CHAPITRE 1 - VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 1.1

1. (a) Les 5 épreuves sont indépendantes. Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\frac{4}{5}$). La variable X considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5, \frac{1}{5})$: $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$ et, $\forall k \in [\![0,5]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k}(\frac{1}{5})^k(\frac{4}{5})^{5-k}$. Donc, $\mathbb{E}(X) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$ et $\mathrm{V}(X) = 5 \times \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} = 0,8$.

   (b) D'après les hypothèses, on a $Y = 2X - 3(5 - X)$, c'est-à-dire $Y = 5X - 15$. On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in [\![0,5]\!]\}$, et on a $\forall k \in [\![0,5]\!]$, $\mathbb{P}(Y = 5k - 15) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k}(\frac{1}{5})^k(\frac{4}{5})^{5-k}$. Enfin $Y = 5X - 15$, donc $\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15 = 5 - 15 = -10$ et $\mathrm{V}(Y) = 25\mathrm{V}(X) = 20$.

2. (a) Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. On a $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$. Notons A l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne. Ω est constitué de toutes les parties à 5 éléments de A. Donc $\operatorname{card}\Omega = \binom{10}{5}$. Soit $k \in [\![0,2]\!]$. L'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque le joueur tire k boules blanches et $(5 - k)$ boules noires dans l'urne. Il a donc $\binom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\binom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires :$\forall k \in [\![0,2]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

   (b) On a toujours $Y = 5X - 15$. On a $\forall k \in [\![0,2]\!]$, $\mathbb{P}(Y = 5k - 15) = \mathbb{P}(X = k)$.

Exercice 1.2

On note A_i (B_i) l'évènement « on tire un jeton blanc (noir) au ième tirage ». Puisque au i-ième tirage l'urne contient $n+i$ jetons et $n+i-1$ jetons blancs,

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{n+i-1}{n+i} \quad \mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{n+i}$$

et comme

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap B_k) = \prod_{1 \leq i \leq k-1} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B_k)$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n+2}\cdots\frac{n+k-2}{n+k-1}\frac{1}{n+k} = \frac{n}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}$$

et avec le télescopage, on vérifie que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

La variable aléatoire X n'est pas d'espérance finie puisque la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$ diverge.

Exercice 1.3

1. on développe pour faire apparaître une fonction du second degré : $x^2 - 2\mathbb{E}(X)\,x + \mathbb{E}(X^2)$. Son minimum est obtenu en $\mathbb{E}(X)$ et vaut $\mathrm{V}(X)$.
2. Avec la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}((X-x)^2) \geqslant \mathrm{V}(X)$, c'est-à-dire $\mathrm{V}(X) \leqslant \mathbb{E}((X-x)^2)$. On cherche la bonne valeur de x. On a

$$(a \leqslant X \leqslant b) = \left(\frac{a-b}{2} \leqslant X - \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{b-a}{2}\right) = \left((X-x)^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\right) \text{ avec } x = \frac{a+b}{2}$$

   On a donc presque sûrement, pour $x = \frac{a+b}{2}$, $(X-x)^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$ et ainsi $\mathbb{E}((X-x)^2) \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{(b-a)^2}{4}\right) = \frac{(b-a)^2}{4}$. Cela donne finalement $\mathrm{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 1.4

1.

   (a) On écrit, pour $k \geqslant 1$, l'événement $(L_1 = k)$ à l'aide des tirages :

$$(L_1 = k) = (P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1}) \biguplus (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1})$$

   cela donne, par indépendance des tirages, $\mathbb{P}(L_1 = k) = p^k q + q^k p$.

(b) $G_{L_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(p^k q + q^k p)t^k = \frac{pqt}{1-pt} + \frac{pqt}{1-qt}$. On a plusieurs expressions possibles :

$$G_{L_1}(t) = pqt\frac{2-t}{(1-pt)(1-qt)} = q\frac{pt-1+1}{1-pt} + p\frac{qt-1+1}{1-qt} = -q + \frac{q}{1-pt} - p + \frac{p}{1-qt} = \frac{q}{1-pt} + \frac{p}{1-qt} - 1$$

On dérive : pour tout $t \in]-1,1[$, $G'_{L_1}(t) = \frac{pq}{(1-pt)^2} + \frac{pq}{(1-qt)^2}$. Puisque la limite en 1 existe, on a

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{pq}{(1-p)^2} + \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

(c) On sait décrire les événements $(L_1 = n \text{ et } L_2 = \ell)$:

$$(L_1 = p \text{ et } L_2 = \ell) = \left(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \ldots \cap P_{n+\ell} \cap F_{n+\ell+1}\right) \biguplus \left(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \ldots \cap F_{n+\ell} \cap P_{n+\ell+1}\right)$$

ce qui donne (comme précédemment), $\mathbb{P}(L_1 = n \cap L_2 = \ell) = p^n q^\ell p + q^n p^\ell q = p^{n+1}q^\ell + q^{n+1}p^\ell$. Puisque la famille $((L_1 = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements (enfin pas exactement, il y a l'événement $(L_1 = +\infty)$ de probabilité nulle), on obtient

$$\mathbb{P}(L_2 = \ell) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(L_1 = n \cap L_2 = \ell) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1}q^\ell + q^{n+1}p^\ell = \frac{p^2}{1-p}q^\ell + \frac{q^2}{1-q}p^\ell = p^2q^{\ell-1} + q^2p^{\ell-1}.$$

ce qui ne donne pas la même loi que L_1.

2. c'est assez proche...

(a) $\mathbb{P}(L_1 = n) = p^n + q^n$ (que des piles ou que des faces) et si $k < n$, alors on retrouve l'expression précédente, $\mathbb{P}(L_1 = k) = p^k q + q^k p$.

(b) On dérive $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{-nx^{n-1}(1-x) + 1 - x^n}{(1-x)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$

(c) calcul d'une somme finie :

$$\mathbb{E}(L_1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(L_1 = k) = n(p^n + q^n) + q\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + p\sum_{k=1}^{n-1} kq^k$$

plus qu'à remplacer et simplifier... ce qui donne (enfin j'espère)

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{p}{q}\left(1 + (n-2)p^n\right) + \frac{q}{p}\left(1 + (n-2)q^n\right).$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on retrouve l'espérance de la question 1.

Exercice 1.5

1. On a $\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} = p!\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$. On doit donc montrer que

$$p!\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!} \text{ ou encore que } \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

Cela se montre par exemple par récurrence sur $n \geqslant p$. La relation est immédiate si $n = p$ (on a $1 = 1$). Si elle est vraie à l'indice n, alors

$$\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

2. (a) le tirage étant simultanée, on a $\binom{n}{p}$ tirages possibles.

(b) l'événement $X = k$ est réalisé si on a tiré le jeton numéroté k et $p-1$ jetons parmi les jetons de 1 à $k-1$. Le nombre de tels tirages est $\binom{k-1}{p-1}$. Cela donne (chaque tirage étant équiprobable),

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}} = \frac{(k-1)!}{(p-1)!(k-p)!}\,\frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{(k-1)!(n-p)!p}{(k-p)!n!} = \frac{k!(n-p)!p}{(k-p)!n!k}$$

(c) On a alors, puisque $X(\Omega) = [\![p\,;n]\!]$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=p}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=p}^{n} k\frac{k!(n-p)!p}{(k-p)!n!k} = \frac{(n-p)!p}{n!}\sum_{k=p}^{n}\frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n-p)!p}{n!}\,\frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!} = \frac{p(n+1)}{p+1}$$

3. On peut refaire tous les calculs précédents dans l'autre sens ou simplement « symétriser » la question : on renumérote le jeton k avec un second numéro qui vaut $n+1-k$.
   (a) Avoir $Y=k$ est la même chose qu'avoir $X=n+1-k$. On a donc $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=n+1-k)$.
   (b)
   $$\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=1}^{n+1-p} k\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{n+1-p} k\mathbb{P}(X=n+1-k)=\sum_{i=p}^{n}(n+1-i)\mathbb{P}(X=i)=n+1-\mathbb{E}(X)=(n+1)\left(1-\frac{p}{p+1}\right)=\frac{n+1}{p+1}$$
   On trouve bien que $\mathbb{E}(X)=p\mathbb{E}(Y)$

   remarque : pour $p=1$, on a $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\frac{n+1}{2}$ (valeur moyenne des jetons). Pour $p=n$, on a X qui vaut toujours n et Y qui vaut toujours 1 d'où $\mathbb{E}(X)=n$ et $\mathbb{E}(Y)=1$

Exercice 1.6

1. Avant de commencer, on se trouve dans la situation $A=(0,0)$ et $B=(1,1)$. Après un échange, on a $A=(0,1)$ et $B=(0,1)$. On a donc X_1 qui a pour seule valeur 1 et $\mathbb{P}(X_1=1)=1$.
2. La variable aléatoire peut prendre les valeurs 0, 1 et 2. On utilise le système complet d'événements $X_n=0, X_n=1$ et $X_n=2$. On a
   → $\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=0)\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=1)\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=0)\mathbb{P}(X_n=2)$ si $X_n=0$ alors X_{n+1} ne sera pas nulle, de même si $X_n=2$. On a donc $\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=1)\mathbb{P}(X_n=1)$. Si $X_n=1$ alors on est dans la situation $(0,1)$ pour A et B. On aboutit à la situation $(0,0)$ dans A si on a choisi le jeton 1 dans A et 0 dans B. Ainsi $\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=1)=\frac{1}{4}$.
   Finalement $\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=1)$.
   → Exactement de la même manière, on a $\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=1)$.
   → Enfin $\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=1-\mathbb{P}(X_{n+1}=0)-\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=1-\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1)$.
3. On note $a_n=\mathbb{P}(X_n=1)$. On a la relation de récurrence $a_{n+1}=1-\frac{1}{2}a_n$ avec $a_1=1$. On peut poser $a_0=0$ pour que la relation soit valable à partir du rang 0. On détermine la solution de cette récurrence. Si $\ell=1-\frac{1}{2}\ell$, alors $\ell=\frac{2}{3}$ et $b_n=a_n-\ell$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. On a par conséquent $b_n=\frac{1}{2^n}b_0$ et $a_n=\frac{2}{3}(1-\frac{(-1)^n}{2^n})$. On a alors $\mathbb{P}(X_n=0)=\mathbb{P}(X_n=2)=\frac{1}{4}a_{n-1}$ si $n\geqslant 1$.
4. On peut effectuer le calcul ou utiliser $\mathbb{E}(X_{n+1})=\mathbb{P}(X_n=1)+2\mathbb{P}(X_n=2)=1-\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1)=1$ si $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 1.7

1. En notant $p_i=\mathbb{P}(X=i)=\mathbb{P}(Y=i)$,
   $$\mathbb{P}(U=k)=2\sum_{i=k+1}^{+\infty}\mathbb{P}((X=k)\cap(Y=i))+\mathbb{P}(X=k\cap Y=k)=2\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_kp_i+p_k^2$$
   $$\mathbb{P}(V=k)=2\sum_{i=0}k-1p_kp_i+p_k^2$$
2. Dans le cas où $X\sim\mathcal{G}(p)$,
   $$\mathbb{P}(U=k)=2p^2q^{k-1}\sum_{i=k+1}^{+\infty}q^{i-1}+p^2(q^2)^{k-1}=p(2-p)(q^2)^{k-1}$$
   $$\mathbb{P}\left(V=j\right)=2p^2q^{k-1}\sum_{i=1}k-1q^{i-1}+p^2(q^2)^{k-1}=2pq^{k-1}-p(2-p)(q^2)^{k-1}$$
   On remarque que $\mathbb{P}((U=k))+\mathbb{P}(V=k)=\mathbb{P}(X=k)+\mathbb{P}(Y=k)=2pq^{k-1}$ et que U suit une loi géométrique de paramètre $p_1=(1-q^2)=p(2-p)$ donc
   $$\mathbb{E}(U)=\frac{1}{p_1}=\frac{1}{p(2-p)}$$
   $$\mathbb{E}(V)=2p\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}-\mathbb{E}(U)=\frac{2}{p}-\frac{1}{p(2-p)}=\frac{3-2p}{p(2-p)}$$

Exercice 1.8

Pour $k\geqslant 2$, $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X\leqslant k)-\mathbb{P}(X\leqslant k-1)$. Il est facile de calculer $\mathbb{P}(X\leqslant k)$ en comptant le nombre de tirages de n boules dans $[\![1;k]\!]$ d'où
$$\mathbb{P}(X\leqslant k)=\left(\frac{k}{N}\right)^n$$
D'où la loi de X :
$$\mathbb{P}(X=k)=\left(\frac{k}{N}\right)^n-\left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

Ensuite
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{N}k\frac{k^n}{N^n}-\sum_{k=1}^{N-1}(k+1)\frac{k^n}{N^n}=N-\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$
Donc
$$\frac{\mathbb{E}(X)}{N}=1-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$
et on reconnaît une somme de Riemann,
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(k/n)^n\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$$
d'où
$$\frac{\mathbb{E}(X)}{N}\xrightarrow[N\to+\infty]{}1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Exercice 1.9

1. On note G_i l'événement « le jour i a gagné ». On a
$$V_n=\bigcup_{k=1}^{n}\left(\overline{G_1}\cap\ldots\cap\overline{G_{k-1}}\cap G_k\cap\overline{G_{k+1}}\ldots\cap\overline{G_n}\right).$$
La réunion est disjointe et par symétrie, la probabilité de chacun des événements de la réunion est la même. On a alors
$$\mathbb{P}(V_n)=n\mathbb{P}\left(G_1\cap\overline{G_2}\cap\ldots\cap\overline{G_n}\right)$$
On filtre alors suivant le nombre de points de G_1 :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(G_1\cap\overline{G_2}\cap\ldots\cap\overline{G_n}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left((G_1\cap\overline{G_2}\cap\ldots\cap\overline{G_n})\cap(X_1=k)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left((X_1=k)\cap(X_2\leqslant k-1)\cap\ldots\cap(X_n\leqslant k-1)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}F(k-1)^{n-1}\mathbb{P}(X_1=k)\end{aligned}$$
Cela donne le résultat.

2. On note N le plus grand entier tel que $\mathbb{P}(X_1=N)>0$. On a alors $F(N-1)=1-\mathbb{P}(X_1=N)<1$ et $\mathbb{P}(V_n)=\sum_{k=1}^{N}nF(k-1)^{n-1}\mathbb{P}(X_1=k)$. Pour tout $k\in[\![1;N]\!]$, on a $\lim_{n\to+\infty}nF(k-1)^{n-1}=0$ (croissances comparées avec $0\leqslant F(k-1)\leqslant F(N-1)<1$). Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(V_n)=0$: le nombre de points est borné et le nombre de joueurs grands. Il y a de moins en moins de chance pour qu'il y ait un unique gagnant.

3. On a $\mathbb{P}(X_1=k)=\dfrac{1}{m+1}$ et $F(k-1)=\dfrac{k}{m+1}$. Cela donne
$$\mathbb{P}(V_n)=\sum_{k=1}^{m}n\left(\frac{k}{m+1}\right)^{n-1}\frac{1}{m+1}=\frac{n}{(m+1)^n}\sum_{k=1}^{m}k^{n-1}.$$
Par comparaison série-intégrale (cas croissant), on montre que $\sum_{k=1}^{m}k^{n-1}\underset{m\to+\infty}{\sim}\int_1^m t^{n-1}\,dt\underset{m\to+\infty}{\sim}\dfrac{m^n}{n}\underset{m\to+\infty}{\sim}\dfrac{(m+1)^n}{n}$. On en déduit que $\lim_{m\to+\infty}\mathbb{P}(V_n)=1$ (le nombre de joueur est fixé et le nombre de points possibles devient grand - les joueurs vont avoir de plus en plus tendance à avoir un nombre de points distinct).

Exercice 1.10

On a tout d'abord $X(\Omega)=[\![2;+\infty[\![$. On note A_i l'événement « on a tiré i au premier tirage ». Une fois le premier tirage obtenu, le temps d'attente pour avoir un nouveau numéro suit une loi géométrique de paramètre $p=\frac{n-1}{n}$. Ce temps d'attente est $X-1$. On a donc $\mathbb{P}\left(X-1=k|A_i\right)=pq^{k-1}$. On a ainsi
$$\mathbb{P}(X=k)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X-1=k-1|A_i\right)\mathbb{P}\left(A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n}\frac{1}{n^{k-1}}\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}\frac{1}{n^{k-1}}.$$
En fait la valeur du premier tirage importe peu et on pourrait dire simplement que $X-1$ suit une loi géométrique de paramètre $p=\frac{n-1}{n}$. On en déduit que $\mathbb{E}(X-1)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{n}{n-1}$ donc $\mathbb{E}(X)=1+\dfrac{n}{n-1}=\dfrac{2n-1}{n-1}$ (ce qui semble logique, plus n est grand est plus X a des chances de valoir 2). Enfin $\mathrm{V}(()\,X-1)=\mathrm{V}(()\,X)=\dfrac{q}{p^2}=\dfrac{n}{(n-1)^2}$.

Exercice 1.11

On décrit les tirages correspondant à l'événement $(X = n)$ pour $n \geqslant 2$. On note F_k l'événement : « on obtient face au tirage k », et $P_k = \overline{F_k}$ (on obtient pile). L'événement $(X = n)$ est la réunion des événements $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_i \cap P_{i+1} \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n$ pour i allant de 0 (que des piles et un premier face) à $n-2$ (il faut une pile au tirage $n-1$). Chacun de ces événements élémentaires a une probabilité $\frac{1}{2^n}$ et ainsi $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{n-1}{2^n}$ pour tout $n \geqslant 2$. On détermine l'espérance (termes positifs donc on calcule la somme même si elle est infinie) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$$

On note $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. On a,

$$\forall x \in]-1, 1[, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

et ainsi $f''(1/2) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = 16$. On en déduit $\mathbb{E}(X) = 4$.

Exercice 1.12

1. Quelles que soient les rangs d'obtention des $k-1$ premières vignettes, l'expérience aléatoire pour obtenir une k-ième vignette est la même : c'est le temps du premier succès pour une succession d'épreuve de Bernoulli indépendantes de même paramètre. La variable aléatoire Y_1 est constante égale à 1 (la seule valeur prise par Y_1 est 1 et $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = 1$.
2. Y_k suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{n-k}{n}$ (on a $n-k+1$ vignettes possibles non obtenues sur les n).
3.
   (a) On a $X = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Puisque $Y_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p_k)$ avec $p_k = \frac{n-k+1}{n}$, on a $\mathbb{E}\left(Y_k\right) = \frac{1}{p_k} = \frac{n}{n-k+1}$ (la relation est vraie pour $k = 1$). Ainsi

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1} n \frac{n}{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = nH_n.$$

   (b) on a $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

   (c) Finalement $\mathbb{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$.

Exercice 1.13

1. on regarde les dés séparément - au lieu d'arrêter lorsqu'un dé a donné 6, on continue de le lancer et on remplace l'événement « on obtient un 6 et on s'arrête pour ce dé » par « on a obtenu au moins un 6 lors des n lancers ». Au bout de n lancers d'un dé, soit il n'a jamais eu de 6 - avec une probabilité $q = \left(\frac{5}{6}\right)^n$, soit il y a eu au moins un 6 avec une probabilité $1-q = p$. Le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre N (nombre de dés) et $p = 1-(5/6)^n$ probabilité d'un succès (avoir obtenu au moins un 6)
2. On note $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (S_n = N)$ (cet événement correspond à dire que il existe un moment ou tous les dés auront donné un 6). On peut regarder l'événement complémentaire. On a $\omega \in A$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_k(\omega) = N$ et $\omega \in \overline{A}$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k(\omega) \neq N$, ce qui revient à $S_k(\omega) \leqslant N-1$. On a donc

   $$\overline{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \leqslant N-1)$$

   par continuité décroissante,

   $$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{p} (S_n \leqslant N-1)\right)$$

   et si $S_p \leqslant N-1$ alors, pour tout $n \leqslant p$, $S_n \leqslant N-1$. Cela donne

   $$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(S_p \leqslant N-1\right) = \lim_{p\to+\infty} 1 - \mathbb{P}\left(S_p = N\right)$$

   Or $\mathbb{P}(() S_p = N) = (1-(5/6)^p)^N$ tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$. Finalement $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 0$ et $\mathbb{P}(A) = 1$.
3. $(T_N = k)$ revient à dire qu'on a obtenu 6 avec les N dés au bout d'exactement k lancers - ce n'est pas simple à déterminer directement. Il est plus simple de regarder $(T_N \leqslant k)$ qui revient à dire que chaque dé a donné au moins un 6 lors des k premiers lancers. Pour chaque dé, la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors des k premiers lancers est $1-(5/6)^k$ (contraire de l'événement « aucun 6 »). Ainsi, puisque les dés sont « indépendants »,

   $$\mathbb{P}(T_N \leqslant k) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^N$$

Pour $k \geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(T_N \leqslant k) = \mathbb{P}(T_N = k) + \mathbb{P}(T_N \leqslant k-1)$ (si $k-1=0$, cette dernière proba est nulle et correspond à la valeur précédente pour $k=0$). Cela donne

$$\mathbb{P}(T_N = k) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)^N$$

4. on utilise la relation $\mathbb{E}(T_N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_N \geqslant k)$ avec

$$\mathbb{P}(T_N \geqslant k) = 1 - (1-(5/6)^k)^N = 1 - \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{kj} = \sum_{j=1}^{N} \binom{N}{j} (-1)^{j-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{kj}$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}(T_N) = \sum_{j=1}^{N} \binom{N}{j} (-1)^{j-1} \frac{1}{1-(5/6)^j}$$

Exercice 1.14

1. On peut le montrer par récurrence sur q. Plus directement avec $\binom{k+1}{p+1} = \binom{k}{p+1} + \binom{k}{p}$, on a $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$ si $k \geqslant p$ (la formule est vrai sui $k=p$ car dans ce cas $\binom{p}{p+1} = 0$). On obtient

$$\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{q} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right) = \binom{q+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{q+1}{p+1}$$

2. La variable aléatoire X prend des valeurs entre b et $a+b$. Le tirage revient à ordonner les $a+b$ boules, c'est-à-dire fixer la position des boules blanches parmi les $a+b$ positions possibles. Il y a donc $\binom{a+b}{b}$ tirages. On peut regarder l'événement $(X \leqslant k)$ qui correspond à placer toutes les boules blanches dans les k premiers tirages (pour $k \in [\![b\,;a+b]\!]$. On a alors

$$\forall k \in [\![b\,;a+b]\!], \mathbb{P}(X \leqslant k) = \frac{\binom{k}{b}}{\binom{a+b}{b}}.$$

On a enfin $(X \leqslant k) = (X = k) \uplus (X \leqslant k-1)$, ce qui permet d'écrire

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) = \frac{\binom{k}{b}}{\binom{a+b}{b}} - \frac{\binom{k-1}{b}}{\binom{a+b}{b}} = \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{a+b}{b}}$$

On peut aussi voir l'événement $(X = k)$ comme l'intersection des événements « on a tiré une boule blanche à l'instant k » et « on a tiré $b-1$ boule blanche avant l'instant $k-1$ »

3. On calcule l'espérance

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=b}^{a+b} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\binom{a+b}{b}} \sum_{k=b}^{a+b} k\binom{k-1}{b-1} = \frac{1}{\binom{a+b}{b}} \sum_{k=b}^{a+b} b\binom{k}{b} = \frac{b}{\binom{a+b}{b}} \binom{a+b+1}{b+1} = \frac{b(a+b+1)}{b+1}$$

On calcule ensuite la variance en commençant par $\mathbb{E}(X^2)$...

Exercice 1.15

1. On étudie la fonction polynomiale associée $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. On $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$. La fonction est d'abord croissante jusqu'à $-1/3$ avec $f(-1/3) < 0$, puis décroissante jusqu'en 1 avec $f(1) = -2$, puis croissante vers $+\infty$. On a $f(2) = 1$ donc f admet une seule racine réelle $a \in]1,2[$ et deux racines complexes conjuguées b et $\overline{b}$. On a $f(x) = (x-a)(x-b)(x-\overline{b})$ et $ab\overline{b} = 1$, ce qui donne $|b|^2 = 1/a < 1$.

2. La séquence fait apparaître PPP aux rangs $n+1$, $n+2$, $n+3$ mais sans PPP avant. Elle s'écrit
→ $F---$ où $---$ est une séquence de taille $n+2$ qui se termine pour la première fois par FFF,
→ $PF---$ où $---$ est une séquence de taille $n+1$ qui se termine pour la première fois par FFF,
→ $PPF---$ où $---$ est une séquence de taille n qui se termine pour la première fois par FFF
On en déduit (formule des probabilités totales avec la filtration par les 3 situations disjointes précédentes) :

$$p_{n+3} = \frac{1}{2}p_{n+2} + \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{8}p_n$$

3. On a une suite linéaire récurrence d'ordre 3 à coefficients constants. L'ensemble des solutions est de dimension 3. On cherche des solutions géométrique et $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution si et seulement si $\lambda^3-\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{4}\lambda-\frac{1}{8}=0$. En multipliant par 8, cela revient à $(2\lambda)^3-(2\lambda)^2-(2\lambda)-1=0$, c'est-à-dire que 2λ est racine de f. Les solutions sont donc de la forme
$$\forall n\geqslant 3, p_n=\alpha\left(\frac{a}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{b}{2}\right)^n+\gamma\left(\frac{\overline{b}}{2}\right)^n.$$
Puisque $|a/2|>1/2$ et $|b|<1/2$, on a $p_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\alpha\left(\frac{a}{2}\right)^n$ - si on justifie que $\alpha\neq 0$. Il « suffit » de déterminer les constantes à partir des premiers termes de la suite (attention, ça ne commence qu'à $n=3$ pour la relation de récurrence. On a $p_3=1/8$ (FFF), $p_4=1/16$ ($PFFF$), $p_5=1/16$ ($PPFFF$, $FPFFF$) ; on peut aussi déterminer p_2, p_1 et p_0 pour que la relation soit valable à partir de $n=0$ - c'est plus facile pour trouver α. On a
$$p_5=\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{4}p_3+\frac{1}{8}p_2\iff\frac{1}{16}=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{8}p_2$$
et on continue ainsi (mais ce n'est pas passionnant s'il faut vraiment aller jusqu'au bout).

Exercice 1.16

1. La variable X suit une loi binômiale de paramètres (n,p). C'est-à-dire $X(\Omega)=[\![0;n]\!]$ et $\forall k\in[\![0;n]\!]\ \mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
2. (a) Soit $i\in[\![0;n]\!]$. Sous la condition $(X=i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et
$$\mathbb{P}(Y=k|X=i)=\begin{cases}\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k} \text{ si } k\in[\![0;n-i]\!]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}.$$
   (b) $Z(\Omega)=[\![0;n]\!]$ et
$$\forall k\in[\![0;n]\!], \mathbb{P}(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i\cap Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(Y=k-i|X=i)\mathbb{P}(X=i).$$
   Soit $k\in[\![0;n]\!]$. D'après les questions précédentes,
$$\mathbb{P}(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}p^k(1-p)^{2n-k-i}.$$
$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!}\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{n!}{(k-i)!(n-k)!i!}=\frac{k!}{(k-i)!i!}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$
   Ainsi $\mathbb{P}(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k-i}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$. D'après le binôme de Newton,
$$\mathbb{P}(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k=\binom{n}{k}\big(p(2-p)\big)^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}.$$
   On vérifie que $1-p(2-p)=(1-p)^2$ et donc on peut conclure que Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$.

   (c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$, alors $\mathbb{E}(Z)=np(2-p)$ et $\mathrm{V}(Z)=np(2-p)\big(1-p(2-p)\big)=np(2-p)(p-1)^2$.

Exercice 1.17

1. Par récurrence simple, on a $\mathbb{P}(X=n)=\frac{p^n}{n!}\mathbb{P}(X=0)$. Pour que X soit une variable aléatoire on doit avoir $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=1$, ce qui donne $\mathbb{P}(X=0)e^p=1$. Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n)=\frac{p^n}{n!}e^{-p}$ (X suit une loi de Poisson de paramètre p).
2. (a) On note $Y=\frac{1}{1+X_1}$. Puisque $0\leqslant Y\leqslant 1$, Y est d'espérance finie et
$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X_1=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+k}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}=e^{-\lambda_1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^k}{(k+1)!}=e^{-\lambda_1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda_1^{k-1}}{k!}=\frac{e^{-\lambda_1}}{\lambda_1}\left(e^{\lambda_1}-1\right)=\frac{1-e^{-\lambda_1}}{\lambda_1}$$
   (b) X_1+X_2 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$ (voir cours)

   (c) On calcule :
$$\mathbb{P}_{X_1+X_2=n}(X_1=k)=\frac{\mathbb{P}(X_1=k,X_1+X_2=n)}{\mathbb{P}(X_1+X_2=n)}=\frac{\mathbb{P}(X_1=k,X_2=n-k)}{\mathbb{P}(X_1+X_2=n)}=\frac{\mathbb{P}(X_1=k)\mathbb{P}(X_2=n-k)}{\mathbb{P}(X_1+X_2=n)}$$

Cette probabilité est nulle si $k > n$. Lorsque $k \in [\![0;n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_1+X_2=n}(X_1 = k) = \frac{e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!}\frac{n!}{(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} = \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}$$

remarque : la somme de ces probas donne $\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} = 1$

3. On a $\mathbb{E}(U) = \mathrm{V}(U) = \lambda_1+\lambda_2$, $\mathbb{E}(V) = \mathrm{V}(V) = \lambda_2+\lambda_3$. Par bilinéarité de la covariance et puisque les variables sont indépendantes,

$$\mathrm{Cov}(X+Y, Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Z) = \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{V}(Y) = \lambda_2$$

Ainsi

$$\rho(U,V) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}\sqrt{\lambda_2+\lambda_3}} \in [0,1]$$

Exercice 1.19

1. La loi conditionnelle de X sachant $N = k$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On a alors, pour $i \leqslant k$:

$$\mathbb{P}(X = i \cap N = k) = \mathbb{P}(X = i | N = k)\mathbb{P}(N = k) = \binom{k}{i}p^i q^{k-i} \times \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

On en déduit la loi de X :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = i) &= \sum_{k=i}^{+\infty}\binom{k}{i}p^i q^{k-i} \times \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = p^i e^{-\lambda}\sum_{k=i}^{+\infty} q^{k-i} \times \frac{\lambda^k}{(k-i)!} \\
&= \frac{(p\lambda)^i}{i!}e^{-\lambda}\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{(q\lambda)^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{(p\lambda)^i}{i!}e^{-\lambda}e^{\lambda q} \\
&= \frac{(p\lambda)^i}{i!}e^{-p\lambda}
\end{aligned}$$

Ainsi X suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. On a $\mathbb{E}(X) = \mathrm{V}(X) = p\lambda$.

2. De la même manière, on montre que Y suit une loi de Poisson de paramètre $q\lambda$. On détermine alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X = i \cap Y = j\right) &= \mathbb{P}\left(X = i \cap X + Y = i + j\right) = \mathbb{P}\left(X = i \cap N = i + j\right) \\
&= \binom{i+j}{i}p^i q^j \times \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{p^i q^j}{i!j!}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}e^{-(p+q)\lambda} \\
&= \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}\left(Y = j\right)
\end{aligned}$$

Les variables aléatoires sont indépendantes.

3. On a $\mathrm{Cov}(X,N) = \mathrm{Cov}(X, X+Y) = \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{V}(X)$ puisque X et Y sont indépendantes. On a donc $\mathrm{Cov}(X,N) = p\lambda$. On a $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{p\lambda}$ et $\sigma_N = \sqrt{\lambda}$. Finalement $\rho_{X,N} = \dfrac{p\lambda}{\sqrt{p\lambda}} = \sqrt{p}$.

Exercice 1.21

1. X_k est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli. On a $\mathbb{P}\left(X_k = 1\right) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi $\mathbb{E}\left(X_k\right) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathrm{V}\left(X_k\right) = \dfrac{n-1}{n^2}$.
2. si $i = j$ alors $\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \mathrm{V}(X_i)$. Sinon X_iX_j prend uniquement les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de Bernoulli avec $\mathbb{P}\left(X_iX_j = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_i = 1, X_j = 1\right)$. Le nombre de permutation qui ont i et j comme point fixe est $(n-2)!$, donc $\mathbb{P}\left(X_iX_j = 1\right) = \dfrac{1}{n(n-1)}$. On a alors

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}\left(X_iX_j\right) - \mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_j\right) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

3. $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$
4. On a directement $\mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_k\right) = 1$. On a ensuite (avec $X_k^2 = X_k$)

$$\mathrm{V}(N) = \mathrm{Cov}(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_k^2\right) + \sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 1 + n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n+1}{n}$$

Exercice 1.22

1. On écrit formellement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k|N=n)\mathbb{P}(N=n)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y=k|N=n)\right)\mathbb{P}(N=n)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X_1+\ldots+X_n=k)\right)\mathbb{P}(N=n)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(X_1+\ldots+X_n)\mathbb{P}(N=n)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{E}(X)\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(N)
\end{aligned}$$

la convergence étant assurée en partant de la fin (tous les termes sont positifs alors il suffit de pouvoir calculer la somme double d'une certaine façon).

2. Avec les mêmes calculs, on a $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}\left((X_1+\ldots+X_n)^2\right)\mathbb{P}(N=n)$. Pour Z une variable aléatoire réelle, on a $\mathrm{V}(2) = \mathbb{E}\left(Z^2\right) - \mathbb{E}(Z)^2$, ainsi

$$\mathbb{E}\left((X_1+\ldots+X_n)^2\right) = \mathrm{V}(X_1+\ldots+X_n) + \mathbb{E}(X_1+\ldots+X_n)^2.$$

Puisque les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, on a $\mathrm{V}(X_1+\ldots+X_n) = n\mathrm{V}(X)$ et $\mathbb{E}\left((X_1+\ldots+X_n)^2\right) = n\mathrm{V}(X)+n^2\mathbb{E}(X)^2$. Cela donne

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(n\mathrm{V}(X)+n^2\mathbb{E}(X)^2\right)\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}(N)\mathrm{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}\left(N^2\right).$$

3. On simplifie

$$\mathrm{V}(Y) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(N)\mathrm{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}\left(N^2\right) - \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(N)^2 = \mathbb{E}(N)\mathrm{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2\mathrm{V}(N).$$

4. On utilise le résultat précédent avec N suivant la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$ (donc $\mathbb{E}(N) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathrm{V}(N) = \frac{n^2-1}{12}$) et tous les X_i suivant une loi de Bernoulli de paramètre p (avec $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathrm{V}(X) = p(1-p)$). La variable aléatoire Y correspond au nombre de piles obtenus. On a

$$\mathbb{E}(Y) = p\frac{n+1}{2} \text{ et } \mathrm{V}(Y) = p(1-p)\frac{n+1}{2} + p^2\frac{n^2-1}{12} = p\frac{n+1}{12}(6+p(n-7)).$$

Exercice 1.23

1. Soit $(x_1,\ldots,x_{n-1},F)$ un mot ne contenant pas deux piles consécutifs, le mot $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ ne contient pas deux piles consécutifs et se terminer par P ou F, d'où $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. De même si $m = (x_1,\ldots,x_{n-1},P)$, $x_{n-1} = F$ d'où $b_n = a_{n-1}$. On en déduit que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ et comme $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, en posant $a_0 = a_1 = 1$, on reconnaît la suite de fibonacci. L'événement $X = 0$ correspond à un mot $(x_1,\ldots,x_{n-2},P,P)$ où $(x_1,\ldots,x_{n-2},P)$ ne contient pas deux Pile. Cela donne

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{b_{n-1}}{2^n} = \frac{a_{n-2}}{2^n}$$

2.

$$F_n = A\phi^n + B\phi_2^n$$

où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ d'où $F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A\phi^n$ et $R = 1/\phi$.

$$f(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n = 1 + x + x(f(x)-1) + x^2 f(x)$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

et donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{F_{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}F_n(1/2)^n = \frac{1}{4}f(1/2) = 1$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{F_{n-2}}{2^n} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)\frac{F_n}{2^{n-1}}$$

Mais

$$f'(x) = \frac{2x+1}{(1-x-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nF_n x^{n-1}$$

d'où $\mathbb{E}(X) = 6$.

Exercice 1.24

1. La série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n)$ doit converger donc $|a/(a+1)|<1$ et comme une probabilité est positive, $a\geqslant 0$. De plus,

$$1=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=k(a+1)$$

d'où $a>0$ et $k=\frac{1}{a+1}$.

$$G_X(t)=k\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{at}{a+1}\right)^n=\frac{1}{a+1-at}$$

2. Comme les variables sont indépendantes,

$$G_S(t)=G_X(t)^n=\frac{1}{(a+1-at)^n}$$

et on calcule

$$S'_G(t)=\frac{na}{(a+1-at)^{n+1}}$$

$$S''_G(t)=\frac{n(n+1)a^2}{(a+1-at)^{n+2}}$$

$$\mathbb{E}(S)=G'_S(1)=an\quad \mathrm{V}(S)=G''_S(1)+G'_S(1)-G'_S(1)^2=na(a+1)$$

3. En posant $Y=X+1$, $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et

$$\mathbb{P}(Y=n)=\mathbb{P}(X=n-1)=\frac{1}{a+1}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1}=q^{n-1}p$$

avec $p=\frac{1}{a+1}$. La variable Y suit donc une loi géométrique $Y\hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ d'où

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)-1=a$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=\frac{q}{p^2}=a(a+1)$$

Ensuite, par linéarité de la variance et comme les variables sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(S)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_k\right)=na$$

$$\mathrm{V}(S)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}\left(X_k\right)=na(a+1)$$

Exercice 1.25

1. on note $f_n(t)=e^{itx_n}\mathbb{P}(X=x_n)$. Chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $|f_n(t)|=\mathbb{P}(X=x_n)$. Puisque $\sum\mathbb{P}(X=x_n)$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et ϕ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On a, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\phi_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{int}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{it})^n}{n!}=e^{-\lambda}\exp(\lambda e^{it})=\exp(\lambda(e^{it}-1))$$

3. puisque X admet un moment d'ordre 2, elle admet aussi un moment d'ordre 1 et les deux familles $(x_n\mathbb{P}(X=x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n^2\mathbb{P}(X=x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}$,

$$f'_n(t)=ix_nf_n(t),\, f''_n(t)=-x_n^2f_n(t) \text{ et } |f'_n(t)|=|x_n|\mathbb{P}(X=x_n),\, |f''_n(t)|=|x_n^2|\mathbb{P}(X=x_n).$$

Les séries de fonctions $\sum f'_n$ et $\sum f''_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et ϕ_X est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\phi'_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}ix_ne^{itx_n}\mathbb{P}(X=x_n) \text{ et } \phi''_X(t)=-\sum_{n=0}^{+\infty}x_n^2e^{itx_n}\mathbb{P}(X=x_n)$$

Notamment $\phi'_X(0)=i\mathbb{E}(X)$ et $\phi''_X(0)=-\mathbb{E}\left(X^2\right)$. Cela permet de retrouver $\mathbb{E}(X)=-i\phi'_X(0)$ et $\mathrm{V}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)^2=-\phi''_X(0)+(\phi'_X(0))^2$.

Exercice 1.26

1. Soit $a\in\,]0,+\infty[$. Pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$P\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant a)\leqslant\frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}.$$

2. On pose $X=\frac{S_n}{n}$. Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y_1)$. De plus, comme

les variables sont mutuellement indépendantes, on a $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(S_n)=\frac{1}{n}\mathrm{V}(Y_1)$. En appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.

3. Pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon. Elle suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p=\frac{2}{5}=0,4$. Les variables Y_i suivent la même loi, sont mutuellement indépendantes et admettent des moments d'ordre 2. On a, $\forall i\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y_i)=0,4$ et $\mathrm{V}(Y_i)=0,4(1-0,4)=0,24$. On pose $S_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages. Alors $T_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages. On cherche à partir de combien de tirages on a $\mathbb{P}(0,35\leqslant T_n\leqslant 0,45)>0,95$. Or

$$\mathbb{P}(0,35\leqslant T_n\leqslant 0,45)=\mathbb{P}\left(0,35\leqslant\frac{S_n}{n}\leqslant 0,45\right)=\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}(Y_1)\right|\leqslant 0,05\right).$$

D'après la question précédente, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}(Y_1)\right|\geqslant 0,05\right)\leqslant\frac{0,24}{n(0,05)^2}$ et $\mathbb{P}(0,35\leqslant T_n\leqslant 0,45)\geqslant 1-\frac{0,24}{n(0,05)^2}$. Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1-\frac{0,24}{n(0,05)^2}\geqslant 0,95$. La résolution de cette inéquation donne $n\geqslant\frac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n\geqslant 1920$.

Exercice 1.27

1. soit $t>0$ et $Y=\exp(tX)$. La variable aléatoire Y est bornée donc d'espérance finie et positive. On peut appliquer l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}\left(Y\geqslant e^{td}\right)\leqslant\frac{\mathbb{E}(Y)}{e^{td}}$. Or, la fonction $x\mapsto\exp(tx)$ est croissante puisque $t>0$. On a donc $(X\geqslant d)=(\exp(tX)\geqslant\exp(td))$ et ainsi $\mathbb{P}\left(Y\geqslant e^{td}\right)=\mathbb{P}(X\geqslant d)$. Tout cela donne,

$$\forall t>0, \mathbb{P}(X\geqslant d)\leqslant\frac{\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)}{e^{td}}$$

et donc

$$\mathbb{P}(X\geqslant d)\leqslant\inf_{t>0}\frac{\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)}{e^{td}}.$$

2. On a (en posant $q=1-p$) :

$$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)=\sum_{k=0}^{n}e^{kt}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=(pe^t+q)^n \text{ et } \frac{\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)}{e^{\alpha nt}}=\left(\frac{pe^t+q}{e^{\alpha t}}\right)^n=\left(pe^{(1-\alpha)t}+qe^{-\alpha t}\right)^n$$

Puisque $pe^{(1-\alpha)t}+qe^{-\alpha t}\geqslant 0$ et que $u\mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, la borne inférieure est β^n où $\beta=\inf_{t>0}\left(pe^{(1-\alpha)t}+qe^{-\alpha t}\right)$. On étudie donc $f:t\mapsto pe^{(1-\alpha)t}+qe^{-\alpha t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$f'(t)=(1-\alpha)pe^{(1-\alpha)t}-\alpha(1-p)e^{-\alpha t}=e^{-\alpha t}\left((1-\alpha)pe^t-\alpha(1-p)\right)$$

→ si $\alpha>1$, alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa limite en $+\infty$ est nulle donc $\mathbb{P}(X_n\geqslant\alpha n)=0$ (c'est assez normal, on n'avait pas besoin de tout ça pour le dire)
→ si $\alpha=1$, alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa limite en $+\infty$ est p donc $\mathbb{P}(X_n\geqslant n)\leqslant p^n$ (on a $\mathbb{P}(X_n\geqslant n)=\mathbb{P}(X_n=n)=p^n$)
→ si $\alpha\in]0,1[$: $f'(t)\geqslant 0$ si et seulement si $e^t\geqslant\frac{\alpha(1-p)}{(1-\alpha)p}$. Il reste à savoir si cette valeur est supérieure à 1 (pour savoir si $t>0$). On a

$$\frac{\alpha(1-p)}{(1-\alpha)p}\geqslant 1\Leftrightarrow\alpha(1-p)\geqslant(1-\alpha)p\Leftrightarrow\alpha\geqslant p$$

→ si $\alpha\in]0,p]$, le minimum est en 0, ce qui donne $\mathbb{P}(X_n\geqslant\alpha n)\leqslant 1$
→ si $\alpha\in]p,1[$, alors on obtient le cas intéressant, $\mathbb{P}(X_n\geqslant\alpha n)\leqslant f(t_0)^n$ où $e^{t_0}=\frac{\alpha(1-p)}{(1-\alpha)p}$. Après simplification, on trouve

$$\mathbb{P}(X_n\geqslant\alpha n)\leqslant\left(\frac{1-p}{1-\alpha}\left(\frac{p(1-\alpha)}{(1-p)\alpha}\right)^{\alpha}\right)^n$$

remarque : on peut faire le lien avec la loi faible des grands nombres. Si $\alpha>p$, on peut écrire $\alpha=p+\varepsilon$ avec $\varepsilon>0$, on a

$$\mathbb{P}(S_n\geqslant n\alpha)=\mathbb{P}\left((S_n-np)\geqslant n\varepsilon\right)\leqslant\mathbb{P}\left(|S_n-np|\geqslant n\varepsilon\right)=\mathbb{P}\left(|\frac{S_n}{n}-p|\geqslant\varepsilon\right)$$

avec l'inégalité de Markov, on a obtenu une majoration en $\frac{1}{n^2}$. Ici on a amélioré en une majoration géométrique (S_n/n se concentre rapidement autour de l'espérance).

Exercice 1.28

1. On a $\mathbb{P}(Y \geqslant k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = j)$. On calcule alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{E}(Y)$$

le calcul étant licite puisque la somme double finale existe (termes tous positifs ou nuls et théorème de sommation par paquets).

2. On réécrit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X < k) = \sum_{k=1}^{n} 1 - \mathbb{P}(X \geqslant k) = n - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$.

   (a) puisque $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$ admet une limite finie $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, puis $S_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbb{E}(X)$ (qui est non nulle).

   (b) On a alors $S_n - n + \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k)$. On doit majorer le reste d'une série convergente. D'après l'inégalité de Markov, on a $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \mathbb{P}\left(X^2 \geqslant k^2\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{k^2}$. Cela donne

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

   Pour majorer ce reste, on peut utiliser une comparaison série-intégrale ou plus simplement l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, ce qui permet de majorer le reste par $\frac{1}{n}$. Finalement

$$0 \leqslant S_n - n + \mathbb{E}(X) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{n}.$$

   On a bien $S_n = n - \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 1.31

1. la fonction γ est continue, paire, négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. On note $U_n = S_n^p$. Si $x \in U_n(\Omega)$ alors on vérifie que $\mathbb{P}(U_n = x) = \mathbb{P}(U_n = -x) = \mathbb{P}(-U_n = x)$. On aura alors U_n et $-U_n$ qui suivent la même loi donc ont même espérance ce qui donnera $\mathbb{E}(U_n) = -\mathbb{E}(U_n)$ donc $\mathbb{E}(U_n) = 0$ (ce qui revient dans le calcul de l'espérance à regrouper les termes opposés $x\mathbb{P}(U_n = x)$ et $-x\mathbb{P}(U_n = -x) = -x\mathbb{P}(U_n = x)$) et obtenir une somme nulle. Puisque p est impair, cela revient à montrer que $\mathbb{P}(S_n = y) = \mathbb{P}(S_n = -y) = \mathbb{P}(-S_n = y)$, c'est-à-dire que S_n et $-S_n$ ont même loi. Les vecteurs aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$ et $(-X_1,\dots,-X_n)$ ont même loi puisque pour $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in [-1,1]^n$, $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1,\dots,X_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(-X_1 = \varepsilon_1,\dots,-X_n = \varepsilon_n)$. Avec $f(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} x_k$, on a $f(X_1,\dots,X_n) = S_n$ de même loi que $f(-X_1,\dots,-X_n) = -S_n$.

   Finalement on a bien $\mathbb{E}\left(S_n^p\right) = 0$ si p est impair. Puisque $t \mapsto t^p\gamma(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et impaire, on a également $\int_{\mathbb{R}} t^p\gamma(t) = 0$.

3. il suffit de le prouver lorsque $Q = X^{2k}$ (puis utiliser la linéarité et la question précédente).
   - → on note $I_k = \int_{\mathbb{R}} t^{2k}\gamma(t)\mathrm{d}t$. On a $I_k = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\gamma(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2k+1}\int_{\mathbb{R}} t^{2k+2}\gamma(t)\mathrm{d}t$ donc $I_{k+1} = (2k+1)I_k$ avec $I_0 = 1$. Cela donne $I_k = (2k-1)\dots 3.1 = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.
   - → on regarde le cas $Q = X^2$: on a $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} X_iX_j$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathbb{E}\left(X_iX_j\right)$. Lorsque $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes donc $\mathbb{E}\left(X_iX_j\right) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}\left(X_j\right) = 0$. De plus $\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = \mathbb{E}(1) = 1$. Finalement $\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{1}{n}.n = 1$ et $I_1 = 1$.
   - → cas $Q = X^4$. On a $I_2 = 3$. On a besoin de déterminer $\mathbb{E}(S_n^4)$. On note $T_n = \sqrt{n}S_n = X_1 + \dots X_n$. On a $\mathbb{E}(S_n^4) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(T_n^4\right)$. On détermine cette espérance par récurrence sur n. On a $T_{n+1} = T_n + X_{n+1}$ avec T_n et X_{n+1} indépendantes. Cela donne

$$T_{n+1}^4 = T_n^4 + 4X_{n+1}T_n^3 + 6X_{n+1}^2T_n^2 + 4X_{n+1}^3T_n + X_{n+1}^4$$

   on a $\mathbb{E}\left(X_{n+1}T_n^3\right) = \mathbb{E}(X_{n+1})\mathbb{E}\left(T_n^3\right) = 0$ et de même $\mathbb{E}\left(X_{n+1}^3T_n\right) = 0$. On a également $X_{n+1}^2 = 1$. Il reste

$$\mathbb{E}\left(T_{n+1}^4\right) = \mathbb{E}\left(T_n^4\right) + 6\mathbb{E}\left(T_n^2\right) + 1 = \mathbb{E}\left(T_n^4\right) + 6n + 1$$

avec $\mathbb{E}\left(T_1^4\right)=1$, par télescopage,

$$\mathbb{E}\left(T_n^4\right)-1=\sum_{k=1}^{n-1}(6k+1)=3(n-1)n+n-1=3n^3-2n+1$$

Finalement $\mathbb{E}\left(T_n^4\right)=3n^2-2n$ et $\mathbb{E}\left(S_n^4\right)=3-\frac{2}{n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(S_n^4\right)=3=\int_{\mathbb{R}}t^4\gamma(t)\mathrm{d}t$.

→ cas général avec $Q=X^{2k}$: on peut essayer de généraliser le calcul précédent ou développer $(X_1+\ldots+X_n)^{2k}$, regrouper les termes, se dire que l'espérance d'un terme $X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}$ est nulle dès que l'un des exposants est impair et simplifier les X_i^2 en 1... il faut compter combien de termes restent

Exercice 1.32

1. On a $(|S_n|>\alpha)=\left(S_n^2\geqslant\alpha^2\right)$. L'inégalité de Markov peut s'appliquer à S_n^2 qui est positive (et d'espérance finie). Cela donne $\mathbb{P}(|S_n|>\alpha)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}\left(S_n^2\right)}{\alpha^2}$. Il reste à calculer $\mathbb{E}\left(S_n^2\right)$. On a

$$\mathbb{E}\left(S_n^2\right)=\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathbb{E}\left(X_iX_j\right)$$

On a $\mathbb{E}\left(X_iX_j\right)=\mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_j\right)=0$ (indépendance et variables aléatoires centrées). On a donc $\mathbb{E}\left(S_n^2\right)=\sum\limits_{i=1}^n\mathbb{E}\left(X_i^2\right)\leqslant\sigma^2$. Finalement

$$\mathbb{P}(|S_n|>\alpha)\leqslant\frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

2. (a) les événements $A_1,\ldots,A_n$ sont deux à deux disjoints : si $i>j$ et $\omega\in A_i\cap A_j$ alors on a $\omega\in A_i$ donc $|S_i|>\alpha$ et $|S_j|\leqslant\alpha$ et on a $\omega\in A_j$ donc $|S_j|>\alpha$. Une seule des variables aléatoires T_i peut prendre la valeur 1. On a donc $\sum\limits_{i=1}^n T_i$ qui ne prend que les valeurs 0 et 1 et elle vaut 1 en ω lorsqu'il existe $i\in[\![1;n]\!]$ telle $T_i(\omega)=1$. La somme est donc la fonction indicatrice de l'union disjointe $A=\biguplus\limits_{i=1}^n A_i$. On vérifie que A est bien l'événement : $B=\left(\text{il existe }k\in[\![1;n]\!],|S_k|>\alpha\right)$. Chaque A_i est inclus dans B donc $A\subset B$. Réciproquement, si $\omega\in B$, en prenant le plus petit entier $k\in[\![1;n]\!]$ tel que $|S_k(\omega)|>\alpha$, on a $\omega\in A_k$ donc $B\subset A$.

   (b) Si on note $T=\sum\limits_{i=1}^n T_i$, on a

$$\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left(T_iS_n^2\right)=\mathbb{E}\left(TS_n^2\right)\leqslant\mathbb{E}\left(S_n^2\right)\leqslant\sigma^2,$$

   puisque $T\leqslant 1$ et $S_n^2\geqslant 0$ donc $TS_n^2\leqslant S_n^2$ (la majoration de $\mathbb{E}\left(S_n^2\right)$ est faite en première question).

   (c) On regarde $T_k(S_n^2-S_k^2)$. On a

$$S_n^2-S_k^2=2(X_{k+1}+\ldots+X_n)S_k+\left(X_{k+1}+\ldots+X_n\right)^2\text{ et }T_k(S_n^2-S_k^2)=2S_kT_k(X_{k+1}+\ldots+X_n)+T_k\left(X_{k+1}+\ldots+X_n\right)^2$$

   Ainsi $\mathbb{E}\left(T_kS_n^2\right)-\mathbb{E}\left(T_kS_k^2\right)=2\mathbb{E}\left(S_kT_k(X_{k+1}+\ldots+X_n)\right)+\mathbb{E}\left(T_k\left(X_{k+1}+\ldots+X_n\right)^2\right)$. Les variables aléatoires S_k et T_k ne dépendent que de $X_1,\ldots,X_k$ et donc sont indépendantes de $X_{k+1},\ldots,X_n$ (en vrai c'est pénible à rédiger). On a donc $\mathbb{E}\left(S_kT_k(X_{k+1}+\ldots+X_n)\right)=\mathbb{E}\left(S_kT_k\right)\mathbb{E}\left(X_{k+1}+\ldots+X_n\right)=0$. Finalement $\mathbb{E}\left(T_kS_n^2\right)-\mathbb{E}\left(T_kS_k^2\right)\geqslant 0$.

3. on remarque tout d'abord que $\mathbb{P}(B)=\mathbb{E}(T)$. On essaie d'enchaîner les différentes inégalités obtenues : en sommant les inégalités précédentes, on obtient

$$\sum_{k=1}^n\mathbb{E}\left(T_kS_k^2\right)\leqslant\sum_{k=1}^n\mathbb{E}\left(T_kS_n^2\right)\leqslant\sigma^2$$

De plus $T_kS_k^2\geqslant\alpha^2T_k$: si $T_k(\omega)=0$, c'est immédiat et si $T_k(\omega)=1$ alors $\omega\in A_k$ donc $|S_k(\omega)|>\alpha$ et $S_k^2(\omega)>\alpha^2$. On a donc

$$\sum_{k=1}^n\mathbb{E}\left(T_k\alpha^2\right)\leqslant\sum_{k=1}^n\mathbb{E}\left(T_kS_k^2\right)\leqslant\sigma^2$$

donc $\alpha^2\mathbb{E}(T)\leqslant\sigma^2$ et $\mathbb{P}(B)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$. Si on note B_n l'événement $\left(\exists k\in[\![1;n]\!],|S_k|>\alpha\right)$ alors la suite est une suite croissante d'événement. La réunion des B_n est l'événement $\left(\sup\limits_{n\geqslant 1}|S_n|>\alpha\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(B_n)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$.

Exercice 1.33

on commence par remplacer chaque X_i par $X_i - m = X_i - \mathbb{E}(X_i)$. Les variables deviennent centrées, on a $V_2 = \mathbb{E}\left(X_i^2\right)$ et $V_4 = \mathbb{E}\left(X_i^4\right)$ pour tout entier i. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$

1. on a $A_n^\varepsilon = \left(\left|\frac{1}{n}S_n\right| \geqslant \varepsilon\right) = \left(S_n^4 \geqslant (n\varepsilon)^4\right)$ et ainsi, par l'inégalité de Markov (S_n^4 est positive et d'espérance finie), on a $\mathbb{P}\left(A_n^\varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\left(S_n^4\right)}{n^4\varepsilon^4}$. Il reste donc à calculer l'espérance de S_n^4, ce qu'on fait par récurrence sur n :
$$S_{n+1}^4 = S_n^4 + 4X_{n+1}S_n^3 + 6X_{n+1}^2S_n^2 + 4X_{n+1}^3S_n + X_{n+1}^4$$
Puisque X_{n+1} et S_n sont indépendantes et que X_{n+1} est centrée, on obtient
$$\mathbb{E}\left(S_{n+1}^4\right) = \mathbb{E}\left(S_n^4\right) + 6\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right)\mathbb{E}\left(S_n^2\right) + \mathbb{E}\left(X_{n+1}\right)^4$$
On a $\mathbb{E}\left(S_n^2\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathbb{E}\left(X_iX_j\right)$ et $\mathbb{E}\left(X_iX_j\right) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}\left(X_j\right) = 0$ si $i \neq j$. Il vient donc $\mathbb{E}\left(S_n^2\right) = nV_2$ et
$$\mathbb{E}\left(S_{n+1}^4\right) = \mathbb{E}\left(S_n^4\right) + 6nV_2^2 + V_4$$
On a $\mathbb{E}\left(S_1^4\right) = V_4$. Par télescopage,
$$\mathbb{E}\left(S_n^4\right) - V_4 = \sum_{k=1}^{n-1}(6kV_2^2 + V_4) = 3n(n-1)V_2^2 + (n-1)V_4$$
et finalement $\mathbb{E}\left(S_n^4\right) = 3n(n-1)V_2^2 + nV_4$. Tout cela donne
$$\mathbb{P}\left(A_n^\varepsilon\right) \leqslant \frac{3(n-1)V_2^2 + V_4}{n^3\varepsilon^4}$$

2. On a une majoration par un terme équivalent à C/n^2. La série converge.

3. On note $B_p^\varepsilon = \bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\varepsilon$. C'est une suite décroissante d'événement donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} B_p^\varepsilon\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_p^\varepsilon\right)$. Or
$$\mathbb{P}\left(B_p^\varepsilon\right) \leqslant \sum_{n=p}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n^\varepsilon\right)$$
en tant que reste d'une série convergente, $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n^\epsilon\right) = 0$ et finalement $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty}\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\epsilon\right) = 0$.

Exercice 1.34

1. Si $k \in \mathbb{N}^*$
$$\mathbf{P}(L_1 \geqslant k) = \mathbf{P}\left(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1\right) + P\left(X_1 = 0, \ldots, X_k = 0\right) = p^k + (1-p)^k$$
Par continuité décroissante, $\mathbf{P}(L_1 \geqslant k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(L_1 = +\infty)$, donc $\mathbf{P}(L_1 = +\infty) = 0$. Si $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbf{P}(L_1 = k) = \mathbf{P}(L_1 \geqslant k) - \mathbf{P}(L_1 \geqslant k+1) = (1-p)p^k + p(1-p)^k$$
On en déduit
$$\mathbf{E}(L_1) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(p(1-p)kp^{k-1} + p(1-p)k(1-p)^{k-1}\right) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$$
On a
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(L_1(L_1-1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\left(p^2(1-p)k(k-1)p^{k-2} + p(1-p)^2k(k-1)(1-p)^{k-2}\right)\\ &= \frac{2p^2(1-p)}{(1-p)^3} + \frac{2p(1-p)^2}{p^3} = \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{2(1-p)^2}{p^2}\end{aligned}$$
donc
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(L_1) &= \mathbf{E}(L_1(L_1-1)) + \mathbf{E}(L_1) - \mathbf{E}(L_1)^2\\ &= \frac{p^2}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - 2\end{aligned}$$

2. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(L_2 \geqslant \ell) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(L_2 \geqslant \ell, L_1 = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathbf{P}(L_2 \geqslant \ell, L_1 = k, X_1 = 0) + \mathbf{P}(L_2 \geqslant \ell, L_1 = k, X_1 = 1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\mathbf{P}\left(X_1 = 0, \dots, X_k = 0, X_{k+1} = 1, \dots, X_{k+\ell} = 1\right) \\
&\quad + \mathbf{P}\left(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_{k+\ell} = 0\right)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^k p^\ell + p^k (1-p)^\ell\right) = p(1-p)^{\ell-1} + (1-p)p^{\ell-1}
\end{aligned}$$

Par continuité décroissante $\mathbf{P}(L_2 \geqslant \ell) \underset{\ell \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(L_2 = +\infty)$, donc $\mathbf{P}(L_2 = +\infty) = 0$.

Si $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(L_2 = \ell) = \mathbf{P}(L_2 \geqslant \ell) - \mathbf{P}(L_2 \geqslant \ell + 1) = p^2(1-p)^{\ell-1} + (1-p)^2 p^{\ell-1}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(L_2) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(p^2 \ell (1-p)^{\ell-1} + (1-p)^2 \ell p^{\ell-1}\right) = 2 \\
\mathbf{E}(L_2(L_2 - 1)) &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \left(p^2(1-p)\ell(\ell-1)(1-p)^{\ell-2} + (1-p)^2 p \ell(\ell-1) p^{\ell-2}\right) \\
&= \frac{2(1-p)}{p} + \frac{2p}{1-p}
\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{V}(L_2) = \frac{2(1-p)}{p} + \frac{2p}{1-p} - 2$$