CHAPITRE 23 - ESPACES PRÉHILBERTIENS

Exercice 23.1

1. on a $(x,y,z)\in F$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x-2y+3z &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ -3y+2z &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{5}{3}z\\ y &=& \frac{2}{3}z\end{array}\right.$$

Une base de F est $f=(-5,2,3)$.

2. On a $\|f\|=\sqrt{25+9+4}=38$. Si u est un vecteur de E alors $p(u)=\left\langle u,\frac{f}{\|f\|}\right\rangle\frac{f}{\|f\|}$, soit

$$\langle u,f\rangle\frac{f}{\|f\|^2}=\frac{-5x+2y+3z}{38}(-5,2,3)=\frac{1}{38}(25x-10y-15z,-10x+4y+6z,-15x+6y+9z).$$

La matrice de la projection dans la base canonique est donc $\frac{1}{38}\begin{pmatrix}25&-10&-15\\-10&4&6\\-15&6&9\end{pmatrix}$.

3. on a $p(e_1)=\frac{1}{38}(25,-10,-15)$, $e_1-p(e_1)=\frac{1}{38}(13,48,53)$ et $d(e_1,F)^2=\|e_1-p(e_1)\|^2=\frac{139}{38}$

Exercice 23.2

1. On a $\mathscr{F}=\mathrm{Vect}(I_2,K)$ où $K=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ donc $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel (de dimension 2) de E.

2. Une matrice $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est orthogonale à $\mathscr{F}$ si et seulement si elle est orthogonale à I_2 et K (famille génératrice de $\mathscr{F}$). On a

$$\varphi(M,I_2)=a+d \text{ et } \varphi(M,K)=b-c.$$

La matrice M est dans $\mathscr{F}^\perp$ si et seulement si $a=-d$ et $b=c$, c'est-à-dire si il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $M\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$. Une base de $\mathscr{F}^\perp$ est $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$.

3. on note M_1 et M_2 ces deux dernières matrices. On remarque que ces matrices sont orthogales et de norme $\sqrt{2}$. Si p est la projection orthogonale sur $\mathscr{F}^\perp$, alors

$$p(J)=\langle J,M_1\rangle\frac{M_1}{\|M_1\|^2}+\langle J,M_2\rangle\frac{M_1}{\|M_2\|^2}$$

cela donne $p(M)=0+2\frac{M_2}{2}=M_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ (on peut remarquer que $J-M_2=I_2\in\mathscr{F}=\mathscr{F}^{\perp\perp}$).

4. On a $d=\|J-p_{\mathscr{F}}(J)\|=\|p(J)\|=\sqrt{2}$.

Exercice 23.4

1. On commence par le cas $\mathbb{R}_n[X]$. Le plus simple ici est de déterminer une base de E_1 et d'écrire que $P\perp E_1$ si et seulement si P est orthogonal à une base de E_1. Une base possible est $X,X^2,\dots,X^n$. Si $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ alors $\left\langle P,X^i\right\rangle=a_i=0$. Si P convient alors P est constant. Réciproquement ces polynômes conviennent (on peut aussi remarquer que E_1 est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et que son orthogonal est par conséquent une droite). Pour le cas de $\mathbb{R}[X]$, P doit êtr eorthogonal à tous les X^i pour $i\in\mathbb{N}^*$. Cela donne de nouveau $E_1^\perp=\mathbb{R}_0[X]$.

2. Même principe avec la base $(X-1)X^k$ pour $k\in[\![0;n-1]\!]$. On obtient $\left\langle P,X^k-^{k+1}\right\rangle=a_k-a_{k+1}=0$. Si P convient alors $P=a_0(1+X+X^2+\ldots+X^n)$ et réciproquement ces polynômes conviennent. Dans le cas de $\mathbb{R}[X]$. Si $P\in E_1^\perp$ est de degré exactement d (avec $d\in\mathbb{N}$), alors $\left\langle P,X^d-X^{d+1}\right\rangle=a_d-a_{d+1}=a_d=0$ d'où une contradiction. Seul le polynôme nul convient.

On peut, dans le cas de $\mathbb{R}_n[X]$ écrire également que $E_2=\left\{P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k,\sum_{k=0}^{n}a_k=0\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X],\langle P,Q\rangle=0\right\}$ où $Q=1+X+\ldots+X^n$. Ainsi $E_2=Q^\perp$ et

$$E_2^\perp=(Q^\perp)^\perp=\left((\mathrm{Vect}Q)^\perp\right)^\perp=(\mathrm{Vect}(Q))^{\perp\perp}=\mathrm{Vect}(Q).$$

E_2 est l'hyperplan orthogonal à Q, donc $E_2^\perp$ est la droite dirigée par Q. Cela ne fonctionne plus aussi simplement dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Même principe... en déterminant une base ou à partir d'une équation de E_3 : $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}a_k=0$. Ainsi $E_3^\perp=\mathrm{Vect}(R)$ où $R=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k+1}$. Comme pour E_2, dans $\mathbb{R}[X]$, on a $E_3^\perp=\{0\}$.

Exercice 23.5

On note $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$. Cet espace est de dimension k.

1. Le plus simple est de déterminer le noyau. En effet, $x \in \ker f$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, $\langle v_i, x\rangle = 0$ puisque $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre. Cela équivaut à dire que $x \in F^{\perp}$. On en déduit que $\ker f = F^{\perp}$, puis par le théorème du rang, que $\mathrm{rg}\, f = n-(n-k) = k$. Puisqu'il est immédiat que $\mathrm{Im}\, f \subset F$, par dimension on obtient $\mathrm{Im}\, f = F$.
2. L'application f est alors bijective puisque $\ker f = \{0\}$ ou que $\mathrm{Im}\, f = F = E$. Si $(a_1 \ldots, a_n)$ est donné, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, c'est-à-dire tel que $\forall i \in [\![1;n]\!], (v_i|x) = a_i$.

Exercice 23.6

- → Si tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang, la série est évidemment convergente.
- → Soit $v \in F^{\perp}$. Pour toute suite u de F, on doit avoir $\langle u, v\rangle = 0$. En prenant la suite u nulle sur tous les termes sauf en un certain rang n_0 pour lequel $u_{n_0} = 1$, on a bien u dans F et $\langle u, v\rangle = v_{n_0}$. Si v est dans $F^{\perp}$, alors v est nulle. la réciproque étant vraie, on a $F^{\perp} = \{0\}$.
- → Soit u une suite de F. On a $\sum u_n^2$ convergente. Soit $p \in \mathbb{N}$ et considérons la suite $u^{(p)}$ obtenue en tronquant la suite u à partir du rang $p+1$: on a $u_n^{(p)} = u_n$ lorsque $n \leqslant p$ et $u_n^{(p)} = 0$ si $n > p$. La suite $u - u^{(p)}$ est nulle jusqu'au rang p puis, pour $n > p$, on a $(u - u^{(p)})_n = u_n$. Ainsi

$$\left\| u - u^{(p)} \right\|^2 = \sum_{n=0}^{p} 0^2 + \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n^2,$$

  et puisque $\sum u_n^2$ converge, la suite des restes de cette série est de limite nulle. On a, par conséquent, $\lim_{p\to+\infty} u^{(p)} = u$ (au sens de la norme utilisée). Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^{(p)}$ est dans F, on a $\overline{F} = \ell^2(\mathbb{R})$.
- → On considère $v^{(p)}$ la suite vérifiant $v_n^{(p)} = \delta_{n,p}$ (tous les termes sont nuls sauf au rang p). La famille $\mathscr{F} = (v^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de F : toute suite de F se décompose en tant que somme finie de ces suites. Puisque F est dense dans $\ell^2(\mathbb{R})$, la famille est totale.

Exercice 23.7

1. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, l'application $A \mapsto \langle A, \cdot\rangle$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur son dual, or l'application $\delta : P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \langle A_n, \cdot\rangle$, c'est-à-dire $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \langle A_n, P\rangle$.
2. Le polynôme A_n n'est pas nul car la forme linéaire δ n'est pas nulle. Notons r le nombre de racines d'ordre de multiplicité impaire de A_n appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et supposons $r \leqslant n-1$. Si on note $a_1, \ldots, a_r$ ces racines, alors on peut écrire $A_n = \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)\, B$, où B est un polynôme non nul de signe constant sur $]0,1[$. Par définition de A_n, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle XP, A_n\rangle = 0$, donc en particulier pour $P = \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)$, ce qui donne $\int_0^1 t \prod_{k=1}^{r} (t - a_k)^2 B(t)\, dt = 0$. Or la fonction intégrée est continue sur $]0,1[$ et garde un signe constant, donc elle est nulle sur $]0,1[$, ce qui signifie que le polynôme $\prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^2 B$ possède une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul, d'où $B = 0$ ce qui est absurde. On en déduit que $r = n$, donc A_n admet n racines d'ordre impair dans $]0,1[$, or il est de degré inférieur ou égal à n, il est donc exactement de degré n et possède n racines simples dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 23.8

1. cours.
2. Posons $G = \{f \in E \mid \forall x \in [-1,0],\ f(x) = 0\}$. On remarque que si $f \in F$ et $g \in G$, alors le produit fg est nul donc $\langle f, g\rangle = 0$, d'où $G \subset F^{\perp}$.
   Soit $g \notin G$, quitte à changer g en $-g$, il existe $a \in [-1,0]$ tel que $g(a) > 0$. Comme g est continue, il existe un intervalle $[b,c] \subset [-1,0]$ tel que $b < c$ et $g > 0$ sur $[b,c]$. On définit alors $f \in E$ continue affine par morceaux par $\forall x \in [-1,1] \setminus [b,c]$, $f(x) = 0$, $f(\frac{b+c}{2}) = 1$, f affine sur $[b, \frac{b+c}{2}]$ et sur $[\frac{b+c}{2}, c]$. On observe que $f \in F$ et que le produit fg est nul sur $[-1,1] \setminus [b,c]$ et strictement positif sur $]b,c[$, donc $\langle f, g\rangle > 0$, d'où $g \notin F^{\perp}$. Finalement, on a montré que $F^{\perp} = G$.
3. Soit $f \in E$ telle que $f(0) = 0$. On construit deux fonctions g et h en posant $g = f$ et $h = 0$ sur $[-1,0]$ et $g = 0$ et $h = f$ sur $[0,1]$. Les fonctions g et h sont continues sur $[-1,1]$ car f est continue et $f(0) = 0$, donc $g \in F$ et $h \in F^{\perp}$ et $f = g + h$. Inversement si $g \in F$ et $h \in F^{\perp}$, alors $g(0) = 0$ et $h(0) = 0$ donc $(g+h)(0) = 0$. Il en résulte que $F + F^{\perp} = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. On observe que $F + F^{\perp} \neq E$.
4. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales, et $f \in \mathscr{P}^{\perp}$. Par théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[-1,1]$. Or $\|P_n f - f^2\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty$, donc $\left|\int_{-1}^{1} \left(P_n(x) f(x) - f(x)^2\right) dx\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $\int_{-1}^{1} P_n(x) f(x)\, dx = 0$, d'où en faisant tendre n vers l'infini, on obtient que $\int_0^1 f(x)^2\, dx = 0$ d'où $f = 0$ par continuité de f. On en déduit que $\mathscr{P}^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 23.9

- → en appliquant la relation au vecteur e_i, on obtient $\|e_i\|^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{j\neq i} \left\langle e_i, e_j \right\rangle^2$, et ainsi $\sum_{j\neq i} \left\langle e_i, e_j \right\rangle^2 = 0$. Tous les produits scalaires sont donc nuls et la famille est orthogonale, et ainsi orthonormale. Notamment, la famille est libre et $p \leqslant n$.
- → Soit $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $x \in F^\perp$. La relation de l'énoncé donne $\|x\|^2 = 0$. Ainsi $x = 0$, $F^\perp = \{0\}$ et $F = E$. La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est donc génératrice si bien que $p \geqslant n$.

On a bien montré que $p = n$ et que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 23.10

1. Soit $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Si $x \in F^\perp$, alors $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle^2 = 0$. Ainsi $F^\perp = \{0\}$ et $F = E$. La famille est donc génératrice et $p \geqslant n$. Puisque $p \leqslant n$, on a $p = n$. On applique encore la relation à l'un des vecteurs e_i. Cela donne
$$\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle e_i, e_k \rangle^2 \geqslant \langle e_i, e_i \rangle^2 = \|e_i\|^4.$$
On obtient $\|e_i\|^4 \leqslant \|e_i\|^2$. Puisque $e_i \neq 0$ (la famille est une base de E d'après les résultats précédents), on a $\|e_i\|^2 \leqslant 1$.
2. Soit $F_i = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n)$, sous-espace de dimension $n-1$ de E et u un vecteur de $F_i^\perp$. On applique encore la relation ; cela donne $\|u^2\| = \langle e_i, u \rangle^2 \leqslant \|e_i\|^2 \|u\|^2$. Ainsi $\|e_i\| = 1$ et le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne e_i et u colinéaires. On a bien e_i orthogonal aux autres e_k et unitaire. On en déduit bien que la famille est orthonormée.

Exercice 23.11

1. On a $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x) \rangle = \langle p(x), p(x) - x + x \rangle = \langle p(x), p(x) - x \rangle + \langle p(x), x \rangle = \langle p(x), x \rangle$ puisque $p(x)$ et $p(x) - x$ sont orthogonaux.
2. On a $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle p(e_i), e_i \rangle$. Or $\langle p(e_i), e_i \rangle$ est le coefficient d'indice (i, i) de la matrice de p dans $\mathscr{B}$, donc $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \text{tr}\, p = \text{rg}\, p = q$.

Exercice 23.12

1. On vérifie qu'on a bien un produit scalaire. On a $(X^k|1) = \Gamma(k+1) = k!$.
2. → Le polynôme Q appartient à F ce qui donne l'existence de réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $Q = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l X^l$. Avec $a_l = -\alpha_l$, on obtient le résultat.
   → Le polynôme Q est le projeté orthogonale de 1 sur F donc $1 - Q \perp F$. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a $(1 - Q|X^k) = 0$. On explicite cette égalité. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a
   $$(1-Q|X^k) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{n} a_l t^\ell\right) t^k e^{-t}\, dt = k! + \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell (k+\ell)! = 0.$$
   Or pour un tel entier k, on a $P(k) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell (k+1)\ldots(k+\ell) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \frac{(k+\ell)!}{k!}$ et $k!P(k) = (1 - Q|X^k) = 0$. Ainsi pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a $P(k) = 0$.
   → Le polynôme P est de degré n, de coefficient dominant a_n et admet $1, 2, \ldots, n$ pour racine. Ainsi $P = a_n(X-1)(X-2)\ldots(X-n)$. Il reste à déterminer le coefficient dominant a_n. Pour cela on calcule $P(-1)$ (car -1 est racine de tous les polynômes $(X+1)\ldots(X+k)$). Cela donne $P(-1) = 1 = a_n(-1)^n(n+1)!$. On obtient finalement $P = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} (X-k)$.
3. En remplaçant α_k par $-\beta_k$, on montrer que $I = \min_{R\in F} \|1 - R\|^2$. Ce minimum est atteint lorsque R est le projeté orthogonal de 1 sur F, c'est-à-dire Q. On a donc $I = \|1 - Q\|^2 = (1-Q|1-Q) = (1-Q|1) - (1-Q|Q)$. Or $Q \in F$ et $1 - Q \in F^\perp$ donc $I = (1-Q|1)$. En reprenant le calcul de la question 2.b, on trouve $(1-Q|1) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \ell! = P(0)$. Puisque $P(0) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\left((-1)^n n!\right)$, on obtient $I = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 23.13

1. on vérifie...
2. Des deux espaces, le plus petit est W puisque c'est un espace de dimension 2. Si on note $f_0 : x \mapsto e^x$ et $f_1 : x \mapsto e^{-x}$, alors $W = \text{Vect}(f_0, f_1)$. En revanche V l'intersection de deux hyperplans (noyau de deux formes linéaires $f \mapsto f(0)$ et $f \mapsto f(1)$), donc très gros (et au passage c'est un sous-espace vectoriel de E).
   → V et W sont orthogonaux : soit $f \in V$ et $g \in W$, alors
   $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\, dt = \int_0^1 f(t)g''(t) + f'(t)g'(t)\, dt = \left[f(t)g'(t)\right]_0^1 = 0.$$

Puisque les deux sous-espaces sont orthogonaux, ils sont en somme directe.

- → Par analyse synthèse, on prouve que $E \subset V + W$. Soit $h \in E$ et supposons que $h = f + g$ avec $f(0) = f(1) = 0$ et $g'' = g$. On peut écrite $g = \alpha f_0 + \beta f_1$. En évaluant en 0 et en 1, cela donne

$$h(0) = \alpha + \beta \text{ et } h(1) = \alpha e + \beta e^{-1}$$

La résolution de ce système donne $(1-e^2)\alpha = h(0) - eh(1)$, soit $\alpha = \dfrac{h(0)-eh(1)}{1-e^2}$ puis $\beta = h(0) - \alpha = e\dfrac{-eh(0)+h(1)}{1-e^2}$. Finalement

$$g : x \mapsto \frac{h(0)-eh(1)}{1-e^2}e^x + e\frac{h(1)-eh(0)}{1-e^2}e^{-x}.$$

et $f(x) = h(x) - g(x)$ - les deux fonctions sont entièrement déterminées à partir de h.
Récipoquement, soit $h \in E$. On note $g = \dfrac{h(0)-eh(1)}{1-e^2}f_0 + e\dfrac{h(1)-eh(0)}{1-e^2}f_1$ et $f = h - g$. On a bien $f + g = h$, $g \in W$. Il suffit de calculer $f(0)$ et $f(1)$ pour obtenir 0, si bien que la décomposition convient.

- → Pour finir, f est la composante sur V et g la composante sur W de h dans la décomposition $E = V \oplus W$. De plus $V \perp W$ donc la projection orthogonale de h sur W est cette composante sur W, donc la fonction g obtenue.

3. L'ensemble $E_{\alpha,\beta}$ n'est pas un sous-espace vectoriel mais un sous-espace affine de E. Considérons $\tilde{f}$ une fonction de $E_{\alpha,\beta}$ (par exemple la fonction affine $x \mapsto \alpha + (\beta-\alpha)x$). Alors $f \in E_{\alpha,\beta}$ si et seulement si $f - \tilde{f} \in V$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. On a donc

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 f^2 + f'^2 = \inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \|f\|^2 = \inf_{k\in V} \|k+\tilde{f}\|^2 = \left(\inf_{k\in V} \|-k+\tilde{f}\|\right)^2 = \left(\inf_{k\in V} \|k-\tilde{f}\|\right)^2$$

c'est-à-dire $d^2(\tilde{f}, V) = \|\tilde{f} - p_V(\tilde{f})\|^2$ où $p_V(\tilde{f})$ est le projeté orthogonal de $\tilde{f}$ sur V. Or $\tilde{f} - p_V(\tilde{f}) = p_W(\tilde{f})$. On a ce projeté dans la question précédente - et puisqu'il ne dépend que de $\tilde{f}(0)$ et $\tilde{f}(1)$, l'expression de $\tilde{f}$ n'est même pas utile. Finalement

$$a = \left\| \frac{\alpha - e\beta}{1-e^2} f_0 + e\frac{\beta - e\alpha}{1-e^2} f_1 \right\|^2 = \left(\frac{\alpha - e\beta}{1-e^2}\right)^2 \|f_0\|^2 + \left(e\frac{\beta - e\alpha}{1-e^2}\right)^2 \|f_1\|^2,$$

puisque f_0 et f_1 sont orthogonaux. Il n'y a plus qu'à finir les calculs.