

CHAPITRE 28 - PLUSIEURS VARIABLES

EXTREMA

Exercice 28.1

On a une équation implicite du type $f(x, y, z) = 0$ où $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z - 1$. Le vecteur gradient en un point de cette surface est orthogonal à la surface. On veut que ce vecteur soit colinéaire à $(1, 2, -1)$, vecteur normal à P . On calcule le gradient :

$$\text{grad}(f) = (2x, -2y, -1)$$

ce vecteur doit être colinéaire à $(1, 2, -1)$, ce qui donne $x = 1/2$ et $y = -1$, puis $z = -7/4$.

Exercice 28.2

La fonction g est continue sur le carré $[0, 1]^2$ qui est compact, donc g est bornée et atteint ses bornes sur le carré. Etudions d'abord l'existence de points critiques de g sur l'ouvert $]0, 1[^2$. On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1 + 3x^2$. Cette dérivée partielle ne s'annule pas, donc g n'a pas de points critiques, ce qui signifie que g atteint ses bornes sur le bord du carré. On étudie g sur les quatre segments du bord.

→ Sur le segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(1, 0)$, on a $g(x, 0) = g(x, 1) = x + x^3$. Cette fonction est croissante sur $[0, 1]$, donc varie de $g(0, 0) = 0$ à $g(1, 0) = 2$. De même sur le segment d'extrémités $(0, 1)$ et $(1, 1)$.

→ Sur le segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(0, 1)$, on pose $\varphi(y) = g(0, y) = -y + y^3$. On a $\varphi'(y) = -1 + 3y^2$, donc son minimum est $\varphi(1/\sqrt{3}) = -2/3\sqrt{3}$, et son maximum est $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

→ De même, $g(1, y) = 2 - y - y^3 = 2 + g(0, y)$, donc varie de $2 - 2/3\sqrt{3}$ à 2.

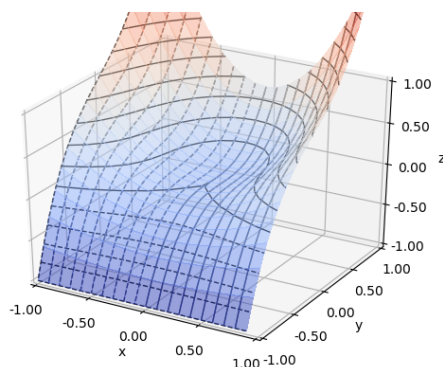
Finalement, le maximum de g sur le carré est égal à 2 et est atteint en $(1, 0)$ et $(1, 1)$, alors que le minimum est égal à $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et est atteint en $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Exercice 28.3

1. On recherche les points critiques. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy = 2x(1 + y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

Le seul point critique est $(0, 0)$ avec $f(0, 0) = 0$. On a $f(x, 0) = x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (inutile) et $f(0, y) = y^3$ avec $f(0, y) > 0$ si $y > 0$ et $f(0, y) < 0$ si $y < 0$. Il n'existe donc pas de voisinage de $(0, 0)$ sur lequel $f(x, y) - f(0, 0)$ garde un signe constant. Le point n'est pas un extremum local



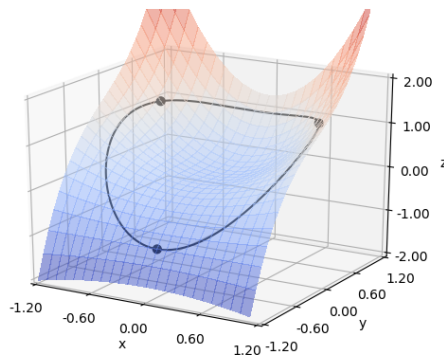
2. La fonction f est continue sur le compact D donc admet un maximum et un minimum global. Ils sont soit à l'intérieur du domaine et seraient le point critique $(0, 0)$ ce qui est impossible, soit au bord du domaine. On étudie la fonction sur le bord de D qu'on peut paramétrer par $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. On a

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \cos^2 t \sin t + \sin^3 t = \cos^2 t + \sin t(\cos^2 t + \sin^2 t) = \cos^2 t + \sin t = h(t)$$

On a $h(\pi - t) = h(t)$ - le graphe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi/2$. On étudie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a $h'(t) = -2 \cos t \sin t + \cos t = \cos t(1 - 2 \sin t)$. Un tableau de variation donne

→ un maximum $5/4$ atteint pour $t = \frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$

→ un minimum -1 atteint pour $t = -\frac{\pi}{2}$ - c'est-à-dire en $(0, -1)$

**Exercice 28.4**

Soit $g(x, y, z) = x + y + z - A$. L'ensemble $X = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3, x + y + z = A\}$ est une partie compacte (intersection du plan d'équation $x + y + z = A$ avec le huitième d'espace x, y, z tous positifs). C'est borné (chaque composante est entre 0 et A) et fermé en tant qu'intersection de fermés. La fonction $f : (x, y, z) \mapsto xyz$ admet un maximum et un minimum sur ce compact. Le minimum est immédiatement 0. En un extremum, le gradient de f est colinéaire au gradient de g donc au vecteur $(1, 1, 1)$. Cela donne $yz = xy = xz = \lambda$. Si $\lambda \neq 0$ alors $x = y = z$. On trouve alors $(A/3, A/3, A/3)$ comme unique point candidat en dehors du bord. Le maximum à l'intérieur existant, il est obligatoirement atteint en ce point. Même principe avec l'autre équation.

Exercice 28.5

1. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 12.$$

Le couple (x, y) est un point critique si, et seulement si, $x^2 + y^2 = 5$ et $xy = 2$. On obtient les quatre points critiques suivants : $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$ et $(-2, -1)$.

2. On évalue $f(x_0 + h, y_0 + k)$ et on essaie d'étudier le signe au voisinage de $(0, 0)$ à l'aide de la matrice hessienne par exemple $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$,

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x, \quad \text{d'où } rt - s^2 = 36(x^2 - y^2) = \det H_f.$$

- En $(2, 1)$, f présente un minimum local.
- En $(-2, -1)$, f présente un maximum local.
- En $(1, 2)$ et $(-1, -2)$, il n'y a pas d'extremum local.

On remarque que $f(x, 0) = x^3 - 15x$, qui a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, donc f n'est ni majorée, ni minorée sur \mathbb{R}^2 .

3. Le triangle K est fermé borné, donc compact. Comme f est continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur K . Si un extremum absolu est atteint en (a, b) situé à l'intérieur de K , alors (a, b) est un point critique, donc ce ne peut être que $(2, 1)$. On a $f(2, 1) = -28$. On doit maintenant chercher les extrema de f à la frontière de K , constituée de trois segments.

- Si $y = 0$ et $0 \leq x \leq 3$, alors $f(x, 0) = x^3 - 15x$, qui décroît sur $[0, \sqrt{5}]$ et croît sur $[\sqrt{5}, 3]$, donc son minimum est $f(\sqrt{5}, 0) = -10\sqrt{5}$ et son maximum est $\max(f(0, 0), f(3, 0)) = 0$.
- Si $x = 3$ et $0 \leq y \leq 3$, alors $f(3, y) = 9y^2 - 12y - 18$, qui décroît sur $[0, 2/3]$ puis croît, donc son minimum est $f(3, 2/3) = -22$ et son maximum est $\max(f(3, 0), f(3, 3)) = 27$.
- Si $0 \leq x = y \leq 3$, alors $f(x, x) = 4x^3 - 27x$ décroît sur $[0, 3/2]$ puis croît sur $[3/2, 3]$, donc son minimum est $f(3/2, 3/2) = -27$ et son maximum est $\max(f(0, 0), f(3, 3)) = 27$.

Il reste à faire la synthèse des résultats obtenus : le minimum de f sur K est égal à $f(2, 1) = -28$ et le maximum est $f(3, 3) = 27$.

Exercice 28.7

1. Soit e_1, \dots, e_n une base orthonormée de vecteurs propres de f avec $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Si $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$, alors $\langle f(h), h \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2 > 0$ si $h \neq 0$ (les valeurs propres sont strictement positives).

2. (a) On a

$$g(x_0 + h) = \frac{1}{2} \langle f(x_0) + f(h), x_0 + h \rangle - \langle u, x_0 + h \rangle = g(x_0) + \frac{1}{2} (\langle f(x_0), h \rangle + \langle f(h), x_0 \rangle) - \langle u, h \rangle - \frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle$$

Puisque f est symétrique, on a $\langle f(h), x_0 \rangle = \langle h, f(x_0) \rangle$ et ainsi

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + \langle f(x_0) - u, h \rangle - \frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle$$

On a $|\langle f(h), h \rangle| \leq \|f(h)\| \|h\| \leq \|f\| \|h\|^2$ donc $\langle f(h), h \rangle = o(\|h\|)$ et $h \mapsto \langle f(x_0) - u, h \rangle$ est linéaire. L'application g est bien différentiable et $dg(x_0) : h \mapsto \langle f(x_0) - u, h \rangle$.

- (b) la différentielle est nulle si et seulement si le vecteur $f(x_0) - u$ est nul donc si et seulement si $x_0 = f^{-1}(x_0)$ (f est bien inversible puisque f est à valeurs propres non nulles).
- (c) Le calcul précédent avec ce choix de x_0 donne, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x_0 + h) - g(x_0) = -\frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle$$

cette quantité est strictement négative sauf lorsque $h = 0$ où elle est nulle. On en déduit que pour tout $h \neq 0$, $g(x_0 + h) < g(x_0)$ et g admet un maximum global en x_0 .

Exercice 28.9

→ Soit $f(t) = \exp(tA)$. On veut $f(t)^T \cdot f(t) = I_n$. On a $f(t)^T = \exp(tA^T)$ (somme partielle et continuité de la transposition). On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA^T) \exp(tA) = I_n$. On dérive :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA^T) A^T \exp(tA) + \exp(tA^T) A \exp(tA) = 0,$$

d'où en évaluant en 0, $A + A^T = 0$ et A est antisymétrique (ou en simplifiant par $\exp(tA)$ et $\exp(tA^T)$). Réciproquement, si $A \in A_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(tA^T) = \exp(-tA)$ et puisque les matrices tA et $-tA$ commutent, $\exp(tA^T) \exp(tA) = \exp(0) = I_n$. Ainsi les solutions sont toutes les matrices antisymétriques

→ Soit Γ une fonction de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$ et telle que $\gamma(0) = I_n$. On a $\Gamma(t)^T \cdot \Gamma(t) = I_n$ pour t dans un voisinage de 0. En dérivant, on obtient

$$\Gamma'(t)^T \cdot \Gamma(t) + \Gamma(t)^T \cdot \Gamma'(t) = O \text{ et } \Gamma'(0)^T \cdot \Gamma(0) + \Gamma(0)^T \cdot \Gamma'(0) = O$$

ce qui donne $\Gamma'(0)^T + \Gamma'(0) = 0$ et $\Gamma'(0) \in A_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors $\Gamma(t) = \exp(tA)$ est à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$, $\Gamma(0) = I_n$ et $\Gamma'(0) = A$. Ainsi l'ensemble tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n est $A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 28.11

1. L'application f est polynomiale en les coefficients de M donc de classe \mathcal{C}^∞ . On a

$$f(M + H) = \text{tr}((M + H)^T (M + H)) = \text{tr}(M^T M) + \text{tr}(H^T M) + \text{tr}(M^T H) + \text{tr}(H^T H) = f(M) + 2\text{tr}(M^T H) + \|H\|^2$$

La différentielle de f en M est donc l'application $H \mapsto \langle 2M, H \rangle$. Le gradient de f en M est donc $2M$.

Pour la seconde :

→ on peut s'intéresser aux dérivées partielles du déterminant dans la base canonique (E_{ij}) . Soit A une matrice B sa comatrice. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on effectue un développement suivant la colonne j . Les cofacteurs de $A + tE_{ij}$ en position (k, j) sont ceux de A (par de changement des autres coefficients que celui en position (i, j)). Cela donne

$$\det(A + tE_{ij}) = \sum_{k=1}^n (A + tE_{ij})[k, j] B[k, j] = \det A + tB[i, j]$$

On en déduit que $\frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(\det)(A) = B[i, j]$ puis la différentielle de \det en A : $d(\det)_A(H) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_{ij} B_{ij} = \langle B, H \rangle$. Cela donne un gradient

en A qui vaut $(\text{Com}A)$. Dans le cas où $\det M = 1$, on a $(\text{Com}M) = (M^T)^{-1}$. Ainsi $\text{grad}_M(g) = (M^T)^{-1} = \text{Com}(M)$.

→ autre version : on commence par la différentielle en I_n . Soit H une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On la trigonalise dans $M_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. On a $\det(I_n + tH) = \prod_{k=1}^n (1 + t\lambda_k) = 1 + t \text{tr}(H) + o(t)$. On a donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(I_n + tH) - \det I_n}{t} = \text{tr} H = \langle I_n, H \rangle$. Pour M de déterminant 1, on a $\det(M + H) = \det(M) \det(I_n + M^{-1}H) = \det(I_n + M^{-1}H)$. On a alors

$$\det(M + H) = \det M + \text{tr}(M^{-1}H) + o(H)$$

et $(d\det)_M(H) = \text{tr}(M^{-1}H) = \langle (M^T)^{-1}, H \rangle$. On retrouve le gradient $(M^T)^{-1}$.

2. Puisque $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ et que l'application déterminant est continue sur $M_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé. On considère $K = SL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{B}(0, 1+n)$. C'est une partie non vide (contient I_n), fermée (intersection de fermés) et bornée. L'application f étant continue sur K , elle admet une borne inférieure (et elle est inférieure à $f(I_n) = n$) atteinte en un certain M_0 (on a donc $f(M_0) \leq n$). Pour toute matrice M de $SL_n(\mathbb{R})$, on a bien $f(M) \geq f(M_0)$ (c'est vrai dans K et c'est immédiat sinon car $f(M) \geq n + 1 > f(M_0)$). Ainsi f admet un minimum sur $SL_n(\mathbb{R})$.

3. On choisit une matrice H tel que $\langle \nabla g_{M_0}, H \rangle = 0$, c'est-à-dire $\text{tr}(M_0^{-1}H) = 0$. On note $\gamma(t) = M_0 \exp(tM_0^{-1}H)$. On a bien γ de classe \mathcal{C}^1 , $\gamma(0) = M_0$, $\gamma'(t) = M_0 M_0^{-1} H \exp(tM_0^{-1}H)$ et $\gamma'(0) = H$. Enfin, avec la relation $\det(\exp A) = \exp(\text{tr} A)$, on a $\det \gamma(t) = \det(M_0) \exp(t \text{tr}(M_0^{-1}H)) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Puisque h est minimale en M_0 , on a notamment $h(\gamma(t))$ minimale en $t = 0$ donc sa dérivée est nulle en $t = 0$. Si on note $\theta(t) = h(\gamma(t))$ alors $\theta'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ et en 0, on obtient $df_{M_0}(H) = 0 = \langle \nabla f_{M_0}, H \rangle$. Cela donne bien que H est orthogonale à ∇f_{M_0} . On a donc une inclusion des orthogonaux et comme les gradients ne sont pas nuls (M_0 est inversible de déterminant 1), les orthogonaux sont deux hyperplans identiques.
5. En repassant à l'orthogonal, on obtient que les deux gradients sont colinéaires. Cela donne $(M_0^T)^{-1} = 2\lambda M_0$ et $2\lambda M_0^T M_0 = I_n$. Puisque $\det M_0 = \det M_0^T = 1$, on a $(2\lambda)^n = 1$ et $2\lambda = \pm 1$. Ainsi $M_0^T M_0 = \pm I_n$. Le cas $M_0^T M_0 = -I_n$ est impossible car alors $\text{tr}(M_0^T M_0) = -n$ alors que c'est $\|M_0\|^2$. On a donc $M_0^T M_0 = I_n$ (c'est une matrice orthogonale). Pour une telle matrice on a $f(M_0) = n$ - ce qui est le minimum de f sur $SL_n(\mathbb{R})$ et il est atteint en toutes ces matrices (matrices orthogonales).