relie 1 et z de façon continue dans \mathbb{C}^* . Si $z = -r < 0$, alors l'application $t \mapsto r \exp(it)$ relie de façon continue 1 à z . On peut donc joindre tout point de \mathbb{C}^* à 1, et \mathbb{C}^* est connexe par arcs. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On va montrer qu'on peut relier A à la matrice identité. Il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = D + T$ où D est la matrice diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$, et T est triangulaire strictement supérieure. Puisque \mathbb{C}^* est connexe par arcs, il existe des applications continues de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C}^* telles que $f_i(1) = \lambda_i$ et $f_i(0) = 1$. On considère alors la matrice

$$M(t) = P(D_t + tT)P^{-1},$$

où D_t est la matrice diagonale $(f_1(t), \dots, f_n(t))$. On a $\det M(t) = \det D_t$ pour tout t , donc $M(t)$ est inversible pour tout $t \in [0, 1]$, $M(0) = I_n$ et $M(1) = A$. On a montré que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 19.4

il suffit de montrer que l'on peut relier continuellement un point d de D à un point c de C en restant dans D . Soient donc $d \in D$ et $c \in C$. Considérons une suite $(c_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de C de limite d . On pose $c_0 = c$. Soit γ défini sur $]0, 1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \quad \gamma(t) = (c_{n+1} - c_n) \frac{(t - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} + c_n$$

Comme C est convexe, γ est à valeurs dans C ; on a de plus γ continu et $\gamma(t) \rightarrow d$ quand $t \rightarrow 0$. Il reste à poser $\gamma(0) = d$ pour conclure.

Exercice 19.6

- Les deux applications sont linéaires sur un espace de dimension finie. Elles sont donc continues.
- L'application est bilinéaire sur un produit d'espaces de dimension finie. Elle est donc continue.
- Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On a $A^n X = \lambda^n X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons une norme sur $M_{p,1}(\mathbb{C})$ ainsi que sa norme subordonnée. On a $\|A^n X\| \leq \|A^n\| \|X\|$ mais aussi $\|A^n X\| = |\lambda|^n \|X\|$. La suite (A^n) est bornée ce qui signifie qu'elle l'est pour n'importe quelle norme (elles sont équivalentes). On en déduit que $|\lambda|^n \leq \|A^n\|$ et (λ^n) est une suite bornée d'où $|\lambda| \leq 1$.
- La suite $B^{2n} = B^n B^n$ converge à la fois vers C^2 (avec la seconde question) et vers C (en tant que suite extraite). Par unicité de la limite $C^2 = C$. Puisque (B^n) converge, la suite est bornée et les valeurs propres de B sont de module inférieur à 1. Si λ est une valeur propre de module 1 de B et X un vecteur propre, on a $B^n X = \lambda^n X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque B^n converge vers C , d'après la première question, $B^n X$ converge vers CX . Ainsi λ^n est convergente si bien que $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

Exercice 19.7

- On vérifie rapidement que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ (c'est même un hyperplan de cet espace). Une fonction de E est bornée, ce qui justifie l'existence de la norme.
- L'application φ est définie car $\left| \frac{f(1/n)}{2^n} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ converge. De plus, on a immédiatement

$$|\varphi(f)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(1/n)|}{2^n} \leq \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \cdot \|f\|_\infty.$$

Cela donne la continuité de f ainsi que $\|\varphi\| \leq 1$.

→ Pour obtenir le cas d'égalité, il faudrait que f soit toujours égale à $\|f\|_\infty$, ce qui pose problème car $f(0) = 0$. On construit alors une fonction f_p de E telle que $f(x) = 1$ sur $x \in [\frac{1}{p}, 1]$, $f(0) = 0$ et f est linéaire sur $[0, \frac{1}{p}]$ (sur ce segment $f(x) = px$). On a

$$|\varphi(f)| = \sum_{n=1}^p \frac{1}{2^n} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{f(1/n)}{2^n} \geq \sum_{n=1}^p \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^p}.$$

Cela étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\|\varphi\| \geq 1$. Finalement $\|\varphi\| = 1$.

Exercice 19.8

On note $\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(1/2) \end{cases}$. La linéarité de φ se montre facilement. On montre que φ n'est pas continue en 0. On cherche une suite de fonctions (f_n) qui converge vers la fonction $f = 0$ pour la norme $\|\cdot\|_1$ telle que $\varphi(f_n)$ ne converge pas vers 0. On prend f_n la fonction nulle sur $[0, 1/2 - 1/n]$ et $[1/2 + 1/n, 1]$, qui vaut 1 en $1/2$ et affine sur $[1/2 - 1/n, 1/2]$ et $[1/2, 1/2 + 1/n]$. On a $\|f_n\|_1 = 1/n$ donc (f_n) converge vers la fonction nulle et $\varphi(f_n) = 1/2$ de limite non nulle.

Exercice 19.9

L'application existe et est bien linéaire.

→ On a rapidement que $|\varphi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1$. L'application est continue et de plus $\|\varphi\| \leq 1$. Pour f telle que $\|f\|_1 = 1$, on se rend compte que $\varphi(f)$ vaut $\|f\|_1$ lorsque f est positive sur $[0, 1/2]$ et négative sur $[1/2, 1]$. Ça laisse pas mal d'exemples disponibles pour avoir le cas d'égalité.

→ On a rapidement que $|\varphi(f)| \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty + \frac{1}{2} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$. L'application est continue et de plus $\|\varphi\| \leq 1$. On cherche une fonction continue telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $\varphi(f) = 1$. On se rend compte qu'il faut que f soit égale à 1 sur $[0, 1/2]$ et -1 sur $[1/2, 1]$ ce qui est impossible. On approche alors cette fonction par une fonction f_n , pour $n \geq 2$, telle que $f_n(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, -1 si $x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$, et affine entre les deux. On calcule (on peut le faire géométriquement) $\varphi(f_n) = 1 - \frac{1}{n}$. Ainsi $\|f\| \geq \frac{\varphi(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = 1 - \frac{1}{n}$. Cela étant vrai pour tout $n \geq 2$ donc $\|f\| \geq 1$ et finalement la valeur 1.

Exercice 19.10

Pour tout $X \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, grâce à l'inégalité triangulaire, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$|(AX)_k| \leq \left(\sum_{j=1}^p |a_{kj}| \right) \|X\|_\infty \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty.$$

En passant au maximum, il vient $\|AX\|_\infty \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty$ d'où $\|A\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| = M$.

Construisons un vecteur X unitaire tel que $\|AX\|_\infty = M$. (on sait, par le cours, la sphère étant compact en dimension finie, que la borne supérieure dans la définition de la norme subordonnée est atteinte).

Soit i_0 tel que $M = \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j}|$. Écrivons le nombre complexe $a_{i_0 j}$ sous la forme $|a_{i_0 j}| e^{i\theta_j}$. Posons $X = {}^t(e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_n})$. On a $(AX)_{i_0} = M$ et

$\|X\|_\infty = 1$. Donc $\|A\| \geq \|AX\|_\infty \geq M$ et finalement $\|A\| = M = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$.

Exercice 19.11

→ on commence par choisir une norme sur $\mathcal{L}(E)$. On prend la norme subordonnée $\|u\| = \sup\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E, x \neq 0\}$.

→ on montre que \mathcal{A} est fermé : soit (u_n) une suite d'éléments de \mathcal{A} de limite u (on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\| = 0$). Soit $x \in K$. On a

$$\|u_n(x) - u(x)\| \leq \|u_n - u\| \|u\|.$$

On en déduit que $u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$. Puisque $u_n(x) \in K$, sa limite est encore dans le compact - donc fermé - K . Ainsi pour tout $x \in K$, $u(x) \in K$. L'endomorphisme u est encore dans \mathcal{A} .

→ on montre que \mathcal{A} est borné : il existe $a \in K$ et $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset K$. On a également $\overline{B(a, r)} \subset K$. Le compact K est borné donc il existe M tel que, pour tout $x \in K$, $\|u(x)\| \leq M$. Soit $u \in \mathcal{A}$. Si $\|x\| \leq r$ alors $u(a+x) \in K$ puisque $a+x \in \overline{B(a, r)} \subset K$. Ainsi,

$$\forall x \in E, \|x\| \leq r \Rightarrow \|u(x)\| \leq M + \|u(a)\| = C$$

Si $x \neq 0$, le vecteur $r \frac{x}{\|x\|}$ est dans cette boule fermée donc

$$\left\| u \left(r \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq C,$$

ce qui donne $\|u(x)\| \leq \frac{C}{r} \|x\|$ pour tout $x \in E$ non nul et également pour $x = 0$. Finalement $\| \|u\| \leq \frac{C}{r}$ et \mathcal{A} est une partie bornée de $\mathcal{L}(E)$. La partie \mathcal{A} est fermée et bornée donc est compacte.

Exercice 19.13

1. voir cours : elles sont équivalentes à la matrice J_r donc équivalentes.
2. le plus simple est de faire un dessin. Si a et b sont deux complexes qui ne sont pas réels. On montre qu'on peut les relier par une droite qui passe par l'axe des réels : les droites qui relient a à un réel ne rencontrent pas les éléments de C sauf pour un nombre fini d'entre elles. De même pour b . Il existe donc des droites qui relient a à un réel x et d'autres qui relient b à ce même x sans rencontrer F . Si l'un est réels on fait de même avec les imaginaires purs (par exemple - on peut aussi relier a et b par des arcs de cercle).
3. Soient A et B de rang r . Il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PNQ$. Puisque $GL_n(\mathbb{C})$ est connexes par arcs, il existe deux fonctions continues sur $[0, 1]$ $t \mapsto Q(t)$ et $t \mapsto P(t)$ avec $Q(0) = I_n$ et $Q(1) = Q$ et de même pour $P(t)$. On note $f(t) = P(t)NQ(t)$. Pour tout $t \in [0, 1]$ $f(t)$ est de rang r , $f(0) = N$ et $f(1) = PNQ = M$. On a bien un ensemble connexe par arcs.
4. Si $A \in R_p$ avec $p < n$: On a χ_A qui s'annule en 0. Le polynôme χ_A ne s'annule pas sur un voisinage de 0 ailleurs qu'en 0 donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \eta$, $A - zI_n$ est inversible. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ inversible (donc pas dans R_p) telle que $\|A - B\| < \varepsilon$ et aucun point de R_p n'est intérieur. L'intérieur de R_p est vide. Dans le cas de $p = n$, on sait que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert (image réciproque de \mathbb{C}^* par le déterminant) donc l'intérieur de R_n est lui même.
5. Pour $p = n$, l'adhérence est $M_n(\mathbb{C})$. On suppose $p < n$. On va montrer que l'adhérence est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p :
 - Si A est de rang $r \leq p$, il existe P, Q inversible telle que $A = PJ_rQ$. On considère alors $A_k = A + \frac{1}{k}PJ_pQ = P(J_r + \frac{1}{k}J_p)Q$. C'est une suite de matrice de rang p qui converge vers A .
 - On vérifier que l'ensemble des matrices de rang inférieur à p est fermé : on considère l'application qui à une matrice A quelconque associe l'ensemble de ses mineurs de taille $p+1$ (il y en a un certain nombre, plus précisément $N = \binom{n}{p+1}^2$). L'application, qui va de $M_n(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C}^N est continue car chaque composante est polynomiale. L'image réciproque de $0_{\mathbb{C}^N}$ est un fermé qui est l'ensemble des matrices de rang au plus p .