CHAPITRE 26 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 26.4

→ L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace affine de dimension 2.

→ On détermine les solutions de l'équation homogène facilement : $y(x) = (Ax+B)e^{-2x}$.

→ Pour déterminer les solutions de l'équations, on utilise la méthode de variation des constantes - on cherche y sous la forme $y(x) = A(x)f(x) + B(x)g(x)$ où $f(x) = xe^{-2x}$ et $g(x) = e^{-2x}$ avec la condition supplémentaire $A'(x)f(x) + B'(x)g(x) = 0$. On reporte, on trouve $A'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $B'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ puis
$$y(x) = \left(Ax + B + \operatorname{argsh}(x) - \sqrt{1+x^2}\right)e^{-2x}.$$

Exercice 26.5

1. $y(x) = Ax + B(1 - \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|)$.
2. $y(x) = \dfrac{A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x)}{x}$, solutions sur $\mathbb{R}$: $y(x) = A\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}$
3. $y(x) = x^3(A\cos(x) + B\sin(x))$, solutions sur $\mathbb{R}$: espace de dimension 4.
4. $y(x) = A\operatorname{sh}(\frac{x^2}{2}) + B\operatorname{ch}(\frac{x^2}{2})$.
5. $y(x) = A\sin(\ln x) + B\cos(\ln x)$.
6. $y(x) = \dfrac{A\sin(x) + B\cos(x)}{x}$
7. $y(x) = \dfrac{A + Be^{-2x}}{x}$.

Exercice 26.6

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ forment un système fondamental des solutions définies sur I de l'équation homogène $y'' + y = 0$. On sait alors que les solutions de l'équation complète sont de la forme $y\colon\ x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$ où λ et μ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que
$$\forall x \in I,\ \left\{\begin{array}{rcl} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x & = & 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x & = & \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{array}\right.$$
On en déduit aisément $\lambda'(x) = -\cos x$ et $\mu'(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x + \dfrac{1}{\sin x}$, d'où $\lambda(x) = -\sin x + a$ et $\mu(x) = \cos x + \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + b$ où a et b sont deux constantes réelles.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions y définies sur I par
$$y(x) = (\sin x)\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + a\cos x + b\sin x$$
où a et b sont deux constantes réelles.

Exercice 26.8

On note $f = z - y$. On a $f(0) = 0$ et $f' \leqslant a(x)f$. On a deux options

→ On note g la fonction telle que $f' - a(x)f = g$. Cette fonction est négative. On résout l'équation différentielle en fonction de g est on montre que $g \leqslant 0$ donne $f \leqslant 0$.

→ On note A une primitive de a sur $\mathbb{R}^+$. On a, pour tout $x \geqslant 0$,
$$(f'(x) - a(x)f(x))e^{-A(x)} \leqslant 0.$$
L'expression obtenue est la dérivée de $h : x \mapsto f(x)e^{-A(x)}$. Cette dernière fonction h est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $h(0) = 0$, donc h est négative, ce qui donne $f \leqslant 0$.

Exercice 26.9

Posons $a = \|K\|$, et choisissons une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})$ telle que $\mathrm{k} = \frac{1}{a}K$. L'application $X \mapsto K \wedge X$ est une application linéaire dont la matrice, dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions X de $\mathbb{R}$ dans E avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et vérifiant $x' = -ay,\ y' = ax,\ z' = 0$. La fonction z est donc constante (les courbes intégrales sont situées dans des plans parallèles au plan xOy). Les relations $x' = -ay$ et $y' = ax$ montrent que x est de classe $\mathscr{C}^2$ et est solution de l'équation différentielle du second ordre $x'' = -a^2x$: il existe donc des constantes réelles A et B telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = A\cos at + B\sin at = \sqrt{A^2+B^2}\cos(at+\varphi)$. On a alors $y(t) = -\frac{1}{a}x'(t) = \sqrt{A^2+B^2}\sin(at+\varphi)$. Les courbes intégrales sont donc des cercles d'axe Oz.

Exercice 26.10

1. On peut se ramener à une équation d'ordre 2 :
   - → Le plus simple est d'arriver à A^2. Si X est solution alors $X' = AX$ d'où $X'' = AX' = A^2X = -X$. On a donc $X'' + X = 0$. On résout composante par composante (par exemple). Il existe donc deux vecteurs U et V de taille $2n$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = U\cos(t) + V\sin t$.
   - → Puisqu'on n'a pas raisonné par équivalence, on cherche parmi ces solutions lesquelles le sont vraiment. Si $X(t) = U\cos(t) + V\sin t$, alors $X'(t) = -U\sin(t) + V\cos t$ et $AX(t) = (AU)\cos t + (AV)\sin t$. Par indépendance linéaire des fonctions sinus et cosinus, c'est équivalent à $AU = V$ et $AV = -U$. Or $AU = V$ équivaut (en multipliant par A inversible car $A^2 = -I_{2n}$), $A^2U = AV$ donc $-U = AV$. Les deux conditions sont équivalentes.
   - → Ainsi X est solution si et seulement s'il existe $U \in M_{2n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X(t) = U\cos t + AU\sin t = (\cos t.I_{2n} + \sin t.A)U$ (on retrouve un espace de solutions de dimension $2n$).
2. On peut utiliser plus simplement l'exponentielle. On vérifie par récurrence que $A^{2p} = (-1)^pI_{2n}$ et $A^{2p+1} = (-1)^pA$. On a alors
$$\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} t^{2p} I_{2n} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1} A = (\cos t) I_{2n} + (\sin t) A.$$
   Les solutions sont sont la forme $t \mapsto ((\cos t) I_{2n} + (\sin t) A)\, X_0$.

Exercice 26.12

1. Un système fondamental des solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ est constitué des fonctions $x \mapsto \mathrm{ch}\, x$ et $x \mapsto \mathrm{sh}\, x$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation des constantes. On cherche une solution sous la forme $y : x \mapsto u(x)\mathrm{ch}\, x + v(x)\mathrm{sh}\, x$ où u et v sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait le système
$$\begin{cases} u'(x)\mathrm{ch}\, x + v'(x)\mathrm{sh}\, x = 0 \\ u'(x)\mathrm{sh}\, x + v'(x)\mathrm{ch}\, x = g(x) \end{cases}.$$
   On en déduit que $u'(x) = -\mathrm{sh}\, x\, g(x)$ et $v'(x) = \mathrm{ch}\, x\, g(x)$. Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - y = g$ est l'ensemble des fonctions
$$y : x \mapsto -\mathrm{ch}\, x \int_0^x \mathrm{sh}\,(t)\; g(t)\, dt + \mathrm{sh}\, x \int_0^x \mathrm{ch}\,(t)\; g(t)\, dt + a\mathrm{ch}\, x + b\mathrm{sh}\, x$$
   où (a, b) appartient à $\mathbb{R}^2$. Cela peut se réécrire
$$y(x) = \int_0^x \mathrm{sh}\,(x-t) g(t)\, dt + a\mathrm{ch}\, x + b\mathrm{sh}\, x.$$
2. En particulier, lorsque g est la fonction définie sur $g(x) = \frac{2}{\mathrm{ch}^3 x}$, on a $\displaystyle\int_0^x \mathrm{sh}\,(t) g(t)\, dt = \left[-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = \tanh^2 x$, et $\displaystyle\int_0^x \mathrm{ch}\,(t) g(t)\, dt = [2\mathrm{th}\, t]_0^x = 2\mathrm{th}\, t$. Cela donne Alors $\displaystyle -\mathrm{ch}\, x \int_0^x \mathrm{sh}\,(t) g(t)\, dt + \mathrm{sh}\, x \int_0^x \mathrm{ch}\,(t) g(t)\, dt = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}\, x}$. L'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - y = \dfrac{2}{\mathrm{ch}^3 x}$, est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}\, x} + a\mathrm{ch}\, x + b\mathrm{sh}\, x$ où (a, b) appartient à $\mathbb{R}^2$.
3. On note $y_0(x) = \dfrac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}\, x}$. Considérons $z = f - y_0$ où f vérifie l'inéquation avec les conditions initiales. Alors $z(0) = z'(0) = 0$ et $z'' - z \geqslant 0$. Posons $g = z'' - z$. Alors z est solution de $z(0) = z'(0) = 0$ et $z'' - z = g$. On obtient alors $z(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{sh}\,(x-t) g(t)\, dt$. Puisque $\mathrm{sh}\,(x-t)$ est du signe de $x - t$ et donc du signe de x, on a $z(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela donne le résultat.

Exercice 26.13

1. Soit f une solution bornée de (E), et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. On a alors $|f''| \leqslant M|q|$, ce qui montre que f'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $f'(x) = f'(0) + \displaystyle\int_0^x f''(u)\, du$, on en déduit que f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Supposons $\ell \neq 0$, alors $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} l$ et $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(u)\, du$ va tendre vers $\pm\infty$ en $+\infty$ (suivant le signe de ℓ).
2. $W = fg' - f'g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et $W' = fg'' - f''g = -qfg + qfg = 0$. Ainsi W est constant.
3. Supposons toutes les solutions de (E) bornées. Soit (f, g) un système fondamental de solutions de (E). Posons $W = fg' - f'g$. W est une constante, et comme f et g sont bornées, f' et g' tendent vers 0 en $+\infty$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 0$, et donc que $W = 0$, ce qui est absurde (le wronskien d'un système fondamental de solutions est non nul).

Exercice 26.14

1. (a) Si $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$, alors y est l'unique solution du problème de Cauchy associé et puisque la fonction nulle convient, la fonction y est identiquement nulle. On donc $y'(x_0) \neq 0$. Supposons $y'(x_0) > 0$. Puisque y' est continue, la fonction y' reste strictement positive sur un voisinage de x_0. Il existe $\alpha > 0$ tel que $y'(x) > 0$ sur $]x_0 - \alpha, a_0 + \alpha[$. La fonction y est donc strictement croissante sur cet intervalle

et ne s'annule qu'en x_0.

(b) Supposons que y admet un nombre infini de zéros dans $[a,b]$. On peut alors construire une suite x_n de zéros de y, deux à deux distincts et dans $[a,b]$. Puisque $[a,b]$ est compact, on peut extraire de (x_n) une suite convergente. On note $z_n = x_{\varphi(n)}$ les termes de cette suite extraite. Les termes sont toujours 2 à 2 distincts et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \beta \in [a,b]$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y(z_n) = 0$ donc, par continuité de y, $y(\beta) = 0$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que $y(x) \neq 0$ si $0 < |x-\beta| < \alpha$. Il n'y a donc aucun zéro de y dans $]\beta-\alpha, \beta[\cup]\beta, \beta+\alpha[$. Au maximum un seul terme de (z_n) vaut β donc, il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|z_n - \beta| \geqslant \alpha$. Cela contredit le fait que z_n converge vers β.

2. (a) Soit $W = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z$. On a $W' = yz'' - y''z + (y'z' - y'z') = y(-pz' - q) - z(-py' - q) = -pW$. Le wronskien vérifie l'équation $W' + qW = 0$. Si on note Q une primitive q sur $\mathbb{R}$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $W = C\exp(-Q)$.

(b) Si y et z ont un zéro commun x_0, alors $W(x_0) = 0$ donc W est identiquement nul et y et z sont proportionnelles. C'est donc exclu.

(c) Soit α et β deux zéros consécutifs de y. La fonction y ne s'annule donc pas sur $]\alpha, \beta[$. On étudie $f = \frac{z}{y}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle et $z' = \dfrac{yz' - zy'}{y^2} = \dfrac{W_{y,z}}{y^2}$. Puisque W garde un signe constant, la fonction f est strictement monotone. Puisque les limites de f en α et β sont infinies (y est de limite nulle et z de limite finie non nulle), ces deux limites sont de signe opposé et f est une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f admet donc une unique racine dans $]\alpha, \beta[$ si bien que z admet un unique zéro dans $]\alpha, \beta[$.

Exercice 26.16

On considère l'équation différentielle $(E) : X' = A(t)X$. Soit X une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ solution de l'équation, alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A(t)X(t)$ et $X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T)$. Si on note $Z(t) = X(t+T)$,alors $Z'(t) = X'(t+T)$ et Z est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel de dimension n. L'application $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ qui à X associe la fonction $t \mapsto X(t+T)$ est linéaire et c'est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. Puisque $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, φ admet une valeur propre. Il existe donc X non nul vérifiant l'équation. Il reste à justifier que $\lambda \neq 0$. Il suffit de prouver que φ est injective : si $\varphi(X)$ est la fonction nulle alors immédiatement X est aussi la fonction nulle.

Exercice 26.17

1. On cherche des solutions DSE sous la forme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On trouve la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_{n+1} + a_n = 0$ puis la relation $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série entière associée a un rayon de convergence infini et vérifie bien l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ et $g'(x) = f'^2(x) + 2xf'(t)f''(x) + 2f'(x)f(x) = f'(x)\left(2xf''(x) + f'(x) + 2f(x)\right) - f'^2(x) \leqslant 0$. La fonction g est donc décroissante et positive. Elle admet une limite finie en $+\infty$. La fonction est également majorée par sa valeur en 0 qu'on note A. On a alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f^2(x) \leqslant A$ et $xf'^2(x) \leqslant A$. On en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et que $f'^2(x) \leqslant \frac{A}{x}$ donc tend vers 0 en $+\infty$.
3. Les fonctions sont continues sur $[1, +\infty[$. Avec les majorations précédentes, $\left|f(x)f'(x)\frac{1}{x}\right| \leqslant \sqrt{A}.\dfrac{\sqrt{A}}{x^{1/2}}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$. La fonction est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.
   Pour la seconde c'est moins immédiat. On repart de la fonction g. Soit $X > 1$, on a
   $$g(X) - g(1) = \int_1^X g'(t)\mathrm{d}t = -\int_1^X f'^2(t)\mathrm{d}t = -\left[f(t)f'(t)\right]_1^X + \int_1^X f(t)f''(t)\mathrm{d}t = f(1)f'(1) - f(X)f'(X) - \int_1^X f(t)\frac{f(t)+f'(t)}{t}\mathrm{d}t$$
   Cela permet d'obtenir
   $$\int_1^X \frac{f^2(t)}{t}\mathrm{d}t = f(1)f'(1) - f(X)f'(X) - \int_1^X \frac{f(t)f'(t)}{t}\mathrm{d} + g(1) - g(X)$$
   Chaque terme à droite de l'égalité admet une limite en $+\infty$ (ff' tend vers 0 car f est bornée et f' tend vers 0). On en déduit que $\displaystyle\int_1^X \frac{f^2(t)}{t}\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. La fonction intégrée étant positive, elle est intégrable sur $[1, +\infty[$.
4. En reprenant $g(X) - g(1) = -\displaystyle\int_1^X f'^2(t)\mathrm{d}t$, on montre que f'^2 est intégrable sur $[1, +\infty[$. On a alors $\dfrac{g(x)}{x} = f'^2(x) + \dfrac{f^2(x)}{x}$. Avec la question précédente, $x \mapsto g(x)x$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Si $\ell \neq 0$, on a $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{x}$ et la fonction n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Cette contradiction donne bien que $\ell = 0$.

Exercice 26.18

On sait, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, que l'ensemble des solutions d'une telle équation est une espace vectoriel de dimension n. On cherche des solutions sous la forme $y : t \mapsto e^{\alpha t}$. Cette fonction est solution si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha^k \omega^{n-k}\right) e^{\alpha z} = 0$ ce qui équivaut à α solution de
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \omega^{n-k} = 0 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^k = 0$$

Lorsque $\alpha/\omega = 1$, la somme n'est pas nulle. Dans le cas contraire, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^k = \frac{1-(\alpha/\omega)^{n+1}}{1-\alpha/\omega} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^{n+1} = 1 \text{ avec } \frac{\alpha}{\omega} \neq 1$$

On obtient n solutions distinctes $\alpha = \omega\theta_k$ où θ_k est l'une des racines $n+1$-ème de l'unité (différente de 1). On a ainsi obtenu n solutions pour l'équation différentielle $f_k : t \mapsto \exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\omega t\right)$ pour $k \in [\![1\,;n]\!]$. Ces n fonctions sont linéairement indépendantes (avec un déterminant de Vandermonde par exemple ou en les voyants comme des fonctions propres pour la dérivation associées à des valeurs propres 2 à 2 différentes). On a donc une base de l'ensemble des solutions.

Exercice 26.19

Si y est une telle solution alors y est continue. On en déduit que y' est continue donc que y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors y' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc y est de classe $\mathscr{C}^2$. Cela permet de dériver une fois de plus : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y''(x) = -y'(\pi - x) = -y(x)$. Ainsi y est solution de $y'' + y = 0$. Il existe des constantes A et B telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = A\cos x + B\sin x$. Réciproquement soit y une telle fonction. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = -A\sin x + B\cos x$ et $y(\pi - x) = -A\cos x + B\sin x$. On a égalité si et seulement si $B = -A$ et $-A = B$ (la famille $(\sin, \cos)$ est libre). On a donc $y(x) = A(\cos x - \sin x)$.

Exercice 26.20

1. On note $H(t) = \int_a^x v(t)y(y)\,dt$ et V la primitive de v qui s'annule en 0. On a $H'(x) = v(x)y(x)$. Puisque v est positive, on a

$$v(x)y(x) \leqslant v(x)\left(\lambda + H(x)\right),$$

ce qui donne, pour $x \in I$, $H'(x) - v(x)H(x) \leqslant \lambda v(x)$. On multiplie par $\exp\circ(-V)$ afin de faire apparaître la dérivée d'un produit. Pour $x \in I$,

$$\left(H'(x) - v(x)H(x)\right)\exp(-V(x)) \leqslant \lambda v(x)\exp(-V(x)).$$

On intègre cette relation entre a et z, pour $z \in I$, cela donne (v est la dérivé de V)

$$\left[H(x)\exp(-V(x))\right]_a^z \leqslant \left[-\lambda\exp(-V(x))\right]_a^z.$$

On a $H(a) = V(a) = 0$, ce qui donne

$$H(z)\exp(-V(z)) \leqslant \lambda\left(1 - \exp(-V(z))\right),$$

puis, en remultipliant par $\exp(V(x)$,

$$H(z) \leqslant \lambda\exp(V(z)) - \lambda \text{ ou encore } H(z) + \lambda \leqslant \lambda\exp(V(z)).$$

L'inéquation de départ est $y(x) \leqslant \lambda + H(x)$, ce qui donne $y(x) \leqslant \lambda\exp\left(\int_a^x v(t)\,dt\right)$.

2. Afin de dériver, on développe $\sin(x-t) = \sin x\cos t - \sin t\cos x$, ce qui donne

$$g(x) = f(x) + \sin(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right) - \cos(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right).$$

C'est alors plus simple de dériver. On obtient

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + \cos(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right) + \sin(x)\left(\varphi(x)f(x)\cos(x)\right) \\ &\quad + \sin(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right) - \cos(x)\left(\varphi(x)f(x)\sin(x)\right) \\ &= f'(x) + \cos(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right) + \sin(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right) \end{aligned}$$

On redérive pour obtenir

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(x) - \sin(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right) + \cos(x)\left(\varphi(x)f(x)\cos(x)\right) \\ &\quad + \cos(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right) + \sin(x)\left(\varphi(x)f(x)\sin(x)\right) \\ &= f'(x) + \cos(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right) + \sin(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right) \\ &= f''(x) - \sin(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right) + \cos(x)\left(\int_0^x \varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right) \\ &\quad + \varphi(x)f(x) \end{aligned}$$

Il vient alors $g''(x) + g(x) = f''(x) + f(x) + \varphi(x)f(x) = f''(x) + (1+\varphi(x))f(x) = 0$. La fonction g est donc combinaison de sinus et cosinus. Elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Il existe un réel a tel que $|g| \leqslant a$. On a alors

$$f(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)f(t)\,dt$$

ce qui donne, pour $x \geqslant 0$,
$$|f(x)| \leqslant a + \int_0^x |\sin(x-t)||\varphi(t)||f(t)|\,dt \leqslant a + \int_0^x |\varphi(t)||f(t)|\,dt.$$
On applique le lemme précédent avec $y = |f|$ et $v = |\varphi - \geqslant 0$. On obtient
$$|f(x)| \leqslant a \exp\left(\int_0^x |\varphi(t)|\,dt\right),$$
et puisque φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$,
$$|f(x)| \leqslant a \exp\left(\int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt\right).$$
La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 26.21

1. (a) Le polynôme de N est un diviseur de X^p puisque $N^p = 0$. Or X^{p-1} n'est pas annulateur donc le polynôme minimal de N est X^p. La matrice N n'a donc pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à $p-1$. La famille $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est libre.
   (b) En utilisant le fait que $\exp(t\lambda I_n + tN) = \exp(t\lambda I_n).\exp(tN)$ (car I_n et N commutent), on a
$$\exp(t(\lambda I_n + N)) = \exp(t\lambda)\exp(tN) = \exp(t\lambda)\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\lambda t} \frac{t^k}{k!} N^k.$$
2. (a) Le polynôme minimal de A a exactement comme racines complexes les valeurs propres de A. On a donc un polynôme minimal $P = (X-\lambda)^p$ pour un certain entier p. On a alors $(A - \lambda I_n)^p = 0$ donc N est nilpotent.
   (b) Les solutions sont sous la forme $X(t) = \exp(tA)X_0$ (où $X_0 = X(0)$), donc s'écrive, avec p l'indice de nilpotence de N,
$$X(t) = \exp(t(\lambda I_n + N))X_0 = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\lambda t} \frac{t^k}{k!} N^k X_0.$$
   Considérons X_0 un vecteur qui n'est pas dans $\ker N^{p-1}$ (possible car $N^{p-1} \neq 0$). On a alors
$$\|X(t)\| \underset{t \to +\infty}{\sim} \left| e^{\lambda t} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \right| \left\| N^{p-1} X_0 \right\|.$$
   On a $\left|e^{\lambda t}\right| = \exp((Re(\lambda)t)$. Si $\Re(\lambda) \neq 0$, alors l'une des limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $\|X(t)\|$ est infinie. On doit donc avoir pour commencer $\Re(\lambda) = 0$ et λ est imaginaire pur. On a alors
$$\|X(t)\| \underset{t \to +\infty}{\sim} \left| \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \right| \left\| N^{p-1} X_0 \right\|.$$
   Pour que la norme reste bornée, on doit avoir $p = 1$. Ainsi λ est imaginaire pur et $(A - \lambda I_n)^1 = 0$, donc $A = \lambda I_n$.
3. (a) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et $E = \mathbb{C}^n$. On note $F_k = \ker(\lambda_k \mathrm{Id} - f)^{m_k}$. Ce sous-espace est stable par f. On considère g_k l'endomorphisme induit par f sur F_k. Soit $z \in F_k$ et x la solution de $x' = g_k(x)$ avec $x(0) = z$. Cette fonction à valeurs dans F_k vérifie l'équation $x' = f(x)$ donc est bornée et ce, pour tout $z \in F_k$. L'endomorphisme g_k est exactement du type précédent, donc il existe $r_k \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_k = ir_k$ et $m_k = 1$. De plus $E = \oplus_{k=1}^{\ell} F_k = \oplus_{k=1}^{\ell} \ker(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$. L'endomorphisme f est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures. Pour la réciproque, si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (pas forcément distinctes de A) et $X_1, \dots, X_n$ une base de vecteurs propres, toute solution de $X' = AX$ s'écrit $X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t} X_k$. Puisque $\lambda_k \in i\mathbb{R}$, les solutions sont bien bornées (le module de $e^{\lambda_k t}$ est 1).
   (b) On dérive $\|X\|^2 = {}^tX.X$ et on tombe sur ${}^tX(t)(A + {}^tA)X(t) = 0$. La norme de toute solution est constante.
   (c) On en déduit que A est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.