CHAPITRE 20 - RÉDUCTION - PARTIE 2

Exercice 20.1

Le polynôme $P=(X+1)^3(X+2)$ est annulateur de f. Le polynôme minimal est un diviseur de ce polynôme P. Si f est diagonalisable alors son polynôme minimal serait parmi les polynômes $X+1$, $X+2$ et $(X+1)(X+2)$. Or le polynôme $Q=(X+1)^2(X+2)$ n'est pas annulateur donc aucun des trois polynômes précédents ne peut l'être (Q en est un multiple à chaque fois). En conclusion f n'est pas diagonalisable.

Exercice 20.2

1. Déterminons le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow\sum_{i=1}^{3} C_i}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ X-1 & X-3 & 1 \\ X-1 & -2 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^3\end{aligned}$$

   Ainsi A admet 1 comme unique valeur propre.

2. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible. Si A était diagonalisable elle serait semblable à la matrice identité et donc égale à la matrice identité. Puisque ce n'est pas le cas, A n'est pas diagonalisable.
3. Notons P_m le polynôme minimal de A. P_m divise χ_A et P_m est un polynôme annulateur de A. On a $A-I_3\neq 0$ et $(A-I_3)^2=0$. Ainsi $P_m=(X-1)^2$.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$: $X^n=(X-1)^2Q+(aX+b)$. Puisque 1 est racine double de $(X-1)^2$ on obtient : $1=a+b$ et, après dérivation, $n=a$. Finalement $R=nX+1-n$. Puisque $P_m=(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A on a d'après (1) et (2) :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=nA+(1-n)I_3$$

Exercice 20.3

1. On a $u^3+u^2+u=0$. Soit $y\in \operatorname{Im} u\cap\ker u$, alors $\exists x\in E$ tel que $y=u(x)$ et $u(y)=0$. Donc, $0=u^3(x)+u^2(x)+u(x)=\underbrace{u^2(y)}_{=0}+\underbrace{u(y)}_{=0}+y=0$ et $y=0$. On a $\ker u\cap \operatorname{Im} u=\{0\}$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim E=\dim\ker u+\dim\operatorname{Im} u$. On en déduit, $E=\ker u\oplus\operatorname{Im} u$.
2. (a) Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, alors $\ker(PQ)(u)=\ker P(u)\oplus\ker Q(u)$.
   (b) On pose $P=X^3+X^2+X$. P est un polynôme annulateur de u donc $\ker P(u)=E$. $P=X(X^2+X+1)$. De plus, X et X^2+X+1 sont premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux, $E=\ker u\oplus\ker(u^2+u+\mathrm{Id})$. On en déduit que $\dim\ker(u^2+u+\mathrm{Id})=\dim E-\dim\ker u=\dim\operatorname{Im} u$. On montre alors que $\operatorname{Im} u\subset\ker(u^2+u+\mathrm{Id})$: soit $y\in\operatorname{Im} u$, alors $\exists x\in E$ tel que $y=u(x)$.$(u^2+u+\mathrm{Id})(y)=(u^3+u^2+u)(x)=0$, donc $y\in\ker(u^2+u+\mathrm{Id})$. On a donc prouvé que $\operatorname{Im} u\subset\ker(u^2+u+\mathrm{Id})$, donc $\operatorname{Im} u=\ker(u^2+u+\mathrm{Id})$.
3. $P=X^3+X^2+X=X(X^2+X+1)$ est un polynôme annulateur de u. Si on note $\mathrm{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u alors $\mathrm{sp}(u)\subset$ {racines réelles de P}, donc $\mathrm{sp}(u)\subset\{0\}$. Or u est non bijectif donc, comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, u est non injectif, donc $\ker u\neq\{0\}$, donc 0 est valeur propre de u. On en déduit que $\mathrm{sp}(u)=\{0\}$.

Exercice 20.4

1. Pour tout $M\in M_n(\mathbb{C})$,
$$\begin{aligned}\phi^2(M)&=\mathrm{tr}(\phi(M))I_n-\phi(M)=(n-1)\mathrm{tr}(M)\,I_n-(\mathrm{tr}(M)I_n-M)\\&=(n-2)(\mathrm{tr}(M)I_n-M)+(n-1)M=(n-2)\phi(M)+(n-1)M.\end{aligned}$$
   Le polynôme $P=X^2-(n-2)X-(n-1)=(X+1)(X-n+1)$ est scindé à racines simples et c'est un polynôme annulateur de ϕ, donc ϕ est diagonalisable.
2. Pour $n\geqslant 2$, ϕ n'est visiblement pas une homothétie donc ϕ admet pour valeur propre -1 et $n-1$. On a $M\in E_{-1}(\phi)$ si, et seulement si, $\mathrm{tr}(M)I_n=0$ donc $E_{-1}(M)=\{M\in M_n(\mathbb{C}),\mathrm{tr}(M)=0\}$, c'est-à-dire l'hyperplan des matrices de trace nulle (de dimension n^2-1). Le second sous-espace propre est donc une droite, et on vérifie que $\phi(I_n)=(n-1)I_n$ donc $E_{n-1}(\varphi)=\mathrm{Vect}(I_n)$.
3. La trace de ϕ est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité : $\mathrm{tr}\,\phi=\left(n^2-1\right)\times(-1)+(n-1)=-n(n-1)$. De même, le déterminant de ϕ est égal au produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité : $\det\phi=(-1)^{n^2-1}\times(n-1)=(-1)^{n-1}(n-1)$ (n^2 a même parité que n).
4. Le polynôme caractéristique est $\chi_\phi(X)=(X+1)^{n^2-1}(X-n+1)$.

5. ϕ est inversible puisque $\det\phi \neq 0$. On détermine ϕ^{-1} grâce au polynôme annulateur, en effet $\phi^2-(n-2)\phi-(n-1)\mathrm{Id}=0$ donc

$$\phi\circ(\phi-(n-2)\mathrm{Id})=(n-1)\mathrm{Id},$$

ce qui donne $\varphi^{-1}=\dfrac{1}{n-1}(\phi-(n-2)\mathrm{Id})$.

Exercice 20.5

On a plusieurs moyens pour le faire.

→ le plus rapide est de constater que si M est symétrique alors $f(M)=3M$ et si M est antisymétrique $f(M)=-M$. Puisque $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires, on a décomposé $M_n(\mathbb{R})$ en somme de deux sous-espaces vectoriels de vecteurs propres donc f est diagonalisable, ses éléments propres sont $(3,S_n(\mathbb{R}))$ (avec une dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$) et $(-1,A_n(\mathbb{R}))$ (avec une dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$).

→ si on ne le remarque pas, on peut chercher un polynôme annulateur de f : pour tout $M\in M_n(\mathbb{R})$,

$$f^0(M)=(\mathrm{Id})(M)=M, f(M)=M+2{}^tM \text{ et } f^2(M)=f(M+2{}^tM)=M+2{}^tM+2({}^tM+2M)=5M+4{}^tM$$

On a donc $f^2(M)-2f(M)=3M=3f^0(M)$, c'est-à-dire $(f^2-2f-3\mathrm{Id})(M)=0$ pour toute matrice M. Ainsi le polynôme $X^2-2X-3=(X-3)(X+1)$ est annulateur, scindé à racines simples. L'endomorphisme est diagonalisable et $\mathrm{Sp} f\subset\{-1,3\}$. On résout $f(M)=3M$: c'est équivalent à $M={}^tM$. De même $f(M)=-M$ si et seulement si M est antisymétrique.

Il existe une base de $M_n(\mathbb{R})$ das laquelle la matrice de f est diagonale avec $\dfrac{n(n+1)}{2}$ termes diagonaux de valeur 3 et les $\dfrac{n(n-1}{2}$ autres de valeur -1. Cela donne $\det f=3^{\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1}{2}}$ et $\mathrm{tr}\, f=3\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{n(n-1}{2}=n^2+2n$.

Exercice 20.6

la matrice A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ (indépendance de la famille). Le polynôme X^n-1 est par conséquent le polynôme minimal de A. La matrice A est donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ (polynôme annulateur scindé à racines simples) et ses valeurs propres sont exactement les racines n-ièmes de l'unité. La matrice admet donc exactement n valeurs propres distinctes, qui sont forcément de multiplicité 1. La matrice A est donc semblable à la matrice de diagonale $(1,\omega,\dots,\omega^{n-1})$ où $\omega=e^{2i\pi/n}$. La trace de A est la somme de ces valeurs propres, c'est-à-dire 1 (la trace nest invariante par changement de base). On peut aussi dire que $\chi_A=X^n-1$ et $\mathrm{tr}\, A$ est l'opposé du coefficient de degré $n-1$

Exercice 20.7

Soit $P=X^3-X-1$. On a $P'=3X^2-1$. Une rapide étude montre que P est croissant sur $]\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty[$, décroissant entre les deux. Il admet un maximum local $P(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}-1<0$, et finalement une unique racine réelle $\alpha>0$ (entre 1 et 2). Notons β et $\bar\beta$ les deux racines complexes conjuguées. Le polynôme P est donc scindé à racines simples et A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Elle est semblable à une matrice diagonale de diagonale α (k fois), β (m fois) et $\bar\beta$ (m' fois). On montre que $m=m'$: soit parce qu'on sait que l'application $X\mapsto\bar X$ est une bijection entre les deux sous-espaces propres associés à ces deux valeurs conjuguées, soit parce que la trace est réelle et sa partie imaginaire est $(m-m')\mathrm{Im}(\beta)$. Finalement, on a $\det A=\alpha^k(\beta\bar\beta)^m=\alpha^k|\beta|^{2m}>0$.

Exercice 20.8

Le polynôme caractéristique de M s'écrit $\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_n=1$ et $a_0=(-1)^n\det M\neq 0$ puisque M est inversible. Ce polynôme est annulateur, et $a_0I_n+\sum_{k=1}^{n}a_kM^k=0$. Cela peut s'écrire $M\left(\sum_{k=1}^{n}a_kM^{k-1}\right)=-a_0I_n$, ou encore

$$M\left(\sum_{k=1}^{n}-\frac{a_k}{a_0}M^{k-1}\right)=I_n.$$

Cela prouve que l'inverse de M est $\sum_{k=1}^{n}-\dfrac{a_k}{a_0}M^{k-1}$, polynôme en M.

Exercice 20.9

Le polynôme P s'écrit $P=XQ$ avec $Q(0)\neq 0$. Le théorème de décomposition des noyaux donne $E=\ker f\oplus\ker Q(f)$. On va montrer que $\ker Q(f)=\mathrm{Im}\, f$. En fait puisque $\dim\ker Q(f)=n-\dim\ker f=\dim\mathrm{Im}\, f$, une inclusion suffit. Soit $Q=a_0+q_1X+\dots+a_qX^q$ avec $a_0\neq 0$. Si $x\in\ker Q(f)$, alors

$$a_0x+\sum_{k=1}^{q}a_kf^k(x)=0,$$

ce qui donne

$$x = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{q} a_k f^k(x) = f\left(-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{q} a_k f^{k-1}(x)\right) \in \operatorname{Im} f.$$

Exercice 20.10

On note $B = A^2 - 2A$. La matrice est diagonalisable : si on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ses valeurs propres, alors

$$M_{n1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(B - \lambda_k I_n) = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(A^2 - 2A - \lambda_k I_n).$$

Soit $P_k = X^2 - 2X - \lambda_k$. On voudrait applique le théorème de décomposition des noyaux à $\ker P_k(A)$. Pour cela il suffit que P possède deux racines distinctes. Son discriminant est $4 + 4\lambda$. Si $\lambda \neq -1$, alors on peut noter α_k et β_k les deux racines de P_k. On a alors $\ker(A^2 - 2A - \lambda_k I_n) = \ker(A - \alpha_k I_n) \oplus \ker(A - \beta_k I_n)$.
On s'intéresse au cas $\lambda = -1$. Cela revient à étudier $\ker(A - I_n)^2$. Or 1 n'est pas valeur propre de A donc $A - I_n$ est bijective, donc $(A - I_n)^2$ aussi et le cas $\lambda = -1$ ne peut se produire (on a $\ker(A - I_n)^2 = \{0\}$). Finalement

$$M_{n1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=1}^{p} \left(\ker(A - \alpha_k I_n) \oplus \ker(A - \beta_k I_n)\right).$$

L'espace est somme d'espaces propres de A (certains termes de la somme sont éventuellement nuls), donc A est diagonalisable.

Exercice 20.11

Si M est semblable à une matrice diagonale D, alors M^2 est semblable à D^2. Réciproquement, supposons que M est diagonalisable et notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les valeurs propres distinctes def M^2 (ainsi que $E = \mathbb{C}^n$). On a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(M^2 - \alpha_i I_n)$. Si α_i est un complexe non nul, il admet une racine carrée complexe β_i et $X^2 - \alpha_i = (X - \beta_i)(X + \beta_i)$. Ainsi, le théorème de décomposition des noyaux donne $\ker(M^2 - \alpha_i I_n) = \ker(M - \beta_i I_n) \oplus \ker(M + \beta_i I_n)$. Si 0 nest pas valeur propre de M^2 (dans cas $\ker M = \ker M^2 = \{0\}$), alors E se décompose en somme d'espaces propres donc M est diagonalisable. Supposons que 0 est valeur propre de M^2 - quitte à réordonner, on suppose que $\alpha_p = 0$. On a alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \left(\ker(M - \beta_i I_n) \oplus \ker(M + \beta_i I_n)\right) \oplus \ker M^2.$$

On sait que $\ker M \subset \ker M^2$. De plus M n'a pas d'autres valeurs propres que $\pm\beta_i$ et 0 car si λ est valeur propre de M alors λ^2 est valeur propre de M^2. Ainsi M est diagonalisable si et seulement la somme des dimensions des espaces propres est n, ce qui donne (certaines des dimensions pouvant être nulles) :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\dim\ker(M - \beta_i I_n) + \dim\ker(M + \beta_i I_n)\right) + \dim\ker M = n.$$

Puisque

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\dim\ker(M - \beta_i I_n) + \dim\ker(M + \beta_i I_n)\right) + \dim\ker M^2 = n,$$

M est diagonalisable si et seulement si $\dim\ker M = \dim\ker M^2$ soit $\ker M = \ker M^2$ par inclusion.

Exercice 20.12

1. Écrivons $\chi_A = \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{\alpha_k}$ avec $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les racines distinctes de χ_A. On a alors $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{p} (B - a_k I_n)^{\alpha_k}$ et

$$\det(\chi_A(B)) = \prod_{k=1}^{p} \left(\det(B - a_k I_n)\right)^{\alpha_k}.$$

   Ainsi $\chi_A(B)$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des facteurs du produit est nul, c'est-à-dire si et seulement l'un des $\det(B - a_k I_n)$ est nul, ce qui signifie que l'une des valeurs propres de A est valeur propre de B. Par contraposée, on a le résultat.
2. Par récurrence très simple, on a $A^k P = PB^k$. Par linéarité, si Q est un polynôme quelconque, on a $Q(A)P = PQ(B)$. Notamment, avec $Q = \chi_A$ et puisque $\chi_A(A) = 0$, il vient $P\chi_A(B) = 0$. Si A et B n'ont pas de valeur propre commune alors $\chi_A(B)$ est inversible et on obtient $P = 0$. Cette contradiction montre que A et B ont une valeur propre commune.
3. Puisque $\chi_{{}^tB}(X) = \det({}^tB - xI_n) = \det(B - x^tI_n) = \chi_B(x)$, les matrices B et ${}^tB$ ont même valeur propre. Il existe alors X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \lambda X$ et Y un vecteur colonne non nul tel que ${}^tBY = \lambda Y$ soit ${}^tYB = \lambda^tY$. Considérons alors la matrice $P = X^tY$ carrée de taille n. On a $AP = AX^tY = \lambda P$ et $PB = X^tYB = \lambda P$. Donc $AP = PB$ et P a au moins un coefficient non nul puisque X et Y sont deux vecteurs colonnes non nuls.

Exercice 20.13

Le polynôme $X(X^2+1) = X(X+i)(X-i)$ est annulateur. Le théorème de décomposition des noyaux donne $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus \ker(u^2+\mathrm{Id})$.

→ on doit commencer par montrer que u n'est pas injective. Il y a plusieurs façons pour le prouver. La seule racine réelle de X^3+X est 0, c'est donc la seule valeur propre possible. Puisque χ_u est de degré 3, il admet une racine réelle, donc 0. Ainsi 0 est valeur propre et u n'est pas injective ($\ker u$ est de dimension au moins 1). On peut également considére la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette matrice admet X^3+X comme polynôme annulateur. Ses valeurs propres complexes sont parmi $0, i, -i$. Puisque les espaces propres $E_i(A)$ et $E_{-i}(A)$ sont de même dimension (donc au maximum 1), l'espace $E_0(A)$ ne peut pas être réduit à 0. On peut également supposer que u est inversible. Alors $u\circ(u^2+\mathrm{Id}) = 0$ donne $u^2+\mathrm{Id} = 0$. On obtient $u^2 = -\mathrm{Id}$. En prenant le déterminant, on obtient $(\det u^2) = (\det u)^2 = -1)^3 = -1$, ce qui est difficile pour un carré de $\mathbb{R}$.

→ On cherche une famille libre (e_2, e_3) telle que $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = -e_2$. On obtient notamment $u^2(e_2) = -e_2$. Puisque $u \neq 0$, on a $\dim\ker u \leqslant 2$, si bien que $\dim\ker(u^2+\mathrm{Id}) \geqslant 1$. Il existe donc au moins un vecteur non nul dans $\ker(u^2+\mathrm{Id})$. On le note e_2 et on pose $e_3 = u(e_2)$. On montre facilement que $(u^2+\mathrm{Id})(e_3) = 0$. La famille (e_2, e_3) est libre. En effet, si $e_3 = u(e_2) = \alpha e_2$, on aurait $u^2(e_2) = \alpha^2 e_2 = -e_2$ donc $\alpha^2 = -1$ ce qui est impossible (α est réel). La famille (e_2, e_3) est donc une famille libre de $\ker(u^2+\mathrm{Id})$. On prend e_1 un vecteur non nul de $\ker u$. Par somme directe, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, et est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice de u est celle demandée.

Exercice 20.14

1. Puisque A est diagonalisable, elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Si ce polynôme ne vérfie par $P(0) = 0$, alors 0 n'est pas racine et le polynôme $Q = XP$ est encore scindé à racines simples, et bien entendu annulateur. Ce polynôme est nul en 0. On note B la matrice de taille $2n$ donnée. On vérifie rapidement que $B^2 = \begin{pmatrix} 2A^2 & 2A^2 \\ 2A^2 & 2A^2 \end{pmatrix}$, et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1}A^k & 2^{k-1}A^k \\ 2^{k-1}A^k & 2^{k-1}A^k \end{pmatrix}$. Notons $B' = B/2$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B'^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A^k & A^k \\ A^k & A^k \end{pmatrix}$. Soit $P = \sum_{k=1}^{d} a_k X^k$ un polynôme annulateur scindé à racines simples de A, nul en 0. On a
$$P(B') = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} a_k B'^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ P(A) & P(A) \end{pmatrix} = 0_{2n}.$$
Ainsi B' est diagonalisable et $B = 2B'$ aussi (on choisit un polynôme annulateur nul en 0 cat B^0 n'a pas une bonne forme).
2. On calcule de même B^k. On vérifie par récurrence que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$. Supposons que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de B. On a
$$P(B) = 0_{2n} = \begin{pmatrix} P(A) & C \\ 0 & P(A) \end{pmatrix},$$
où $C = \sum_{k=0}^{n} k a_k A^k = AP'(A)$. Si B est diagonalisable, alors on choisit P annulateur scindé à racines simples pour B. On a alors $P(A) = 0$ et $AP'(A) = 0$, soit P et XP' annulent A. Or P et P' n'ont aucune racine commune puisque P est à racines simples. La seule racine complexe commune possible entre P et XP' est donc 0. Puisque les valeurs propres de A sont des racines de P et de XP', la seule valeur propre possible de A est 0. Puisque A est diagonalisable, son polynôme minimal est donc X, ce qui signifie $A = 0$.

Exercice 20.15

1. Les valeurs propres réelles de f sont des racines de P. Il n'y a donc pas de valeurs propres réelles pour f. Si E était de dimension impaire, alors χ_f serait de degré impair et admettrait alors au moins une racine réelle.
2. Soit $F = \mathrm{Vect}(x, y)$. Pour montrer que F est stable par f, il suffit de montrer que $f(x)$ et $f(y)$ sont dans F (par linéarité). On a $f(x) = y - ax \in F$. On a $f(y) = f^2(x) + af(x)$. Or $f^2 + af + b\mathrm{Id} = 0$ donc $f(y) = -bx$. Ainsi F est stable par f.
3. On choisit $x_1 \neq 0$ et on pose $y_1 = f(x_1) + ax_1$ ainsi que $F_1 = \mathrm{Vect}(x_1, y_1)$. On a $f(y_1) = -bx_1$ et $f(x_1) = -ax_1 + y_1$. La matrice de l'endomorphisme induit par f sur F_1 dans la base (y_1, x_1) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. On va construire une base de E formée de blocs de cette forme. On suppose qu'on a déja construit p sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ de la forme précédente (avec $F_k = \mathrm{Vect}(x_k, y_k)$ où $y_k = f(x_k) + ax_k$) en somme directe (on l'a fait pour $p = 1$). Soit $G = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$. Si $G = E$, on a fini. Sinon, on considère un vecteur $x \notin G$ et on pose $y = f(x) + ax$ et $F = \mathrm{Vect}(x, y)$. On montre que la somme $F + G$ est directe. Soit $u + (\alpha x + \beta y) = 0$ avec $u \in G$. On a $f(u) + \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$. De ces deux équations, on obtient
$$\alpha x + \beta y = -u \text{ et } \alpha(y - ax) + \beta(-bx) = -f(u)$$
soit
$$\begin{cases} \alpha & x & + & \beta y & = & -u \\ -(b\beta + a\alpha) & x & + & \alpha y & = & -f(u) \end{cases}$$
la combinaison $\alpha L_1 - \beta L_2$ donne $(\alpha^2 + a\alpha\beta + b\beta^2)x \in G$. Puisque $x \notin G$, cela donne $(\alpha^2 + a\alpha\beta + b\beta^2) = 0$. Si $\beta \neq 0$, alors en posant $t = \alpha/\beta$, on obtient $t^2 + at + b = 0$ ce qui est impossible. Finalement $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$ et il reste $u = 0$. La somme est directe. On peut alors poser $x_{p+1} = x$, $y_{p+1} = y$ et $F_{p+1} = F$ et poursuivre le raisonnement jusqu'à arriver à E.

Une autre solution en débordant légèrement du programme.
On note z et $\overline{z}$ les deux racines complexes conjuguées de $X^2 + aX + b$, $n = 2p$ et $A \in M_{2p}(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base de E. On a A annulée par

$P = (X-z)(X-\overline{z})$ donc A est diagonalisable. Les deux complexes sont valeurs propres (sinon on aurait $A = zI_{2p}$ ou $A = \overline{z}I_{2p}$). Si $AX = zX$, alors $A\overline{X} = \overline{z}\overline{X}$. L'application $X \mapsto \overline{X}$ est une bijection linéaire entre $E_z(A)$ et $E_{\overline{z}}(A)$. On note $X_1,\dots,X_p$ une base de $E_z(A)$. Immédiatement $(\overline{X}_1,\dots,\overline{X}_p)$ est une base de vecteurs propres de A et si Q est la matrice de colonnes $X_1,\overline{X}_1,\dots,X_p,\overline{X}_p$ alors $Q^{-1}AQ$ est diagonale de diagonale $z,\overline{z},\dots,z,\overline{z}$. La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique P et elle est semblable sur $\mathbb{C}$ à la matrice diagonale de diagonale $z,\overline{z}$: il existe $R \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $R^{-1}CR = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$. En considérant la matrice M constituée de p blocs B et la matrice diagonale par blocs S constituée de p blocs R, on a $S^{-1}MS$ diagonale de diagonale $z,\overline{z}$ p fois. Les matrices A et M sont donc semblables dans $M_n(\mathbb{C})$. Puisqu'elles sont toutes les deux dans $M_n(\mathbb{R})$, elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$

Exercice 20.16

1. Notons $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$ les valeurs propres distinctes (et réelles) de A. Soit Q une matrice inversible telle que $Q^{-1}AQ = D$ où D est la matrice diagonale par blocs
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}.$$
On a alors $Q^{-1}A^{2p+1}Q = D^{2p+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2p+1} I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k^{2p+1} I_{n_k} \end{pmatrix}$. L'application $t \mapsto t^{2p+1}$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc les réels λ_i^{2p+1} sont deux à deux distincts. On considère le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(\lambda_i^{2p+1}) = \lambda_i$ pour $i \in [\![1;k]\!]$. Ce polynôme existe car les points d'interpolation sont deux à deux distincts. On a alors $P(A^{2p+1}) = QP(D^{2p+1})Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$ par construction de P.
2. En reprenant le polynôme de la question précédente, on a $A = P(A^{2p+1}) = P(B^{2p+1})$. Ainsi A est un polynôme en B. On en déduit que A et B commutent. Si Q est une matrice inversible telle que $Q^{-1}BQ$ est diagonale, alors $Q^{-1}B^{2p+1}Q$ est diagonale et $P(Q^{-1}B^{2p+1}Q) = Q^{-1}P(B^{2p+1})Q = Q^{-1}AQ$ est diagonale. Les matrices A et B sont donc codiagonalisables (on aurait pu le montrer en utilisant le résultat montré en exercice : si deux matrices sont diagonalisables et commutent alors elles sont simultanément diagonalisables). On a donc $Q^{-1}AQ$ matrice diagonale de diagonale $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ et $Q^{-1}BQ$ matrice diagonale de diagonale $\beta_1,\dots,\beta_n$. Puisque $A^{2p+1} = B^{2p+1}$, on obtient $\alpha_i^{2p+1} = \beta_i^{2p+1}$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. De nouveau, par bijectivité, on en déduit que $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i. On a montré que $A = B$.
3. Avec $A = I_n$ et $B = -I_n$, on a $A^2 = B^2 = I_n$, les matrices sont diagonalisables mais pas égales.

Exercice 20.17

→ 1) ⇒ 2) : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Le polynôme X^p est donc annulateur. La seule valeur propre de A est donc 0 (A admet au moins une valeur propre car on travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$). La matrice A est trigonalisable, avec sur la diagonale les valeurs propres de A. Ainsi A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.

→ 2) ⇒ 3) : A est semblable à T triangulaire supérieure de diagonale nulle, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à T^k. La matrice T^k reste triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc est de trace nulle. Ainsi $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(T^k) = 0$.

→ 3) ⇒ 1) : pas du tout évident... on montre d'autres implications.

→ 3) ⇒ 2) : A est semblable à T triangulaire supérieure. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et $n_1,\dots,n_p$ leurs multiplicités respectives. On obtient facilement $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{p} n_i\lambda_i^k$. Les $p \leqslant n$ premières équations donnent un système qu'on écrit matriciellement
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & & \lambda_p^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \dots & \lambda_p^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} = 0.$$
Le déterminant de la matrice est $\lambda_1 \dots \lambda_p$ multiplié par un déterminant de Vandermonde. Si aucune valeur propre n'est nulle, la matrice est inversible, tous les n_i sont nuls, ce qui est impossible puisque la somme des multiplicités vaut n. L'une des valeurs propres est nulle. Quitte à renuméroter, on peut supposer que c'est la dernière. On écrit alors les $p-1$ premières équations, sans λ_p, ni n_p. Par les arguments précédents, on obtient que toutes les autres multiplicités sont nulles. Finalement A n'a qu'une valeur propre, 0, de multiplicité n. Par trigonalisation, on obtient 2).

→ 2) ⇒ 1) : le polynôme caractéristique de A est X^n. Il est annulateur, donc $A^n = 0$ et A est nilpotente.

Exercice 20.18

On a $\Phi_u^2(v) = v \circ u^2$, $\Phi_u^k(v) = v \circ u^k$ et, par linéarité, si P est un polynôme $P(\Phi_u)(v) = v \circ P(u)$.

→ Supposons que u est diagonalisable et soit P un polynôme annulateur scindé à racines simples de u. Alors $P(\Phi_u) = 0$, si bien que Φ_u est diagonalisable.

→ Supposons que Φ_u est diagonalisable et soit P un polynôme annulateur scindé à racines simples de Φ_u. Alors, pour tout $v \in \mathscr{L}(E)$, on a $P(\Phi_u)(v) = 0 = v \circ P(u)$. Notamment avec $v = \mathrm{Id}_E$, on obtient $P(u) = 0$ et finalement u est diagonalisable.

Exercice 20.19

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A.

→ Supposons que $P(A)$ est nilpotente. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P^k(A) = 0$ et ainsi P^k est un multiple de μ_A. Chaque valeur propre de A est racine de P.

→ Réciproquement soit P un polynôme qui admet les λ_i comme racine. Alors P^n est un multiple de χ_A donc $P^n(A) = P(A)^n = 0$.

En conclusion $P(A)$ est nilpotente si et seulement si chaque valeur propre de A est racine de P.

Exercice 20.20

→ On effectue une combinaison linéaire des puissances de A :

$$\sum_{k=0}^{p} \mu_k A^k = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=0}^{p} \mu_i b_i^k \right) B_i.$$

Si on note $Q = \sum_{k=0}^{p} \mu_k X^k$, alors $Q(A) = \sum_{i=1}^{p} Q(b_i) B_i$ (pour tout polynôme Q de degré au plus p). En prenant les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points b_i, il existe L_i tel que $L_i(b_j) = \delta_{ij}$ et $L_i(A) = B_i$.

→ Avec $R = \prod_{i=1}^{p} (X - b_i)$ de degré p, scindé à racines simples, on a $R(A) = 0$. La matrice A est donc diagonalisable.

→ Le polynôme $(X - b_i)L_i$ est annulateur de A car tous les b_k sont racines du polynôme $L_i L_j$ et ainsi $(X - b_i)L_i$ est multiple de R (annulateur) donc $(A - b_i I_n)B_i = 0$ soit $AB_i = b_i B_i$. On montre alors par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \sum_{i=1}^{p} b_i^k B_i$: si la propriété est vraie à un range k, alors

$$A^{k+1} = A.A^k = A \sum_{i=1}^{p} b_i^k B_i = \sum_{i=1}^{p} b_i^k AB_i = \sum_{i=1}^{p} b_i^{k+1} B_i.$$

Exercice 20.21

1. La matrice B est la matrice de la transposition $\tau = \tau_{1,2}$. On note σ le cycle $(12\dots n)$. La question est donc de savoir quel est la groupe engendré par τ et σ. On peut montrer qu'on peut obtenir toutes les transpositions et finalement toutes les permutations. En effet, $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ est la transposition τ_{23}, $\sigma^k \circ \tau \circ \sigma^{-k}$ est la transposition $\tau_{k,k+1}$ si $k < n$ et $\tau_{n,1}$ si $k = n$. On a donc toutes les transpositions $\tau_{i,i+1}$. À partir de ces permutations, on peut créer toutes les transpositions, puis toutes les permutations.
2. $(G, \times)$ est donc isomorphe à $(\mathfrak{S}_n, \circ)$. Pour tout $g \in G$, on a $g^{n!} = I_n$ et $X^{n!} - 1$ est un polynôme annulateur de g. Les racines réelles sont ± 1. Ainsi g sera diagonalisable si et seulement si $X^2 - 1$ est annulateur donc si $g^2 = I_n$ (ce sont des produits de transpositions à support disjoint : un élément a de $\llbracket 1\,;n \rrbracket$ est envoyé sur un autre élément b, qui revient à a avec g (sauf si $b = a$, c'est-à-dire lorsque a est un point fixe).