

CHAPITRE 24 - ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 24.1

1. rotation d'axe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'angle $+\pi/6$.
2. réflexion orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$
3. rotation d'axe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle $+\pi/6$.
4. réflexion-rotation autour de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle θ avec $\cos \theta = \frac{7}{9}$.

Exercice 24.2

Deux possibilités pour cet exercice :

→ on se place dans une base adaptée : on fixe $u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on complète en une base orthonormée (u, v, w) avec $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = u \wedge v$.

Dans cette base, la matrice de r est sous la forme standard. On détermine les coordonnées de e_2 et e_3 dans cette base afin d'écrire la relation $r(e_2) = e_3$. On obtient alors $\cos \theta$ et $\sin \theta$ puis avec un changement de bases, la matrice de r dans la base canonique.

→ On travaille directement dans la base canonique. La matrice de r est A avec

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a' \\ b & 0 & b' \\ c & 1 & c' \end{pmatrix}.$$

On écrit le fait que A est orthogonale : $c' = c = 0$, $a^2 + b^2 = 1$, $a'^2 + b'^2 = 1$ et $aa' + bb' = 0$. On a alors $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, $a' = -\sin \theta'$ et $b' = \cos \theta'$ (par exemple, c'est pour simplifier) avec $\sin(\theta' - \theta) = 0$. Ainsi $\theta' = \theta$ ou $\theta' = \theta + \pi$. On a

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta' \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta' \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A doit être égal à 1, ce qui nous place dans la situation $\theta' = \theta + \pi$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin le vecteur d'axe doit être invariant, ce qui donne $\cos \theta + \sin \theta = 1$ et $-\cos \theta + \sin \theta = 1$. Ainsi $\cos \theta = 0$ et $\sin \theta = 1$. Finalement

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est une rotation d'angle $+2\pi/3$ autour de l'axe dirigé par $(1, 1, 1)$.

Exercice 24.3

1. Le coefficient (j, j) de la matrice $A^T A$ est égal à $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2$. Comme $A^T A = I_n$, on en déduit que $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$, donc en sommant sur j variant de 1 à n , on a $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = n$. On peut le voir en écrivant que le carré de la norme de chacune des colonnes de A vaut 1. En ajoutant ces normes au carré, on trouve la somme des carrés des coefficients de A , et également n .

2. Soit V le vecteur colonne ${}^t(1, \dots, 1)$. La $i^{\text{ème}}$ coordonnée de AV est égale à $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$, donc $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = (AV|V)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq \|AV\| \|V\| = \|V\|^2 = n.$$

3. Comme $a_{i,j} \in [-1, 1]$, on sait $a_{i,j}^2 \leq |a_{i,j}|$. En sommant pour i et j variant de 1 à n , on obtient $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \geq \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = n$ d'après la

première question. Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{(n^2)}$, on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2} \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} 1} = n \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2} = n\sqrt{n}.$$

Exercice 24.4

La matrice A est symétrique car $A^T = I_n - 2(UU^T)^T = A$. On a donc $A^T A = A^2$. Par ailleurs, on a $A^2 = (I_n - 2UU^T)^2 = I_n - 4UU^T + 4uU^T UU^T$. Or $U^T U = 1$, si bien que $uU^T UU^T = U(U^T U)U^T = UU^T$. Finalement $A^T A = I_n$. La matrice A est donc orthogonale, mais également symétrique. C'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale. Il reste à déterminer les vecteurs invariants par A . Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = X$. Cela équivaut à l'équation $(E) : 2uU^T X = 0$. Si U est le vecteur $(u_1, \dots, u_n)^T$ et S le vecteur $(x_1, \dots, x_n)^T$, l'équation (E) est équivalente à $(\sum_{i=1}^n u_i x_i)u = 0$.

Comme le vecteur u est non nul, l'espace invariant est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n u_i x_i = 0$. La matrice A est donc une réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur U .

Exercice 24.6

La matrice M est diagonalisable donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$. L'égalité $M^P = I_n$ entraîne que $\forall i, \lambda_i^P = 1$, donc $\lambda_i \in \{-1, 1\}$, d'où $\lambda_i^2 = 1$, ce qui donne immédiatement que $M^2 = P I_n P^{-1} = I_n$.

Exercice 24.7

On utilise la relation $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}(A^2)$ (car A est symétrique). La matrice A est symétrique et réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1} A P = D$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a alors $A = P D P^{-1}$ et $A^2 = P D^2 P^{-1}$. En passant à la trace, on obtient $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(P D^2 P^{-1}) = \text{tr}(D^2 P^{-1} P) = \text{tr}(D^2)$, d'où le résultat.

Exercice 24.8

La matrice $A^T A$ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable. Il existe P inversible (et même orthogonale) telle que $A^T A = P D P^{-1}$ où D est diagonale de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors

$$\det(I_n + A^T A) = \det(I_n + P D P^{-1}) = \det(P) \det(I_n + D) \det(P^{-1}) = \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k).$$

Puisque les valeurs propres sont à peu près quelconques, on s'intéresse à chaque facteur $1 + \lambda_k$. La matrice $A^T A$ est positive : si $A^T A X = \lambda X$ pour $X \neq 0$, on obtient en multipliant par X^T , $\|A X\|^2 = \lambda \|X\|^2$. Ainsi $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$. On obtient $\det(I_n + A^T A) \geq 1$.

Exercice 24.9

Soit $(x, y) \in E^2$. En appliquant l'hypothèse en x, y et $x + y$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (u(x) + u(y)|x + y) = (u(x)|x) + (u(x)|y) + (x|u(y)) + (u(y)|y) \\ 0 &= 0 + (u(x)|y) + (x|u(y)) + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x, y \in E$, $(x|u^*(y)) = -(x|u(y))$. Par unicité de l'adjoint, on en déduit que $u^* = -u$. On a alors $\ker u = \ker u^* = (\text{Im } u)^\perp$.

Exercice 24.10

L'inclusion $\ker f \cap \ker f^* \subset \ker(f + f^*)$ est évidente. Soit $x \in \ker(f + f^*)$: on a $f(x) + f^*(x) = 0$. Puisque $\text{Im } f \subset \ker f$, on a $f(f(x)) = 0$, d'où $f(f^*(x)) = 0$. En faisant le produit scalaire par x , on obtient que $(f^*(x)|f^*(x)) = 0$, d'où $f^*(x) = 0$, puis $f(x) = 0$ en reportant dans la relation de départ. On en déduit par double inclusion que $\ker(f + f^*) = \ker f \cap \ker f^*$.

Exercice 24.11

- Supposons que $\text{Im } u = \ker u$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) + u^*(x) = 0$. En prenant l'image par u on obtient $u(u^*(x)) = 0$, d'où en faisant le produit scalaire par x , on obtient $(u^*(x)|u^*(x)) = 0$, d'où $u^*(x) = 0$ et en reportant $u(x) = 0$. Par conséquent, $x \in \ker u^* = (\text{Im } u)^\perp = (\ker u)^\perp$, or $x \in \ker u$, d'où $x = 0$. On en déduit que l'endomorphisme $u + u^*$ est injectif, donc bijectif.
- Supposons $u + u^*$ bijectif. Comme $u^2 = 0$, on a déjà $\text{Im } u \subset \ker u$. Soit $x \in \ker u$. Par hypothèse, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) + u^*(y)$. En prenant l'image par u , on obtient $u(u^*(y)) = 0$, d'où $u^*(y) = 0$ en faisant le produit scalaire par y , ce qui donne $x = u(y) \in \text{Im } u$. On a bien montré que $\text{Im } u = \ker u$.

Exercice 24.12

Il existe un unique endomorphisme ν de E tel que $\nu(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Comme ces deux bases sont orthonormales, ν est orthogonal. Soit $S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (u(e_i)|f_j)^2$. On a $S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (u(e_i)|\nu(e_j))^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ((\nu^* \circ u)(e_i)|e_j)^2$. Notons $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de $\nu^* \circ u$ dans la base (e_1, \dots, e_n) . Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on a $m_{j,i} = ((\nu^* \circ u)(e_i)|e_j)$, donc

$$S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ji}^2 = \text{tr}(M^T M) = \text{tr}((\nu^* \circ u)^* \circ \nu^* \circ u) = \text{tr}(u^* \circ \nu \circ \nu^* \circ u) = \text{tr}(u^* \circ u)$$

car $\nu \circ \nu^* = \text{Id}_E$.

Exercice 24.13

Considérons l'application $\rho : V \rightarrow (\cos\theta)V + (\sin\theta)e \wedge V + (1 - \cos\theta)(e|V)e$. On veut montrer que $\rho = \varphi$.

→ *Première méthode* : il suffit de le vérifier sur une base de E , de préférence une base adaptée dans laquelle les calculs sont faciles, c'est-à-dire une base orthonormale dont le premier vecteur est e . On note cette base (e, e_1, e_2) . Alors

$$\begin{aligned} \varphi(e) &= (\cos\theta)e + (\sin\theta)e \wedge e + (1 - \cos\theta)(e|e)e \\ &= (\cos\theta)e + (1 - \cos\theta)e = e = \rho(e) \\ \varphi(e_1) &= (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e \wedge e_1 + 0 = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2 = \rho(e_1) \\ \varphi(e_2) &= (\cos\theta)e_2 + (\sin\theta)e \wedge e_2 + 0 = (\cos\theta)e_2 + (\sin\theta)(-e_1) = \rho(e_2). \end{aligned}$$

Comme ρ et φ coïncident sur une base, elles sont donc égales.

→ *Deuxième méthode* : on note $D = \text{Vect}(e)$ et P le plan orthogonal à D . Soit $V \in E$. On écrit $V = \underbrace{(e|V)e}_{\text{sur } D} + \underbrace{(V - (e|V)e)}_{\text{sur } P}$. On note $w = V - (e|V)e$

la composante sur P . On remarque que $e \wedge w = e \wedge V - 0$. Ce vecteur est orthogonal à e et à w . Comme e et w sont orthogonaux, il est de même norme que w (e est unitaire). La base $(e, w, e \wedge w)$ est directe et $\rho(V) = (e|V)e + (\cos\theta w + \sin\theta e \wedge w)$. En remplaçant $e \wedge w$ par $e \wedge V$, on obtient

$$\begin{aligned} \rho(V) &= (e|V)e + \cos\theta(V - (e|V)e) + \sin\theta e \wedge V \\ &= \cos\theta V + \sin\theta e \wedge V + (1 - \cos\theta)(e|V)e. \end{aligned}$$

Exercice 24.14

→ On note $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ les deux valeurs propres (elles sont conjuguées car le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels). Soit X un vecteur propre de A pour la valeur propre $e^{i\theta}$. On note $X = Y + iZ$ avec $Y, Z \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. On a $A\bar{X} = e^{-i\theta}\bar{X}$ (en conjugant) si bien de \bar{X} est vecteur propre pour la valeur propre $e^{-i\theta}$.

→ On développe $AX = e^{i\theta}X$:

$$AY + iAZ = (Y \cos\theta - Z \sin\theta) + i(Y \sin\theta + Z \cos\theta).$$

On a par conséquent $AY = Y \cos\theta - Z \sin\theta$ et $AZ = Y \sin\theta + Z \cos\theta$. Si on prouve que (Z, Y) est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice, dans cette nouvelle base, de l'endomorphisme canoniquement associé à A sera

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

→ S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Z = \lambda Y$, alors $X = (1 + i\lambda)Y$ et $\bar{X} = (1 - i\lambda)Y$. Les vecteurs X et \bar{X} sont alors colinéaires (dans \mathbb{C}) et ne peuvent former une base de vecteurs propres (on peut aussi le démontrer en utilisant le fait que $Y = \frac{1}{2}(X + \bar{X})$ et $Z = \frac{1}{2i}(X - \bar{X})$ puis écrire une combinaison $\alpha Y + \beta Z = 0$ et prouver l'indépendance linéaire). Finalement (Z, Y) est libre donc est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. Cela termine la démonstration.

Exercice 24.15

1. On peut le faire de plusieurs manières :

→ On a $\dim \ker(\text{Id} - u)^\perp = n - \dim \ker(\text{Id} - u) = \dim \text{Im}(\text{Id} - u)$. Il suffit donc de prouver une inclusion. Soit $x \in \text{Im}(\text{Id} - u)$ qu'on écrit $x = y - u(y)$. On vérifie qu'il est orthogonal à $\ker(\text{Id} - u)$: soit $z \in \ker(\text{Id} - u)$ (c'est-à-dire tel que $u(z) = z$). On a

$$\langle x, z \rangle = \langle y - u(y), z \rangle = \langle y, z \rangle - \langle u(y), z \rangle = \langle y, z \rangle - \langle u(y), u(z) \rangle = 0$$

puisque u est un endomorphisme orthogonal. On a donc une inclusion et même dimension.

→ On a $\text{Im}(\text{Id} - u)^\perp = \ker(\text{Id} - u)^*$. Il suffit donc de montrer que $\ker(\text{Id} - u)^* = \ker(\text{Id} - u)$: on a, puisque d'une part u est bijective, $u^*(x) = x \Leftrightarrow u(u^*(x)) = u(x)$; d'autre part $u \circ u^* = \text{Id}$ donc $u^*(x) = x \Leftrightarrow x = u(x)$ et ainsi $\ker(\text{Id} - u)^* = \ker(\text{Id} - u)$ (et toutes les variations autour de la même démonstration)

2. Puisque $E = \ker(\text{Id} - u) \oplus \ker(\text{Id} - u)^\perp$, on décompose $x = y + z$ avec $z \in \ker(\text{Id} - u)$ et $y \in \ker(\text{Id} - u)^\perp = \text{Im}(\text{Id} - u)$. Il existe $t \in E$ tel que $y = t - u(t)$. Le vecteur z est bien le projeté orthogonal de x sur $\ker(\text{Id} - u)$ et est invariant par u (on a $u(z) = z$). On a alors

$$x = z + t - u(t); u(x) = z + u(t) - u^2(t) \quad \text{et } \forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = z + u^k(t) - u^{k+1}(t)$$

On a donc $x_n = z + \frac{1}{n+1}(t - u^{n+1}(t))$ et $\|x_n - z\| = \frac{1}{n+1} \|t - u^{n+1}(t)\| \leq \frac{1}{n+1} (\|t\| + \|u^{n+1}(t)\|) = \frac{2\|t\|}{n+1}$ puisque u et donc u^{n+1} sont orthogonaux et conservent la norme. On a finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - z\| = 0$ et (x_n) converge vers z .

Exercice 24.16

On commence par réduire la matrice A (en base orthonormée mais ce n'est pas obligatoire). Elle est semblable à une matrice diagonale par blocs $D = (-I_m, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k})$ avec R_{θ_i} matrice d'une matrice d'angle θ_i et les θ_i sont dans $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$: il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$. On a alors $A^p = QD^pQ^{-1}$ et A^p est convergente si et seulement si D^p est convergente (puisque on a également $D^p = Q^{-1}A^pQ$). Or D^k est la matrice diagonale $(-I_m^p, R_{p\theta_1}, \dots, R_{p\theta_k})$ - elle ne converge jamais (pas si immédiat que ça, mais ça se fait avec des suites extraites par exemples). On s'intéresse à la suite des moyennes.

→ Sur la partie $-I_m$, on obtient, suivant la parité, 0 ou $-\frac{1}{p+1}I_m$ et cette partie tend vers 0.

→ On s'intéresse au cas d'une matrice R_θ . On a $R_\theta = P^{-1}D_\theta P$ pour une certaine matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D_θ la matrice $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

On calcule et simplifie la moyenne ce qui donne

$$R_\theta^p = P^{-1} \begin{pmatrix} S_{\theta,p} & 0 \\ 0 & S_{-\theta,p} \end{pmatrix} P$$

où $S_{\theta,p} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p (e^{i\theta})^k = \frac{1}{p+1} \frac{1 - e^{i(p+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$, de limite nulle lorsque p tend vers $+\infty$. Finalement, la limite de B_p est nulle.

Exercice 24.17

1. Soit $y = X^T A X$, alors $y \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ et $y^T = y$. Cela donne $X^T A X = X^T (-A) X$, puis $X^T A X = 0$.
2. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(I_n + A)X = 0$. En multipliant par X^T , on obtient $X^T X + X^T A X = 0 = X^T X = \|X\|^2$. Ainsi $X = 0$ et $I_n + A$ est inversible (l'endomorphisme canoniquement associé est injectif).
3. La transposition commute avec le passage à l'inverse, donc $B^T = (I_n - A)^T ((I_n + A)^T)^{-1}$, d'où $B^T = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$, or $I_n + A$ commute avec $I_n - A$ donc avec son inverse, d'où $B^T B = I_n$, donc B est orthogonale.
4. On a $\det B = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)}$, or $\det(I_n + A) = \det(I_n + A)^T = \det(I_n - A)$, d'où $\det B = 1$, donc $B \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 24.18

1. Si $y \in \text{Im } p$ alors $pq(y) = p(q(y)) \in \text{Im } p$. On note v l'endomorphisme induit par pq sur $\text{Im } p$. Soient x et y dans $\text{Im } p$. On a, puisque p et q sont symétriques (et que x et y sont invariants pas p) :

$$\langle v(x), y \rangle = \langle pq(x), y \rangle = \langle q(x), p(y) \rangle = \langle q(x), y \rangle = \langle x, q(y) \rangle = \langle p(x), q(y) \rangle = \langle x, pq(y) \rangle$$

2. On aker $q \subset \ker pq$. Si $x \in \text{Im } (q) \cap \ker p$, alors $q(x) = x$ et $p(x) = 0$; on a donc $pq(x) = p(x) = 0$ et $x \in \ker pq$. De plus $\ker q \cap (\text{Im } q \cap \ker p) \subset \text{Im } q \cap \ker q = \{0\}$. On a donc $\ker q \oplus (\text{Im } q \cap \ker p) \subset \ker pq$. Soit $x \in \ker pq$. Puisque $E = \ker q \oplus \text{Im } q$, on peut décomposer x sous la forme $x = q(x) + (x - q(x))$ (avec $q(x) \in \text{Im } q$ et $x - q(x) \in \ker q$). Il suffit de prouver que $q(x) \in \ker p$ pour avoir décomposé x dans la somme directe $\ker q \oplus (\text{Im } q \cap \ker p)$. C'est immédiat puisque $p(q(x)) = 0$ car $x \in \ker pq$. On a donc l'autre inclusion.

3. Puisqu'on est dans un espace euclidien,

$$(\text{Im } p + \ker q)^\perp = (\text{Im } p)^\perp \cap (\ker q)^\perp = \ker p^* \cap \text{Im } q^* = \ker p \cap \text{Im } q.$$

et ainsi (la somme est orthogonale)

$$E = (\text{Im } p + \ker q) \oplus (\ker p \cap \text{Im } q)$$

4. On décompose E : on a

$$E = (\text{Im } p + \ker q) \oplus (\ker p \cap \text{Im } q) = \text{Im } p + (\ker q + (\ker p \cap \text{Im } q)) = \text{Im } p + \ker(pq)$$

Puisque pq induit un endomorphisme symétrique v sur $\text{Im } p$, il existe une base de $\text{Im } p$ formée de vecteur propre pour pq . On peut alors compléter cette famille libre en une base de E à l'aide vecteur de $\ker pq$ (puisque la somme des espaces donne E). Ces nouveaux vecteurs sont aussi des vecteurs propres pour pq (pour la valeur propre 0). On a donc construit une base de vecteurs propres de pq et pq est donc diagonalisable.

5. soit λ une valeur propre non nulle de vecteurs propre $x \in \text{Im } p$. On a $pq(x) = \lambda x$. On a alors $\langle pq(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2 = \langle q(x), p(x) \rangle = \langle q(x), x \rangle$. Or $\langle q(x), x \rangle = \langle q(x), x - q(x) \rangle + \langle q(x), q(x) \rangle = \langle q(x), q(x) \rangle$ puisque $x - q(x) \perp q(x)$. Cela donne $\lambda \|x\|^2 = \|q(x)\|^2$. Puisque q est un projecteur orthogonal, on a $0 \leq \|q(x)\|^2 \leq \|x\|^2$, ce qui donne bien $\lambda \in [0, 1]$ pour les valeurs propres non nulles de pq .

Exercice 24.19

1. On a $(u \circ v)^* = v^* \circ u^* = v \circ u$. Ainsi $u \circ v = v \circ u \iff u \circ v = (u \circ v)^*$.
2. S'il existe une base orthonormée de vecteurs propres communs alors les matrices de u et v dans cette base sont diagonales et commutent

donc u et v commutent. Réciproquement, on suppose que u et v commutent. Puisque u est autoadjoint, il est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u . Chaque espace propre E_{λ_i} est stable par v puisque u et v commutent. L'endomorphisme v_i induit par v sur E_{λ_i} est encore autoadjoint et est donc diagonalisable dans une base orthonormée \mathcal{B}_i de E_{λ_i} . Les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres pour u . On concaténant ces bases, puisque les espaces propres E_{λ_i} sont orthogonaux, on obtient une base orthonormée de E formée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v .

3. Soit \tilde{s} une telle symétrie orthogonale. Alors \tilde{s} est autoadjoint et commute avec s . L'espace propre E_{-1} de s est une droite dirigée par $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Ce sera un vecteur propre pour \tilde{s} d'après la question précédente. Il existe alors une base (e'_1, e'_2) de E_1 formée de vecteurs propres pour \tilde{s} . Puisque \tilde{s} est une symétrie orthogonale, on a $\tilde{s}(e'_i) = \varepsilon_i e'_i$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$. On compte le nombre de 1 :
- 3 : $\tilde{s} = \text{Id}$ et 0 : $\tilde{s} = -\text{Id}$
 - 1 : soit sur e'_3 et $\tilde{s} = s$, soit sur l'un des vecteurs de E_1 et \tilde{s} est une réflexion selon un plan orthogonal à E_{-1} (ou selon un plan qu'on dit perpendiculaire à E_1)
 - 2 : symétrie axiale (rotation d'angle π selon une droite qui est soit E_{-1} , soit une droite contenue dans E_1).

Exercice 24.20

1. si u est antisymétrique, alors $\langle u(x), x \rangle = \langle x, u^*(x) \rangle = -\langle x, u(x) \rangle$ et donc $\langle u(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$ (on peut même montrer que c'est équivalent à $u^* = -u$).
2. on a $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^* \circ u(x), x \rangle$ et $\|u^*(x)\|^2 = \langle u \circ u^*(x), x \rangle$.
→ on en déduit que $i) \Rightarrow iii)$,
→ avec les formules de polarisation, on a $iii) \Rightarrow ii)$:

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \frac{1}{4} \left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 \right)$$

avec un résultat similaire avec u^*

→ pour tout $x, y \in E$, on a

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle (u^* \circ u)(x), y \rangle \text{ et } \langle u^*(x), u^*(y) \rangle = \langle (u \circ u^*)(x), y \rangle$$

on en déduit que, pour tout $x \in E$, on a pour tout $y \in E$, $\langle (u^* \circ u)(x), y \rangle = \langle (u \circ u^*)(x), y \rangle$ et ainsi $(u^* \circ u)(x) = (u \circ u^*)(x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 24.21

1. on a $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^* \circ u(x), x \rangle$ et $\|u^*(x)\|^2 = \langle u \circ u^*(x), x \rangle$ ainsi $\|u^*(x)\|^2 = \text{norme } u(x)^2 = \lambda^2 \|x\|^2$. De plus $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = \det(u^* - \lambda \text{Id}_E)^* = \det(u^* - \lambda \text{Id}_E)$ donc $\chi_u = \chi_{u^*}$ et u et u^* ont les mêmes valeurs propres.
2. En remplaçant u par $v = u - \lambda \text{Id}_E$, on a v et v^* qui commutent. Si x est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ alors x est vecteur propre pour v pour la valeur propre 0 et $\|v^*(x)\|^2 = 0$ donc $v^*(x) = 0$ et $u^*(x) = \lambda x$. On a le même résultat en remplaçant u par u^* (avec $u^{**} = u$). On a donc $E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*)$.
3. Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de u . On a $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$. Or $\langle u(x), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ et $\langle x, u^*(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle$. On a donc $\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$ et puisque $\lambda \neq \mu$, $\langle x, y \rangle = 0$. Les espaces propres de u sont donc orthogonaux.
4. Si u est diagonalisable, il l'est en base orthonormée : on prend une base orthonormée de chaque espace propre et on les concatène ; cela forme bien une base orthonormée de E puisque les espaces propres sont orthogonaux. La matrice de u dans cette base orthonormée est diagonale donc symétrique et ainsi u est autoadjoint.

Exercice 24.22

1. Puisque a est unitaire $\langle a, x \rangle$ est le projeté de x sur $D = \text{Vect}(a)$. Un petit dessin et on se rend compte que f_a est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à a . On peut le montrer différemment. Soit $e_1 = a$ et e_2, \dots, e_n une base orthonormée de $H = D^\perp$. On a $f_a(e_1) = -e_1$ et $f_a(e_k) = e_k$ si $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. La matrice de f_a dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est diagonale de diagonale $(-1, 1, \dots, 1)$. On retrouve la symétrie orthogonale par rapport à H .
2. Soit $h = g \circ f_a \circ g^{-1}$. En tant que composée d'endomorphismes orthogonaux, h est un endomorphisme orthogonal. Si $y = g(x) \in g(H)$ alors $h(x) = g(f_a(x)) = g(x) = y$. Les éléments de $g(H)$ sont invariants par h . De même $h(g(a)) = -g(a)$. Ainsi h est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $g(H)$.

Exercice 24.23

Comme $B^T = AA^T - A^T A = B$, la matrice B est symétrique et réelle. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale avec, d'après l'énoncé, des valeurs propres toutes positives. Or $\text{tr } B = \text{tr}(AA^T) - \text{tr}(A^T A) = 0$ est la somme des valeurs propres. Les valeurs propres sont donc toutes nulles et B est semblable à la matrice nulle donc B est nulle.

Exercice 24.24

1. voir cours
2. Pour tout vecteur x de norme 1, on a $(f(x) + g(x)|x) = (f(x)|x) + (g(x)|x) \geq (f(x)|x) + \lambda(g)$. On obtient ainsi, pour tout x de norme 1,

$(f(x)|x) + \lambda(g) \leq \mu(f + g)$. On passe à la borne supérieure sur tous les vecteurs de norme 1, et on obtient $\mu(f + g) \geq \mu(f) + \lambda(g)$.

Exercice 24.25

- Comme A commute avec sa transposée, on a $(A^T A)^P = (A^T)^P A^P = 0$. On en déduit que toutes les valeurs propres de $A^T A$ sont nulles. Or cette matrice est symétrique donc diagonalisable, on en déduit qu'elle est nulle.
- On sait que $\text{tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2$, donc cette somme est nulle, ce qui entraîne que tous ses termes sont nuls, donc que A est nulle.

Exercice 24.26

- Puisque u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, il existe (e_1, \dots, e_n) base orthonormale de vecteurs propres associées aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$ et $(x|u(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. On remarque notamment (cela servira par la suite), que pour tout $x \in E$, on a $(x|u(x)) \leq \lambda_n \|x\|^2$. Enfin on a $(x|u(x)) - \lambda_n \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_n) x_i^2$. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $(\lambda_i - \lambda_n) x_i^2 \leq 0$. La somme précédente est une somme de termes négatifs. Elle est nulle seulement lorsque, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $(\lambda_i - \lambda_n) x_i^2 = 0$. Lorsque $\lambda_i < \lambda_n$, cela donne $x_i = 0$ et il ne reste plus que des coefficients sur les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_n . Si x vérifie $(x|u(x)) = \lambda_n \|x\|^2$, alors $x \in \ker(u - \lambda_n \text{Id}_E)$. La réciproque est immédiate (et peut se faire en même temps que le sens direct).
- D'après la question précédente, le vecteur x est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ_n si et seulement si $(x|u(x)) = \lambda_n \|x\|^2$. Notons a_{ij} les coefficients de la matrice de u dans la base \mathcal{B} . On a $(x|u(x)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (e_i | u(e_j))$ et puisque la base \mathcal{B} est orthonormale, on a $(e_i | u(e_j)) = a_{ij}$. Ainsi $(x|u(x)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$. De même, on a $(y|u(y)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i| |x_j|$. Or tous les coefficients a_{ij} sont positifs, et on a $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i| |x_j| \geq \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \lambda_n \|x\|^2$. On a également $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|^2$. Par conséquent, on obtient $(y|u(y)) \geq \lambda_n \|y\|^2$. Puisque λ_n est la plus grande des valeurs propres, on a, pour tout $z \in E$, $(z|u(z)) \leq \lambda_n \|z\|^2$ (voir au début). On a donc à la fois $(y|u(y)) \geq \lambda_n \|y\|^2$ et $(y|u(y)) \leq \lambda_n \|y\|^2$. D'où $(y|u(y)) = \lambda_n \|y\|^2$, et, d'après la première question, cela équivaut à y vecteur propre pour la valeur propre λ_n .

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k . On a de nouveau $(u(x)|x) = \lambda_k \|x\|^2 = \sum_{i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$. On obtient alors

$$|\lambda_k \|x\|^2| = \left| \sum_{i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j \right| \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_i x_j| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i| |x_j|,$$

puisque les coefficients a_{ij} sont positifs. Soit $y = \sum_{i=1}^n |x_i| e_i$. On a d'une part $(u(y)|y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i| |x_j| \geq |\lambda_k| \|x\|^2$, et d'autre part,

$(u(y)|y) \leq \lambda_n \|y\|^2$. On a également $\|y\|^2 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. On obtient alors $|\lambda_k| \|x\|^2 \leq (u(y)|y) \leq \lambda_n \|x\|^2$ et finalement $|\lambda_k| \leq \lambda_n$.

Exercice 24.27

Soit P une matrice orthogonale telle que $P^{-1} S P = P^T S P = D$ est diagonale de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On a, si $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(\Omega S) = \text{tr}(\Omega P D P^T) = \text{tr}((P^T \Omega P) D)$.

- la matrice $P^T \Omega P$ est orthogonale comme produit de 3 matrices orthogonales
- plus précisément, l'application $\Omega \mapsto P^T \Omega P$ est une bijection de $O_n(\mathbb{R})$ sur lui-même (attention ce n'est pas un espace vectoriel) : on vérifie que l'application réciproque est $\Omega' \mapsto P \Omega' P^T$ (qui va bien de $O_n(\mathbb{R})$ dans lui-même). Ainsi les matrices $P^T \Omega P$ décrivent $O_n(\mathbb{R})$, ce qui donne

$$\max\{\text{tr}(\Omega.S), \Omega \in O_n(\mathbb{R})\} = \max\{\text{tr}(\Omega.D), \Omega \in O_n(\mathbb{R})\}$$

- On a $\text{tr}(\Omega.D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Omega_{[i,i]} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$ avec égalité pour $\Omega = I_n$.
- On en déduit que $\max\{\text{tr}(\Omega.S), \Omega \in O_n(\mathbb{R})\} = \text{tr} S$.

Exercice 24.28

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . On a $1 + (\det A)^{1/n} = 1 + (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}$. Il existe P inversible telle que $A = P D P^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $I_n + A = P C P^{-1}$ avec $C = \text{diag}(1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_n)$. On est donc ramené à montrer que pour n réels positifs,

$$1 + (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k)^{1/n}.$$

On se doute bien que cela revient à montrer une bonne inégalité de convexité... le tout est de trouver laquelle. On essaie de se rapprocher de l'écriture classique. On remarque que dès que l'un des λ_i est nul alors l'inégalité est automatiquement vérifiée. On suppose qu'ils sont tous

strictement positifs. Cela devient équivalent à

$$\ln\left(1 + (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \lambda_k).$$

Pour se ramener à une écriture usuelle, on utilise simplement $\exp(\ln u) = u$ si $u > 0$. On note $\mu_i = \ln \lambda_i$ et on se ramène à montrer la propriété équivalente suivante :

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \exp(\mu_k)).$$

On note $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$. L'inégalité est alors

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\mu_k).$$

Il ne reste plus qu'à montrer que f est convexe. On dérive

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}} \text{ et } f''(x) = -\frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \geq 0$$

Exercice 24.29

1. La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale D à diagonale strictement positive. Il existe P orthonormale telle que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

→ Si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on note R la matrice $R = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ (car les λ_i sont positifs). On a $R^2 = D$. Alors

$$A = PDP^T = PR^2P^T = (PRP^T)(PRP^T) = C^2$$

avec $C = PRP^T$. Cette matrice est symétrique et ses valeurs propres sont également strictement positives.

→ On a $M^T = C^{-1T} B^T C^{-1T} = (C^T)^{-1} B (C^T)^{-1} = M$ puisque B et C sont symétriques. Soit X un vecteur colonne. On a, toujours puisque C est symétrique,

$$X^T M X = C^{-1} X^T B (C^{-1} X) = Y^T B Y$$

avec $Y = C^{-1} X$. Puisque B est symétrique positive, alors $X^T M X = Y^T B Y \geq 0$, pour tout vecteur colonne X . On en déduit que la matrice symétrique M est positive et que ses valeurs propres sont positives.

→ On a $B = CMC$, $\det B = \det C^2 \det M = \det A \cdot \det M$ et $A+B = C^2 + CMC = C(I_n + M)C$ d'où $\det(A+B) = \det C^2 \cdot \det(I_n + M)$. On est donc ramené à montrer que $1 + \det M \geq \det(I_n + M)$ avec M symétrique positive. On diagonalise M . Si on note μ_1, \dots, μ_n les valeurs propres

de M (toutes positives), on a $1 + \det M = 1 + \mu_1 \cdots \mu_n$ et $\det(I + M) = \prod_{k=1}^n (1 + \mu_i)$. Lorsqu'on développe ce produit, on fait apparaître

$1 + \mu_1 \cdots \mu_n$ et plein de termes tous positifs. On a donc le résultat.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la matrice $A_p = A + \frac{1}{p} I_n$ est symétrique définie positive. On a lors $\det(A_p + B) \geq \det A_p + \det B$. Par continuité du déterminant sur $M_n(\mathbb{R})$, lorsque p tend vers $+\infty$, on obtient $\det(A+B) \geq \det A + \det B$.

Exercice 24.30

1. La matrice A est symétrique réelle définie positive, elle est donc diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . On a $\det A = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ et $\text{tr} A = \sum_{k=1}^n \lambda_k$. Montrer que $(\det A)^{1/n} \leq \frac{\text{tr} A}{n}$, revient à montrer que

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \lambda_k \leq \ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \lambda_k\right)$ (toutes les valeurs propres sont strictement positives). Puisque $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$ et $1/n > 0$, c'est une conséquence de la concavité de la fonction logarithme.

2. Soit E_i le vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont la i -ème coordonnée est égale à 1, les autres coordonnées étant nulles. Alors $E_i^T A E_i = E_i^T C_i$ où C_i est la colonne i de A , et donc $E_i^T A E_i = a_{ii}$. Par conséquent $a_{ii} = E_i^T A E_i > 0$, puisque A est définie positive.

3. Soit X un vecteur colonne non nul. On a $X^T B X = X^T D A D X = D X^T A (D X) > 0$ puisque D est diagonale (donc symétrique) et que $D X$ n'est pas le vecteur nul. La matrice B est également symétrique ($B^T = D A^T D = B$). La matrice B est donc symétrique réelle définie positive. La multiplication de A par D à droite a pour effet de multiplier la colonne i par $\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$ et la multiplication à gauche a pour effet de multiplier la ligne i par $\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$. L'élément diagonal a_{ii} est donc multiplié par $1/a_{ii}$. La diagonale de la matrice B est donc constituée de

1. En appliquant la première formule de l'exercice, on obtient $\det B = \det(D)^2 \det A \leq \left(\frac{\text{tr} B}{n}\right)^n = 1$, et donc $\det A \leq \frac{1}{\det(D)^2} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

Exercice 24.31

1. → **Existence** La matrice $A = M^T M$ est symétrique définie positive. Il existe S symétrique définie positive telle que $A = S^2$. On pose alors $U = M S^{-1}$ de sorte que $M = U S$ et $U^T U = S^{-1T} M^T M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$ donc U est orthogonale.

→ **Unicité** Supposons $M = U S = U' S'$ avec U et U' orthogonales, S et S' symétriques définies positives. On a alors $M^T M = S^T U^T U S =$

S^2 et de même $M^T M = S'^2$, d'où $S^2 = S'^2$. On utilise la partie unicité de l'exercice sur la racine carrée pour obtenir $S = S'$, ce qui donne en remplaçant $U = U'$.

2. → Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^T M$. L'application f est continue et $O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par f du singleton $\{I_n\}$ qui est fermé, donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|MX\| = \|X\|$, donc la norme triple de M est égale à 1, donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné dans $M_n(\mathbb{R})$. On en déduit que c'est un compact.
- Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans S_n^+ qui converge vers A . Pour tout entier k et tout vecteur colonne X de \mathbb{R}^n , on a $A_k^T = A_k$ et $X^T A_k X \geq 0$, donc en faisant tendre k vers l'infini, on obtient $A^T = A$ et $X^T A X \geq 0$, d'où $A \in S_n^+$. Il en résulte que S_n^+ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ non inversible. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M . En appliquant la question 1), pour tout entier k , il existe U_k orthogonale et S_k symétrique définie positive telles que $M_k = U_k S_k$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, on peut extraire de la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(U_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $U \in O_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $S_{\phi(k)} = U_{\phi(k)}^{-1} M_{\phi(k)}$ converge vers la matrice $S = U^{-1} M$. Or S_n^+ est fermé, donc $S \in S_n^+$, et on a bien $M = US$.