

## CHAPITRE 21 - FONCTIONS VECTORIELLES

## Exercice 21.1

On note  $C_1(x), \dots, C_n(x)$  les colonnes de  $D_n(x)$ . On remarque que  $C'_i(x) = C_{i+1}(x)$  si  $i \in [1; n-1]$ . On peut alors dériver  $D_n$  et obtenir

$$D'_n(x) = \det(C'_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)) + \dots + \det(C_1(x), \dots, C'_{n-1}(x), C_n(x)) + \det(C_1(x), \dots, C_{n-1}(x), C'_n(x)).$$

Ces déterminants sont tous nuls (deux colonnes identiques) sauf le dernier. En développant par blocs, on a alors  $D'_n(x) = D_{n-1}(x)$ . On constate également que  $D_n(0) = 0$ . Par récurrence simple, on montre alors que  $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ .

## Exercice 21.2

On note  $M = \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\|$ . On a, pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u) du = \int_a^t f'(u) du$ . Cela donne  $\|f(t)\| \leq \int_a^t \|f'(u)\| du \leq M(t-a)$ .

En intégrant entre  $a$  et  $b$ , on obtient

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq M \frac{(b-a)^2}{2}$$

ce qui ne suffit pas. On a cependant

$$\left\| \int_a^{(a+b)/2} f(t) dt \right\| \leq M \frac{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{8}$$

Le même travail avec  $f(t) = f(b) + \int_b^t f'(u) du = -\int_t^b f'(u) du$  permet d'obtenir

$$\left\| \int_{(a+b)/2}^b f(t) dt \right\| \leq M \frac{\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{8}$$

et finalement le résultat en sommant et avec l'inégalité triangulaire.