

CHAPITRE 27 - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 27.1

On note $f : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ et $g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_p(x_1, \dots, x_n))$. On a alors

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto (g_1(f_1(x), \dots, f_n(x)), \dots, g_p(f_1(x), \dots, f_n(x))) \end{cases}$$

D'après la règle de la chaîne, on a, pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$,

$$(g \circ f)'_i(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f_1(x), \dots, f_n(x))$$

où $(g \circ f)_i$ désigne la i -ème composante de $g \circ f$.

Exercice 27.2

- les fonctions polynomiales $(x, y) \mapsto 4xy(x^2 - y^2)$ et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sont de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ et $x^2 + y^2$ ne s'y annule pas. Par opérations usuelles, f est de classe \mathcal{C}^2 sur le domaine.
- Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(4x^3 - 12xy^2)(x^2 + y^2) - 8xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{4x^5}{x^4} = 4x$. Par définition,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

- On a alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h} = 4.$$

Un calcul similaire donne $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -4$. La fonction n'est donc pas de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 (sinon on pourrait permuter l'ordre de dérivation).

Exercice 27.3

- L'application va bien de U dans U et elle est de classe \mathcal{C}^∞ . Soit $(u, v) \in U$. On résout $\varphi(x, y) = (u, v)$:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ x^2 + y^2 = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ux \\ x^2(1 + u^2) = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{1 + u^2}} \\ y = u\sqrt{\frac{v}{1 + u^2}} \end{cases}$$

les équivalences sont obtenues puisque tous les termes sont strictement positifs. L'application est bijective, sa réciproque est

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} U & \rightarrow U \\ (u, v) & \mapsto \left(\sqrt{\frac{v}{1 + u^2}}, u\sqrt{\frac{v}{1 + u^2}} \right) \end{cases}$$

L'application φ^{-1} est également de classe \mathcal{C}^∞ sur U .

- On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial u} + 2x \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial u} + 2y \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y^2) \frac{\partial g}{\partial v} = 2v \frac{\partial g}{\partial v}$$

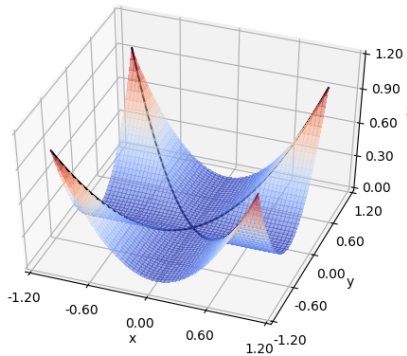
On est donc amené à résoudre $2v^2 \frac{\partial g}{\partial v} = \lambda g$ soit $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\lambda}{2v} g$ sur U . Cela donne $g(u, v) = A(u) \exp(\frac{\lambda}{2} \ln v) = A(u) v^{\lambda/2}$. Cela donne

$$f(x, y) = A\left(\frac{y}{x}\right) (x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Si f est \mathcal{C}^2 sur U , alors $y \mapsto f(1, y) = A(y)(1 + y^2)^{\lambda/2}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et $A(y) = f(1, y)(1 + y^2)^{-\lambda/2}$ donc A est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* . Réciproquement sur A est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* alors f l'est sur U .

Exercice 27.4

1. Sur les ouverts définis par les relations $|x| < |y|$ et $|x| > |y|$ la fonction est continue. Soit $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la continuité de f en (a, a) . On a $f(a, a) = a^2$. On propose deux solutions (on peut mélanger leurs idées) l'une basée sur les suites, l'autre sur des majorations :
- Soit (x_n, y_n) une suite qui converge vers (a, a) . On a $f(x_n, y_n) = x_n^2$ si $x_n^2 < y_n^2$ et $f(x_n, y_n) = y_n^2$ si $y_n^2 \leq x_n^2$. On peut remarquer que $f(x_n, y_n) = \min(x_n^2, y_n^2)$. Puisque $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, on a $f(x_n, y_n) = \frac{x_n + y_n - |x_n - y_n|}{2}$ qui tend vers $2a^2/2 = a^2$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Soit (x, y) proche de (a, a) . On peut supposer que $|x| \leq 1 + |a|$ et de même pour y . Si $|x| < |y|$, alors on a $|f(x, y) - f(a, a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| \leq (1 + 2|a|)|x - a|$. On a une majoration similaire pour $f(x, y)$ si $|x| \leq |y|$. On a alors $|f(x, y) - f(a, a)| \leq (1 + 2|a|) \max(|x - a|, |y - a|) \leq (1 + 2|a|)(|x - a| + |y - a|)$ et ainsi la limite est nulle en (a, a) .
2. On a f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 privé des droites $y = \pm x$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ si $|x| < |y|$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ si $|x| \geq |y|$. Notamment en (a, a) on obtient des limites différentes suivant comment on se rapproche de a . Par exemple si $a > 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(a + h, a) = 0$ si $h > 0$ et $2(a + h)$ si $h < 0$. Les limites en 0 à droite et à gauche (par rapport à h) sont différentes.



Exercice 27.5

On pose $\psi(x) = \|x\|^2$ et $\varphi(x) = 1/\psi(x)$. Comme $\psi(x + h) = \psi(x) + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2$, ψ est différentiable, et $d\psi(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$. Il en résulte que φ est différentiable, et on a pour tout x non nul et $h \in E$, $d\varphi(x)(h) = -\frac{d\psi(x)(h)}{\psi(x)^2} = -\frac{2\langle x, h \rangle}{\|x\|^4}$.

$$\begin{aligned} f(x + h) &= \varphi(x + h)(x + h) = (\varphi(x) + d\varphi(x)(h) + o(h))(x + h) \\ &= f(x) + \underbrace{d\varphi(x)(h)x + \varphi(x)h}_{\text{linéaire par rapport à } h} + o(h) \end{aligned}$$

Il en résulte que f est différentiable et $df(x)(h) = d\varphi(x)(h)x + \varphi(x)h$, d'où

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \forall h \in E, df(x)(h) = -\frac{2\langle x, h \rangle x}{\|x\|^4} + \frac{h}{\|x\|^2}.$$

Exercice 27.7

1. On applique le théorème de dérivabilité sous le signe somme pour obtenir $M'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) d\theta$.

2. dérivation composée

3. On note $h(r) = rM'(r) = \int_0^{2\pi} r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) d\theta$. On montre comme à la première question que

$$h'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) (r, \theta) d\theta = -\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) d\theta = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \right]_0^{2\pi} = 0$$

par périodicité des fonctions de θ .

4. Ainsi h est constante. Puisque f est continue en 0, on a $rM'(r) = h(0) = 0$ pour tout r . On en déduit que M est constante. Or $M(0) = 2\pi f(0, 0)$. On trouve notamment, pour tout $r > 0$,

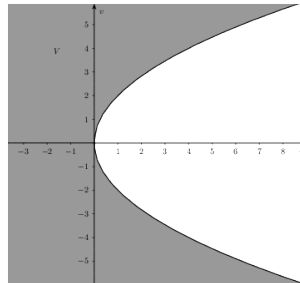
$$f(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

Exercice 27.8

- On démontre par récurrence sur k que $(M+H)^k = M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2)$. On utilise ensuite la linéarité de la trace et la propriété $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour en déduire que l'application $f_k : M \mapsto \text{tr}(M^k)$ est différentiable et que $df_k(M)(H) = k \text{tr}(HM^{k-1})$. Il en résulte que f est différentiable, et que $\forall M, H, df(M)(H) = (k \text{tr}(HM^{k-1}))_{1 \leq k \leq n}$.
- Soit p le degré du polynôme minimal de M (noté μ_M). On sait par le théorème de Cayley-Hamilton que $p \leq n$ et que $\forall k \geq p, M^k \in \text{Vect}(I, \dots, M^{p-1})$. On pose $\varphi_k(H) = k \text{tr}(HM^{k-1})$. Les formes linéaires $\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n$ sont donc combinaisons linéaires de $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. Supposons une relation de liaison de la forme $\sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i = 0$. On a alors $\forall H \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(H(\sum_{i=1}^p \alpha_i M^{i-1})) = 0$. En choisissant successivement pour H les matrices élémentaires E_{ij} , on en déduit que $\sum_{i=1}^p \alpha_i M^{i-1} = 0$ donc tous les α_i sont nuls, car le polynôme minimal de M est de degré p . On sait que si les formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont indépendantes, alors l'application $H \mapsto (\varphi_1(H), \dots, \varphi_p(H))$ est surjective, donc de rang p , donc son noyau est de dimension $n^2 - p$. Or son noyau est le même que celui de $df(M)$, donc $df(M)$ est également de rang p .

Exercice 27.9

- Soit $(x, y) \in U$. On pose $(u, v) = \phi(x, y)$, de sorte que x et y sont les racines du trinôme $X^2 - vX + u$, dont le discriminant $v^2 - 4u$ est strictement positif. On pose $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, v^2 - 4u > 0\}$. Il s'agit de l'extérieur de la parabole d'équation $v^2 - 4u = 0$.



Soit $(u, v) \in V$. On note x et y les racines (distinctes) du trinôme précédent, x étant la plus grande, ce qui entraîne que $(u, v) = \phi(x, y)$. On en déduit que ϕ est une bijection de U sur V . Le jacobien de ϕ en (x, y) est égal à $\begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y - x < 0$. Il ne s'annule pas sur U , donc ϕ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de U sur V .

- On pose $g = f \circ \phi^{-1}$, de sorte que g est de classe \mathcal{C}^1 sur V si, et seulement si, f est de classe \mathcal{C}^1 sur U . On a alors $f(x, y) = g(xy, x+y)$. Par la formule de dérivation composée, on obtient pour $(x, y) \in U$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x+y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x+y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x+y) \end{aligned}$$

L'équation (*) équivaut à $(y-x) \frac{\partial g}{\partial u} + 3(x-y)g = 0$, d'où $\frac{\partial g}{\partial u} = 3g$.

- On résout l'équation ci-dessus à v fixé : il existe un réel $A(v)$ tel que pour tout réel u tel que $(u, v) \in V$, on a $g(u, v) = A(v)e^{3u}$. Pour montrer que A est bien de classe \mathcal{C}^1 , on écrit la relation précédente pour $u = -1$ (ce qui permet d'obtenir toutes les valeurs de v - voir dessin ci-dessus), ce qui donne, pour tout $v \in \mathbb{R}$, $g(-1, v) = A(v)e^{-3}$, c'est-à-dire $A(v) = g(-1, v)e^3$. La fonction A est donc \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On en déduit que les solutions de (*) sont les fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto A(x+y)e^{3xy} \text{ où } A \text{ décrit } \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Exercice 27.10

- on vérifie les différentes propriétés nécessaires :
 - les ensembles sont ouverts en tant qu'image réciproque de l'ouvert \mathbb{R}_+^* par les applications continues sur \mathbb{R}^2 , $(x, y) \mapsto y-x$ et $(u, v) \mapsto u+2v^2$.
 - L'application est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur U .
 - elle est à valeurs dans V : soit $(u, v) = \phi(x, y)$, on a $u+2v^2 = x^2 - 2xy - y^2 + 2y^2 = (x-y)^2 > 0$.
 - l'application est bijective : soit $(u, v) \in V$, on cherche $(x, y) \in U$ tel que $(u, v) = \phi(x, y)$. Cela revient à résoudre

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 &= u \\ y &= v \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2xv - (v^2 + u) &= 0 \\ y &= v \end{cases}$$

On résout l'équation du second degré. Son discriminant est $\Delta = 4v^2 + 4(v^2 + u) = 4(u + 2v^2) > 0$. On obtient deux solutions $x =$

$v \pm \sqrt{u+2v^2}$. Puisque $y = v$, il n'y a qu'une seule solution avec $x < y$, à savoir $x = v - \sqrt{u+2v^2}$. On a donc $\varphi^{-1}(u, v) = (v - \sqrt{u+2v^2}, v)$. Cette application est \mathcal{C}^1 sur V (puisque $u+2v^2$ est strictement positif).

2. On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$ sur V . On a $f = g \circ \varphi$ sur U . On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}(2x-2y) + \frac{\partial g}{\partial v} \times 0 = 2(x-y) \frac{\partial g}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}(-2x-2y) + \frac{\partial g}{\partial v} \times 1 = -2(x+y) \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

On a ensuite $(x+y) \frac{\partial f}{\partial x} + (x-y) \frac{\partial f}{\partial y} = (x-y) \frac{\partial g}{\partial v}$, c'est-à-dire, pour tout $(x, y) \in U$,

$$(x+y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x-y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x-y) \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(x, y)).$$

L'équation est équivalente à, pour tout $(u, v) \in V$, $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$. Pour finir la résolution, on regarde le domaine V - son intersection avec $u = u_0$ donne soit une droite si $u \geq 0$, soit deux demi-droites si $u < 0$ - cela donne une solution sous la forme $g(u, v) = A_k(u)$ avec différentes fonctions A_k suivant les domaines.

Exercice 27.12

- On s'intéresse à $\varphi : (u, v) \mapsto (x = u^2 + v^2, y = u + v)$: on a $2x - y^2 = u^2 + v^2 - 2uv = (u - v)^2$ et cette quantité est strictement positive (pour être dans V) si $u \neq v$. On cherche un antécédent à $(x, y) \in V$. On résout $(x = u^2 + v^2, y = u + v)$ soit $(v = y - u, 2u^2 - 2uy + y^2 - x = 0)$. Le discriminant est $\Delta = 4(2x - y^2) > 0$ ce qui donne deux solutions pour u et deux couples possibles pour (u, v) : l'un est $\left(\frac{y + \sqrt{2x - y^2}}{2}, \frac{y - \sqrt{2x - y^2}}{2} \right)$ et l'autre est le couple symétrique $\left(\frac{y - \sqrt{2x - y^2}}{2}, \frac{y + \sqrt{2x - y^2}}{2} \right)$. Par rapport à la condition $u \neq v$, on se rend compte que l'un des couples est dans le domaine $u > v$ et l'autre dans le domaine $u < v$. On choisit l'un des deux (les calculs suivants seront les mêmes) par exemple $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u > v\}$. Les applications φ et φ^{-1} sont de classe \mathcal{C}^2 sur U et V (respectivement).
- On pose $g = f \circ \varphi$. Afin de déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et autres, on utilise la matrice jacobienne et surtout son inverse. On a

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = (J_\varphi)^{-1} = \frac{1}{2(u-v)} \begin{pmatrix} 1 & -2v \\ -1 & 2u \end{pmatrix}$$

On calcule les dérivées :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{1}{2(u-v)} - \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{1}{2(u-v)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{-v}{u-v} - \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{u}{u-v}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{1}{2(u-v)} - \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{1}{2(u-v)} \right) \frac{1}{2(u-v)} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{1}{2(u-v)} - \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{1}{2(u-v)} \right) \frac{-1}{2(u-v)} \\ &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{2(u-v)} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{-1}{2(u-v)^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot \frac{-1}{2(u-v)} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{1}{2(u-v)^2} \right) \frac{1}{2(u-v)} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot \frac{1}{2(u-v)} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{1}{2(u-v)^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \frac{-1}{2(u-v)} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{-1}{2(u-v)^2} \right) \frac{-1}{2(u-v)} \\ &= \frac{1}{4(u-v)^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{1}{4(u-v)^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \frac{1}{2(u-v)^2} - \frac{1}{2(u-v)^3} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{2(u-v)^3} \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

On a de même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-v}{2(u-v)^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{u}{2(u-v)^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \frac{u+v}{2(u-v)^2} + \frac{u+v}{2(u-v)^3} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{u+v}{2(u-v)^3} \frac{\partial g}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{v^2}{(u-v)^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{u^2}{(u-v)^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \frac{-2uv}{(u-v)^2} - \frac{u^2 + v^2}{(u-v)^3} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{u^2 + v^2}{(u-v)^3} \frac{\partial g}{\partial v}$$

On calcule alors l'ensemble en remplaçant $y^2 - x$ par $2uv$:

$$\begin{aligned} & 2(y^2 - x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^2 + x \\ &= \frac{1}{4(u-v)^2} (4uv - 4v(u+v) + 4v^2) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{1}{4(u-v)^2} (4uv - 4u(u+v) + 4u^2) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{1}{2(u-v)^2} (-4uv + 2(u+v)^2 - 4uv) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \\ &+ \frac{1}{2(u-v)^3} (-4uv + 2(u+v)^2 - 2(u^2 + v^2)) \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{2(u-v)^3} (4uv - 2(u+v)^2 + 2(u^2 + v^2)) \frac{\partial g}{\partial v} - 2uv \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - 2uv \end{aligned}$$

On est donc amené à résoudre $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 2uv$ sur U (qui est convexe). Cela donne $\frac{\partial g}{\partial v} = u^2 v + a(v)$ et $g(u, v) = \frac{1}{2} u^2 v^2 + A(v) + B(u)$.
remarque : on peut vérifier le calcul en dérivant dans l'autre sens (maintenant qu'on a le résultat) :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 2u \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot 2v + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot 1 \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot 2v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot 1 \right) = 4uv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(u+v) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ce qui redonne bien $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 2(y^2 - x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exercice 27.13

1. La racine carrée est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , donc par théorème de composition, f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En dérivant deux fois par rapport à x_i , on obtient $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} g'(r)$, et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) g'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} g''(r) = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} g'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} g''(r).$$

En sommant pour i variant de 1 à n , on a alors $\Delta f = \frac{n-1}{r} g'(r) + g''(r)$.

2. $\Delta f = 0$ si, et seulement si, g' est solution de l'équation linéaire $y' + \frac{n-1}{r} y = 0$, c'est-à-dire $g'(r) = \frac{A_1}{r^{n-1}}$ (avec $A_1 \in \mathbb{R}$), d'où finalement $g(r) = \frac{A}{r^{n-2}} + B$ si $n \geq 3$ et $g(r) = A \ln r + B$ si $n = 2$ (où A et B sont deux constantes réelles).

Exercice 27.14

1. Soit $(x, y) \in U$, et $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi(t) = f(tx, ty)$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 et $\psi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$.
On en déduit que si $f \in \ker \Phi$, alors ψ' est la fonction nulle, donc ψ est constante. En particulier, $\psi(1) = \psi(1/x)$, d'où $f(x, y) = f(1, y/x)$.
En posant pour tout $t > 0$, $h(t) = f(1, t)$, la fonction h est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et $f(x, y) = h(y/x)$ pour tout $(x, y) \in U$. Réciproquement, on vérifie que de telles fonctions conviennent. Finalement, $\ker \Phi$ est l'ensemble des fonctions de la forme $(x, y) \mapsto h(y/x)$ où $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

2. Supposons que f est homogène de degré α . On dérive par rapport à t l'égalité $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, ce qui donne $x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y)$. En prenant $t = 1$, on en déduit que $\Phi(f) = \alpha f$. Supposons que $\Phi(f) = \alpha f$. On pose $\varphi(t) = t^{-\alpha} f(tx, ty)$. La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx, ty) + t^{-\alpha} \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \right) \\ &= (-\alpha f(tx, ty) + \Phi(f)(tx, ty)) t^{-\alpha-1} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que φ est constante, et égale à $\varphi(1)$, d'où $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

Exercice 27.16

Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on notera $\|u\|_1 = |x| + |y|$. La condition proposée s'écrit $\|\nabla f(a)\|_1 \leq k$.

1. On note pour $t \in [0, 1]$, $g(t) = f(a + t(b-a))$. La fonction g est de classe \mathcal{C}^1 et, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t) = \langle b-a, \nabla f(a + t(b-a)) \rangle$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $g(1) - g(0) = g'(t_0)$. En posant $c = a + t_0(b-a)$, on obtient $f(b) - f(a) = \langle b-a, \nabla f(c) \rangle$.
2. si $u = (u_x, u_y)$ et $v = (v_x, v_y)$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^2 , on a

$$|\langle u, v \rangle| = |u_x v_x + u_y v_y| \leq |u_x| \cdot |v_x| + |u_y| \cdot |v_y| \leq \max(|u_x|, |u_y|) \cdot (|v_x| + |v_y|) = \|u\|_\infty \cdot \|v\|_1.$$

On applique cela avec $b = (x, y)$ et $a = (x', y')$ dans la formule de la première question :

$$|f(b) - f(a)| \leq \|b - a\|_\infty \|\nabla f(c)\|_1 \leq k \|b - a\|_\infty$$

ce qui est le résultat demandé en remplaçant.

3. on a tout d'abord,

$$|u_{n+3} - u_{n+2}| = |f(u_{n+1}, u_{n+2}) - f(u_n, u_{n+1})| \leq k \max(|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|) = ka_n.$$

de même

$$|u_{n+4} - u_{n+3}| \leq k \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+3} - u_{n+2}|)$$

Le terme $|u_{n+2} - u_{n+1}|$ est inférieur à a_n , l'autre terme $|u_{n+3} - u_{n+2}|$ inférieur à ka_n donc à a_n . Finalement $|u_{n+4} - u_{n+3}| \leq ka_n$ également. Finalement $a_{n+2} \leq ka_n$.

4. Par récurrence, on en déduit que $a_{2p} \leq k^p a_0 = (\sqrt{k})^{2p} a_0$ et $a_{2p+1} \leq k^p a_1 = (\sqrt{k})^{2p+1} \frac{a_1}{\sqrt{k}}$. Avec $q = \sqrt{k}$ et $C = \max(a_0, a_1 / \sqrt{k})$, on a $a_n \leq Cq^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq a_n \leq Cq^n$. Puisque $q \in [0, 1[$, on en déduit que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument donc converge. Cela donne la convergence de la suite u_n vers un réel ℓ . Par continuité (et suites extraites), la relation $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$ donne $\ell = f(\ell, \ell)$.