Mathématiques

MPI/MPI*

Cahier de vacances

David Rupprecht
Lycée P. de Fermat
https://www.cpge-fermat.fr
david.rupprecht@ac-toulouse.fr

1 Nombres complexes

I. Nombres complexes

Modules

L'essentiel - modules

- → $z\overline{z} = |z|^2$ (souvent utilisée pour le calcul)
- → $|z| = |\bar{z}|$, $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$ et $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$.
- → $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ avec égalité si, et seulement si z est réel.
- → $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$ avec égalité si, et seulement si z est imaginaire pur.
- → *Inégalité triangulaire* : $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
- → *Seconde inégalité triangulaire* : $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2|$.
- → *Cas d'égalité* $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.
- → *généralisation* : $|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|$ si, et seulement si, il existe $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $z_i = \lambda_i z$ pour tout i.

Arguments

L'essentiel - Arguments

- → On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Cet ensemble est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$. On note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- → L'application $\left\{\begin{array}{ll} (\mathbb{R}, +) & \to (\mathbb{U}, \times) \\ \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes, surjectif et dont le noyau est l'ensemble des multiples entiers de 2π.
  Cela signifie que :
  - si $|z| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $z = e^{i\theta}$,
  - on a $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si, et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\theta' - \theta = 2k\pi$,
  - on a $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ et $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.
- → On appelle argument d'une nombre complexe **non nul** z, tout réel θ tel que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. On note alors $\arg z = \theta\ [2\pi]$.
- → Si z, z' sont non nuls
  - $\arg(zz') = \arg z + \arg z'\ [2\pi]$,
  - $\arg(1/z) = -\arg z [2\pi]$.
- → les arguments sont définis modulo 2π. On fera par exemple attention de ne pas écrire $\arg zz' = \arg z + \arg z'$.

Racines n-ièmes

Proposition 1 *(Racines d'un complexe)*

soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de a tout complexe z tel que $z^n = a$. Si une forme trigonométrique de $a \neq 0$ est $a = \rho e^{i\theta}$, alors les racines n-ièmes de a sont les n nombres complexes 2 à 2 distincts

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{où } k \in [\![0; n-1]\!].$$

Proposition 2 *(Racines de l'unité)*

On appelle racine n-ième de l'unité, tout complexe z tel que $z^n = 1$. Il y en a exactement n. On appelle alors $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. On a $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ et

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]\}.$$

L'ESSENTIEL - RACINES

- Si on note $\omega = e^{2i\pi/n}$, alors $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}\}$. On peut remplacer les exposants $[\![0 ; n-1]\!]$ par n'importe quelle suite de n entiers consécutifs.
- La somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0.
- Si z_0 est une racine n-ième d'un nombre complexe a non nul, alors on obtient toutes les racines n-ièmes de a en multipliant z_0 par les n racines n-ièmes de l'unité.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

L'ESSENTIEL

Soit A, B et M des points d'affixe respective a, b et z, alors

- $|b-a| = AB$ et $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{AM}{BM}$ (z différent de b),
- $\arg a = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OA})\ [2\pi]$ (a non nul),
- $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})\ [2\pi]$ (z différent de a et b).

Exercice 1 ***(Identité du parallèlogramme)***

Montrer que pour tout z et z' complexes, on a $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

Exercice 2 ***(Inégalité triangulaire)***

Soient z et z' deux complexes. Montrer que $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ avec égalité si et seulement s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ tels que $z = \lambda z_0$ et $z' = \lambda' z_0$.

Exercice 3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants (lorsqu'ils existent), donner module et un argument : $(1+i)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$), $1 + e^{i\theta}$ et $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$

Exercice 4

Résoudre $(z^2+1)^n - (z+i)^{2n} = 0$.

II. TRIGONOMÉTRIE

$\cos(a+b)$	$=$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$			
$\cos(a-b)$	$=$	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$			
$\sin(a+b)$	$=$	$\sin a \cos b + \sin b \cos a$			
$\sin(a-b)$	$=$	$\sin a \cos b - \sin b \cos a$			
$\cos 2a$	$=$	$2\cos^2 a - 1$	$\sin 2a$	$=$	$2 \sin a \cos a$
	$=$	$1 - 2\sin^2 a$			
$\cos^2 a$	$=$	$\frac{1+\cos 2a}{2}$	$\sin^2 a$	$=$	$\frac{1-\cos 2a}{2}$
$\sin\theta$	$=$	$\frac{2t}{1+t^2}$			
$\cos\theta$	$=$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	avec t	$=$	$\tan\frac{\theta}{2}$
$\tan\theta$	$=$	$\frac{2t}{1-t^2}$			
$\tan(a+b)$	$=$	$\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$			

III. Opérations à connaitre

Méthode - transformations très importantes à connaître

$$1+e^{i\theta}=e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right)=2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$$

$$1-e^{i\theta}=e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)=-2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}$$

$$e^{ia}+e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{i\frac{b-a}{2}}\right)=2\cos\frac{a-b}{2}e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Exemple - linéariser des produits simples

on veut linéariser $\sin a\sin b$. On voit que ce terme apparaît dans $\cos(a+b)$. On écrit alors

$$\begin{array}{rcl}\cos(a+b) & = & \cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \cos(a-b) & = & \cos a\cos b+\sin a\sin b\\ \hline \cos(a-b)-\cos(a+b) & = & 2\sin a\sin b\end{array}$$

ce qui donne $\sin a\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$. *remarque :* on peut également utiliser les formules d'Euler.

Exemple - linéariser des puissances à l'aide des formules d'Euler

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\text{ et }\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

exemple : $\cos^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{(e^{i\theta})^3+3(e^{i\theta})^2e^{-i\theta}+3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2+(e^{-i\theta})^3}{8}=\frac{e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}}{8}=\frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4}.$

Exemple - additionner des sinus ou cosinus

On veut additionner $\cos p+\cos q$. On utilise

$$e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{i\frac{q-p}{2}}\right)=2\cos\frac{p-q}{2}e^{i\frac{p+q}{2}},$$

puis on prend la partie réelle, ce qui donne :

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$

On peut également utiliser $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ avec $p=a+b$ et $q=a-b$, ce qui revient à $a=\frac{p+q}{2}$ et $b=\frac{p-q}{2}$.

Exemple - développer en puissances de sinus ou cosinus

Exprimer $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$. Puisque $\sin 3\theta=\mathrm{Im}(e^{3i\theta})$,

$$\begin{array}{rcl}e^{3i\theta} & = & (e^{i\theta})^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3i\sin\theta\cos^2\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta\\ & = & \cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)+i(3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta)\end{array}$$

ainsi $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ et $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$.

MÉTHODE - TRANSFORMER DES COMBINAISONS LINÉAIRES SOUS LA FORME $a\cos x + b\sin x$

on a $a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)(a - ib)\right)$. Avec $R = |a - ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $a - ib = Re^{-i\varphi}$, cela donne $a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left(Re^{i(x-\varphi)}\right) = R\cos(x-\varphi)$.
En pratique, on factorise par $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right).$$

Puisque

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} &= \cos\varphi \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} &= \sin\varphi \end{cases}$. On termine alors grâce à la formule $\cos(x-\varphi)$.

EXEMPLE - FONDAMENTAL - DÉTERMINER DES SOMMES DE SINUS OU COSINUS :

soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta.$$

On a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k.$$

Si $e^{i\theta} \neq 1$, alors on obtient

$$C_n + iS_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\left(\frac{-2i\sin((n+1)\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)}\right),$$

ce qui donne, après simplifications,

$$C_n = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs ne sont pas à connaître mais la méthode doit être **entièrement maîtrisée**.

IV. EXERCICES

EXERCICES À FAIRE

Exercice 5 ***(Inégalité triangulaire généralisée)***

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité si et seulement s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $z_k = \lambda_k z_0$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.

Exercice 6

Déterminer les nombres complexes z tels que $|z| = |z+1| = 1$.

Exercice 7

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$, et étudier les cas d'égalité.

Exercice 8

Soit $z \in \mathbb{C}$ différent de 1. Montrer que $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$.

Exercice 9

Déterminer les complexes z tels que $z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire des valeurs simples pour $\cos(\frac{\pi}{8}), \sin(\frac{\pi}{8})$ et vérifier que $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 10

1. On note $U_n = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $V_n = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$. Déterminer U_n et V_n en fonction de n.
2. On note
$$U_n = \sum_{0\leqslant 3k\leqslant n}\binom{n}{3k}, V_n = \sum_{0\leqslant 3k+1\leqslant n}\binom{n}{3k+1} \text{ et } W_n = \sum_{0\leqslant 3k+2\leqslant n}\binom{n}{3k+2},$$
Déterminer U_n, V_n et W_n en fonction de n.

Exercice 11

Soit n un entier, $n \geqslant 2$, et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.

Exercice 12

Soit n un entier, $n \geqslant 2$, et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $S_n = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=p}^{n-1}\binom{q}{p}\omega^{p+q}$.

Exercice 13

Pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on note $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x)$. Simplifier les deux écritures et vérifier que S_n est positive.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 14 ***(Mines MP)*** ✫

Soit a, b et c de module 1 tels que $a+b+c=0$. Montrer que $a^2+b^2+c^2=0$.

Exercice 15 ✫

Soient trois complexes non nuls a, b et c tels que $a+b+c=0$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Montrer que les trois complexes ont le même module. Que peut-on dire de plus ?

Exercice 16 ***(Mines MP)*** ✫

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{2ik\pi/n}\right)$.

Exercice 17 ✫

Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré minimal ayant $a = 2\cos\frac{\pi}{5}$ pour racine.

Exercice 18 ***(Polytechnique - pour 5/2)*** ✫

Soient G un sous-groupe de $\mathbb{U}$, $\Gamma = \left\{z \in G ; |z-1| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, H le sous-groupe de G engendré par Γ. Exprimer une condition pour que H ne soit pas réduit à $\{1\}$ et prouver qu'alors $H = G$.

2 Décomposition en éléments simples

I. Généralités

Factorisation d'un polynôme

Proposition 3 *(Factorisations de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$)*

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors P se factorise de façon unique sous la forme

$$P = \lambda(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p},$$

où les complexes $a_1,\cdots,a_p$ sont deux à deux distincts et les exposants $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ sont des entiers naturels non nuls (tels que $\alpha_1+\cdots+\alpha_p = n$).

Proposition 4 *(Factorisations de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$)*

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors P se factorise de façon unique sous la forme

$$P = \lambda(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p}(X^2-s_1X+p_1)^{\beta_1}\cdots(X^2-s_qX+p_q)^{\beta_q},$$

où

- → les **réels** $a_1,\cdots,a_p$ sont deux à deux distincts.
- → les facteurs **réels** $X^2-s_kX+p_k$ sont deux à deux distincts avec $s_k^2-4p_k<0$ pour $k\in[\![1;q]\!]$ (les facteurs sont irréductibles sur $\mathbb{R}$).
- → les exposants $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ et $\beta_1,\cdots,\beta_q$ sont des entiers naturels non nuls.

Remarque : les facteurs du second degré correspondent au produit de deux facteurs conjugués $(X-z)(X-\bar{z})$.

Partie entière

Définition 1 *(partie entière)*

Soit A/B une fraction irréductible. On rappelle que la division euclidienne de A par B s'écrit $A = BQ+R$ avec $\deg R < \deg B$. On appelle alors partie entière de la fraction rationnelle A/B le polynôme Q. On a alors l'écriture $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$. On peut alors se ramener à l'étude de la décomposition d'une fraction sous la forme A/B avec $\deg A < \deg B$.

Attention

Très important Tout ce qui suit sur les décompositions suppose que le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur. La forme de la décomposition sera fausse si on ne se trouve pas dans cette situation. Il **faudra** donc systématiquement commencer par s'y ramener.

Décomposition en éléments simples - cas complexe

Proposition 5

On considère une fraction rationnelle irréductible $F = A/B$ avec $\deg A < \deg B$. On factorise B sous la forme

$$B = \lambda(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p}.$$

Il existe alors des complexes c_{ij} (uniques) tels que

$$F = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{c_{ij}}{(X-a_i)^j}\right).$$

En d'autres termes on décompose la fraction en fractions plus simples. Pour chaque facteur $(X-a)^\alpha$ qui apparaît dans la factorisation de B, on voit apparaître les fractions $\frac{1}{X-a}, \frac{1}{(X-a)^2}, \cdots, \frac{1}{(X-a)^\alpha}$ dans la décomposition. Il n'y a plus qu'à déterminer les constantes devant ces fractions.

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES - CAS RÉEL

Le théorème est assez proche mais un peu plus compliqué. Avec les mêmes hypothèses, B se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme

$$B = \lambda(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p}(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}\cdots(X^2+b_qX+c_q)^{\beta_q},$$

→ pour chaque facteur $(X-a)^\alpha$, on écrit dans la décomposition les fractions

$$\frac{c_1}{X-a}, \frac{c_2}{(X-a)^2}, \dots, \frac{c_\alpha}{(X-a)^\alpha},$$

où c_i est un réel.

→ pour chaque facteur $(X^2+bX+c)^\beta$ (irréductible dans $\mathbb{R}$), on fait apparaître les fractions

$$\frac{c_1X+d_1}{X^2+bX+c}, \frac{c_2X+d_2}{(X^2+bX+c)^2}, \dots, \frac{c_\beta X+d_\beta}{(X^2+bX+c)^\beta},$$

où les constantes c_k et d_k sont réelles.

II. TECHNIQUES DE DÉCOMPOSITION

On se donne une fraction rationnelle irréductible $F = A/B$ et on cherche sa décomposition en éléments simples. On n'oubliera pas de vérifier que $\deg A < \deg B$ et si ce n'est pas le cas, on commencera par effectuer la division euclidienne de A par B pour s'y ramener. On supposera être dans ce cas dans la suite de ce chapitre.

CAS RÉEL

Pour une décomposition avec des facteurs réels irréductibles de degré 2 au dénominateur, de multiplicité 1, on a le choix entre chercher directement la décomposition en réel et la faire en complexe puis regrouper les termes conjugués (cela ne fonctionne pas si les exposants sont plus grand que 1).

MÉTHODE DIRECTE

On sait sous quelle forme se décompose la fraction. On réduit les fractions intervenant dans la décomposition au même dénominateur et on identifie le numérateur obtenu avec celui de la fraction de départ. On obtient un système d'équations linéaires où les inconnues sont les constantes devant les éléments simples. Ce n'est à envisager sous cette forme que pour des cas très simples (et dans ces cas on utilisera de toute façon des méthodes plus rapides). En revanche cette méthode pourra/devra être utilisée lorsqu'on aura réussi à déterminer certains coefficients et qu'on a utilisé toutes les astuces connues. Il ne restera en général que très peu de coefficients à déterminer.

TERMES DE PLUS HAUT EXPOSANT

Termes de degré 1

On considère un facteur $(X-a)^k$ dans la factorisation de B (k maximum). On peut écrire $B = (X-a)^kC$ avec $C(a) \neq 0$. On multiplie alors les deux cotés de l'égalité (d'un coté la fraction, de l'autre la décomposition) par $(X-a)^k$ puis on remplace X par a. À gauche, il reste $A(a)/C(a)$ et à droite le coefficient de $1/(X-a)^k$ (tous les autres termes ont au moins $X-a$ en facteur). *Cela ne fonctionne que pour le terme de plus grand exposant.*

On peut remarquer que si a est racine de multiplicité k dans B alors $B = \frac{B^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k + \ldots = (X-a)^kC$ avec $C(a) = \frac{B^{(k)}(a)}{k!}$. Ainsi le coefficient de $\frac{1}{(X-a)^k}$ dans la décomposition en éléments simples est $\frac{k!A(a)}{B^{(k)}(a)}$. Notamment si a est racine simple du dénominateur alors le terme est $\frac{A(a)}{B'(a)}$.

EXEMPLE

On veut décomposer

$$F_1 = \frac{3X^2+X-2}{(X-1)^2(X+2)^2}.$$

La décomposition va s'écrire

$$F = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X+2)^2} + \frac{d}{X+2}.$$

Pour obtenir a, on multiplie F par $(X-1)^2$ puis on remplace X par 1 (en fait on « cache » le facteur $(X-1)^2$). Il vient

$$a = \left(\frac{3X^2+X-2}{(X+2)^2}\right)_{|X=1} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

De même

$$c = \left(\frac{3X^2+X-2}{(X-1)^2}\right)_{|X=-2} = \frac{8}{9}.$$

Termes de degré 2

Pour un facteur $(X^2+bX+c)^\beta$ (irréductible et de plus grand exposant), on peut réaliser la même opération et instancier X à l'une des racines de X^2+bX+c. Puisque les constantes qui apparaissent dans la décomposition sont réelles (on part d'un polynôme à coefficients réels), on aura directement les deux constantes.

EXEMPLE

On veut décomposer
$$F_2 = \frac{3X+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)}.$$
On sait que la décomposition va s'écrire
$$F_2 = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}.$$
On multiplie par X^2+X+1 puis on évalue en $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$:
$$\left(\frac{3X+1}{(j+1)^2}\right)_{X=j} = cj+d.$$
Or $1/(j+1)^2 = 1/(-j^2)^2 = 1/j^4 = j^2$ (on utilise $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$). Il vient
$$cj+d = (3j+1)j^2 = 3j^3+j^2 = 3+j^2.$$
Le partie réelle donne $-\frac{c}{2}+d = 3-\frac{1}{2}$ la partie imaginaire $c\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $c=-1$ puis $d=2$.

COMPORTEMENT EN L'INFINI

Une astuce supplémentaire consiste à multiplier chaque coté par X puis faire tendre X vers $+\infty$. On obtient alors parfois une nouvelle équation.

PARITÉ

Si la fraction F est paire ou impaire ($F(-X) = \pm F(X)$), on pourra utiliser l'unicité de la décomposition pour trouver de nouvelles relations

EXEMPLE

Soit $F_3 = \frac{1}{(X^4+1)} = \frac{1}{(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)}$. On remarque que $F_3(X) = F_3(-X)$. La décomposition de F_3 va s'écrire
$$F_3 = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}.$$
la décomposition de $F_3(-X)$ va alors être (on remplace au dessus)
$$\begin{aligned} F_3(-X) &= \frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1} \\ &= \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} \\ F_3(X) &= \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1} \end{aligned}$$
Ainsi en utilisant l'unicité des coefficients, on obtient les relations $a=-c$ et $b=d$ (deux fois).

Remarque : La factorisation du numérateur vient de $X^4+1 = (X^2+1)^2-2X^2 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.

L'ESSENTIEL - CAS PARTICULIERS

On veut décomposer en éléments simples la fraction $\frac{A}{B}$ avec $\deg A < \deg B$:

→ si a est racine simple de B, le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ est $\frac{A(a)}{B'(a)}$

→ si a est racine de multiplicité k de B, le coefficient de $\frac{1}{(X-a)^k}$ est $k!\frac{A(a)}{B^{(k)}(a)}$

→ si $P = \lambda \prod_{k=1}^{p}(X-a_i)^{\alpha_i}$ alors $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_i}{X-a_i}$.

III. EXERCICES

EXERCICES À FAIRE

Exercice 1

Refaire et terminer les décompositions des fractions F_1, F_2 et F_3

Exercice 2

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes

a) $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

b) $\dfrac{1}{X(X^2+1)}$.

c) $\dfrac{1}{X^3+1}$.

d) $\dfrac{2X+1}{(X^2-X)^2}$.

e) $\dfrac{X^4-1}{X^2(X+1)}$.

f) $\dfrac{X^4}{(X+1)(X^2-1)}$.

g) $\dfrac{1}{X^n-1}$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$)

h) $\dfrac{X^5+X+1}{X^4-1}$

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ n'admettant que des racines simples non nulles $x_1, \dots, x_n$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$. Que vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)}$?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre n de f (et la donner sous forme de fraction).

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 5

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ (avec $n \geqslant 2$). Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)P''(x) \leqslant P'^2(x)$.

3 Calcul d'intégrales

I. Calculs

Résultats généraux

L'essentiel

→ Intégration par parties : si f, g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

→ Intégration par parties généralisée : si f, g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(t)g^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,dt.$$

→ Changement de variable : soit f continue sur un intervalle I, et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ **à valeurs dans** I, on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

→ Changement de variable bijectif : soit f continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle I sur un intervalle J contenant $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

L'essentiel - symétries, périodicité

Si f est une fonction continue par morceaux, alors

→ si f est *paire* sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$,

→ si f est *impaire* sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$,

→ si f est de période T, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$ (périodicité),
- $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt$ (l'intégrale sur une période ne dépend pas du point de départ).

Méthodes de calculs

Méthode - Fractions rationnelles

On décompose la fraction rationelle en éléments simples et on calcule les intégrales de chacun des termes

→ Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^n}$ sur $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ est la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{(t-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|t-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

→ Pour les fonctions à intégrer sous la forme $t \mapsto \dfrac{1}{(at^2+bt+c)^n}$ (qui ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$), on commence par effectuer un mise sous forme canonique afin de se ramener à des primitives de fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ est $t \mapsto \arctan t$. Lorsque $n \geqslant 2$, on cherche, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre I_n et I_{n+1} où I_n est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$

MÉTHODE - POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

On doit chercher des primitives $\int \sin^n t \cos^m t\, dt$.

→ Par primitive directe : si l'un des exposants est impair, on peut faire apparaître des termes sous la forme $u' u^n$. Par exemple, si $m = 2p+1$, on écrit
$$\sin^n t \cos^m t = \sin^n t(\cos^{2p} t)\cos t = \left(\sin^n t(1-\sin^2 t)^p\right)\cos t.$$
En développant le terme à la puissance p, on fait apparaître une combinaison de termes sous la forme $\sin^q t \cos t$ qui s'intègrent facilement.

→ Par linéarisation : (dans le cas m et n pairs) en utilisant les formules de trigonométrie ou les formules d'Euler.

MÉTHODE - POLYNÔMES ET EXPONENTIELLES

On cherche des primitives de fonctions $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est un polynôme de degré n et α un réel ou un complexe non nul (cela permet de traiter le cas des fonctions sinus et cosinus). Une telle primitive est de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n. On détermine cette primitive en dérivant $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ puis en identifiant les coefficients du polynôme en facteur de $e^{\alpha t}$ dans cette dérivée avec ceux de P.

MÉTHODE - FRACTIONS $F(\sin x, \cos x)$

→ on peut utiliser le changement de variable $t = \tan(x/2)$ combiné aux formules
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

→ règles de Bioche : si la quantité $F(\sin x, \cos x)\,dx$ est invariante (ne pas oublier le « dx ») lorsqu'on remplace
- x par $-x$: $u = \cos x$
- x par $\pi - x$: $u = \sin x$
- x par $x+\pi$: $u = \tan x$.

MÉTHODE - FRACTIONS $F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Après mise sous forme canonique de ax^2+bx+c et après un changement de variable affine, on se trouve dans l'une des situations suivantes (le but est de transformer à l'aide des formules de trigonométries la partie sous la racine en un carré) :

→ $\int G(u, \sqrt{1-u^2})\,du$: on utilise le changement de variable $u = \sin t$ ou $u = \cos t$.

→ $\int G(u, \sqrt{u^2-1})\,du$: on utilise le changement de variable $u = \operatorname{ch} t$ (alors $\sqrt{u^2-1} = \pm \operatorname{sh} t$) ou $u = \frac{1}{\cos t}$ (alors $\sqrt{u^2-1} = \pm\tan t$).

→ $\int G(u, \sqrt{u^2+1})\,du$: on utilise le changement de variable $u = \operatorname{sh} t$ (alors $\sqrt{u^2+1} = \pm \operatorname{ch} t$).

II. EXERCICES

CALCULS DE BASE

Exercice 1

Calculer les primitives des fonctions suivantes suivantes sur les intervalles (que l'on précisera) où elles sont continues

a) $x \mapsto x \arctan x$

b) $x \mapsto x(\arctan x)^2$

c) $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2)$

d) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

e) $x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x$

f) $x \mapsto \dfrac{1}{3e^x + 2e^{-x}}$

g) $x \mapsto e^x(2x^2+x+1)$

h) $x \mapsto e^{3x}(\cos x + 2\sin x)$

i) $x \mapsto \operatorname{ch}(x)\sin(2x)$

j) $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

k) $x \mapsto \operatorname{ch} x \sin 2x$

l) $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$

m) $x \mapsto \dfrac{1}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4}$

n) $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$

o) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

p) $x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$

q) $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ (avec $a^2 \neq b^2$)

r) $x \mapsto \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

Exercice 2

Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ c) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$

Exercice 3

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\,dt$.

Exercice 4

Calculer la primitive (sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$I(x) = \int_1^x t^\alpha \ln t \,\mathrm{d}t$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

CALCULS PLUS LONGS

Exercice 5

Calculer les primitives de $x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+4x+5\right)}{(1+x)^2}$.

Exercice 6

Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{1/2} \arctan\sqrt{1-x^2}\,dx$

4 DL, ÉQUIVALENTS

I. Équivalents

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

Définition 2 *(comparaison locale des fonctions)*

Soit f, g deux fonctions définies sur I, a dans ou au bord de I.
- → $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$: il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de a et une fonction ε définie sur $\mathscr{V}$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, tels que, pour $x \in I\cap\mathscr{V}$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.
- → $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$: il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de a et une fonction M définie et bornée sur $\mathscr{V}$, tels que, pour $x \in I\cap\mathscr{V}$, $f(x) = g(x)M(x)$.
- → $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$: il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de a et une fonction ε définie sur $\mathscr{V}$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, tels que, pour $x \in I\cap\mathscr{V}$, $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$.

Propriété 6 *(en pratique)*

Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a, alors

$$\begin{aligned}
f(x) = \underset{a}{o}(g(x)) &\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\\
f(x) = \underset{a}{O}(g(x)) &\iff \text{il existe } M \geqslant 0, \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant M \text{ sur un voisinage de } a\\
f(x) \underset{a}{\sim} g(x) &\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1
\end{aligned}$$

Attention

Équivalence à un réel
- → Écrire $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$ équivaut à $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si $\boxed{\boldsymbol{\ell \neq 0}}$.
- → Écrire $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ signifie que f <u>est nulle</u> sur un voisinage de a et pas seulement que la limite de f est nulle.

Propriété 7 *(croissances comparées : échelles de grandeur en 0)*

- → si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $x^\alpha \underset{0}{\ll} \dfrac{1}{|\ln x|^\beta} \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} |\ln x|^\beta \underset{0}{\ll} \dfrac{1}{x^\alpha}$.
- → si $\alpha < \beta$, $|\ln x|^\alpha \underset{0}{\ll} |\ln x|^\beta$ et $x^\beta \underset{0}{\ll} x^\alpha$

En résumé, si le terme tend vers l'infini, plus l'exposant est grand, plus il va « vite » vers l'infini. S'il tend vers 0, alors c'est le contraire.

Propriété 8 *(croissances comparées : échelles de grandeur en $+\infty$)*

- → si $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$, alors $\ln^\beta x \underset{+\infty}{\ll} x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} a^x$.
- → Si $\alpha < \beta$, alors $\ln^\alpha x \underset{+\infty}{\ll} \ln^\beta x$ et $x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} x^\beta$.
- → Si $1 < a < b$, alors $1 \underset{+\infty}{\ll} a^x \underset{+\infty}{\ll} b^x$.

Remarque : en posant $\alpha = \ln a$, on a $a^x = e^{\alpha x}$ - on peut alors utiliser l'échelle des fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ au lieu de $x \mapsto a^x$ avec $a > 1$.

Propriété 9 *(Produits et quotients sur les équivalents)*

Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors
- → $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- → f_1 et g_1 sont de même signe au voisinage de a - si l'une ne s'annule pas sauf éventuellement en a, l'autre non plus sur un voisinage de a,
- → si f_2 ou g_2 ne s'annule pas sauf éventuellement en a, $f_1/f_2 \underset{a}{\sim} g_1/g_2$,
- → pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1^n \underset{a}{\sim} g_1^n$. Se généralise à une puissance réelle **fixe** si les fonctions sont strictement positives.

Attention

Opérations interdites

- → ajouter des équivalents entre-eux ou même d'ajouter un même terme à des termes équivalents,
- → composer des équivalents par la gauche : si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors $h(f(x))$ et $h(g(x))$ ne sont pas forcément équivalents.

Propriété 10 *(Composition)*

- → Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x \to b} h(x) = a$, alors $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$ (substitution)
- → $e^f \underset{a}{\sim} e^g$ si et seulement si $f - g \xrightarrow[a]{} 0$ (et pas lorsque $f \underset{a}{\sim} g$),
- → si $f \underset{a}{\sim} g$ et que f (ou g) tend vers **une limite finie ℓ positive ou nulle mais différente de** 1**, ou vers** $+\infty$ alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$ (avec des fonctions strictement positives).

Propriété 11 *(cas dérivable)*

Si f dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors $f(a+h) - f(a) \underset{h \to 0}{\sim} f'(a).h$ (ou $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a).(x-a)$).

$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$	$\tan(x) \underset{0}{\sim} x$	$\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$	$\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x$	$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$	$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$	$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	$\operatorname{th}(x) \underset{0}{\sim} x$	

Attention

un seul terme significatif On a $e^x \underset{0}{\sim} 1$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ mais lorsqu'on écrit $e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$, le terme x n'est pas du tout significatif (on a aussi $e^x \underset{0}{\sim} 1 - x$ ou $1 + 2x$ ou $1 + x^2$ ...). Même si l'écriture est mathématiquement correcte, on supprime tout terme non significatif dans un équivalent afin notamment de ne pas enchaîner sur un erreur impardonnable !!!

II. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Attention

remarque Écrire un développement limité revient à écrire une égalité entre deux termes : la fonction et son développement limité (terme $x^n \varepsilon(x)$ **compris**). On peut donc remplacer $f(x)$ par son DL. Il faut en revanche bien comprendre qu'on ne sait rien sur le terme d'erreur $x^n \varepsilon(x)$ (à part la limite de ε en 0). Ainsi, on ne pourra en déduire qu'un comportement local (autour de 0) de la fonction ou encore une limite. Cela ne permettra par exemple **JAMAIS** de montrer une relation ou une inégalité sur un intervalle.

Proposition 12 *(existence théorique d'un DL)*

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a et pour h dans un voisinage 0 (tel que $a + h \in I$)

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + h^n \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Proposition 13 *(opérations sur les DL)*

en dehors des opérations usuelles simples (combinaison linéaire et produit), on a

- → *Intégration :* si $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ et si f' admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en intégrant terme à terme le DL de f' et en rajoutant $f(0)$:
$$\text{si } f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ , alors}$$
$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$
- → *Dérivation :* si f et f' admettent des $DL(0)$ respectivement à l'ordre $n+1$ et n, alors la partie régulière du DL de f' s'obtient en dérivant la partie régulière du DL de f.
- → *Composition :* si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q et $\boxed{f(0) = 0}$, alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en tronquant au degré n le polynôme $Q \circ P$.
- → *Division :* il suffit de savoir inverser un développement limité. Une fois mis en facteur la partie principale de g, on se retrouve à inverser $g(x) = a_k x^k (1 + u(x))$ où u est une fonction qui tend vers 0. On applique alors les règles de composition avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Attention

Dérivation, intégration

→ « primitiver » un DL ne pose pas de difficulté

→ on **ne peut pas** dériver un DL directement

Attention

Composition Lorsqu'on doit composer des développements limités, la première chose à faire et **à ne jamais oublier**, est de vérifier qu'on compose bien au bon point. Si on doit calculer le $DL_3(0)$ de $\exp(\cos(x))$, il ne suffit par de remplacer u par $1 - x^2/2 + o(x^3)$ dans le $DL_3(0)$ de $\exp(u)$ puisque la limite de cos en 0 est 1.

Attention

DL et équivalents

→ il faut bien comprendre la grande différence entre ces deux notions. L'équivalent est un nouvel opérateur avec des règles bien précises. Un développement limité revient à écrire une égalité. On peut donc toujours remplacer une fonction par l'un de ses DL, du moment qu'on n'oublie pas le terme $o(x^n)$ ou $x^n\varepsilon(x)$. **On ne remplacera *JAMAIS* une fonction par un équivalent lorsqu'on travaille avec des égalités.**

→ Écrire un développement limité revient à écrire une fonction comme somme de termes de plus en plus négligeables. Le premier de ces termes est donc un équivalent de la fonction. Le DL est en quelque sorte une généralisation des équivalents qui permet d'utiliser beaucoup plus d'opérations (la somme par exemple). Il faut également remarquer qu'on aura souvent recours à un DL pour calculer un équivalent qui n'est pas immédiat.

L'ESSENTIEL - JUSTIFIER L'EXISTENCE D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN 0

→ en montrant qu'on peut écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ au voisinage de 0 à l'aide des DL usuels et des opérations : combinaisons linéaires, produit, composition (et inverse/quotient) et intégration d'un DL (mais pas en dérivant !!!)

→ lorsque la fonction est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un voisinage de 0

III. COMPARAISON DE SUITES

On a des définitions similaires à celles pour les fonctions - la plupart du temps on utilise les versions particulières suivantes (elles ne fonctionnent plus lorsque les suites s'annulent une infinité de fois).

Proposition 14 *(comparaisons - version pratique)*

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites et les termes de (v_n) sont non nuls à partir d'un certain rang n_0, alors

→ on a $u_n = O(v_n)$ si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée.

→ on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

→ on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Propriété 15 *(règles sur les comparaisons)*

→ Transitivité :
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ (idem avec O).

→ Sommes :
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
- on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n + v_n \sim v_n$.
- **pas de résultat sur somme et différence d'équivalents**.

→ Produits :
- Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$ alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$ (résultat semblable avec le quotient).
- Si $u_n = o(u'_n)$ et $v_n = o(v'_n)$ alors $u_n v_n = o(u'_n v'_n)$ (résultat semblable avec O mais pas avec le quotient).

→ Substitution :
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$.

Attention

Formules fausses On n'a **SURTOUT PAS** les résultats suivants :
- → si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n)$
- → si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n v_n \sim v_n$.
- → si $u_n \sim v_n$ alors $f(u_n) \sim f(v_n)$.

Propriété 16 *(Ordres de grandeur)*

- → Pour les suites tendant vers $+\infty$: soient $\alpha' > \alpha > 0$, $\beta' > \beta > 0$ et $b > a > 1$, on a

$$(\ln n)^{\alpha} \ll (\ln n)^{\alpha'} \ll n^{\beta} \ll n^{\beta'} \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n.$$

- → Pour les suites de limite nulle : soient $\alpha' > \alpha > 0$, $\beta' > \beta > 0$ et $0 < a < b < 1$, on a

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll a^n \ll b^n \ll \frac{1}{n^{\beta'}} \ll \frac{1}{n^{\beta}} \ll \frac{1}{(\ln n)^{\alpha'}} \ll \frac{1}{(\ln n)^{\alpha}}.$$

IV. DL À CONNAITRE

$\sin x$	$=$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$=$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
e^x	$=$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\operatorname{sh} x$	$=$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{ch} x$	$=$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\frac{1}{1+x}$	$=$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$=$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$=$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\arctan(x)$	$=$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^{\alpha}$	$=$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\tan x$	$=$	$x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$

V. EXERCICES

EXERCICES À FAIRE

Exercice 1

Comparer en $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto \frac{\ln^{\alpha} x}{x^{\beta}}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^{\gamma}}$ (les paramètres sont des réels).

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes (en essayant de faire le moins de calculs possibles) :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\arcsin x}{x\tan^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$

Exercice 3

Soient a et b deux réels, donner un équivalent simple en 0 de $\dfrac{a}{\sin(x)} - \dfrac{b}{\ln(1-x)}$.

Exercice 4

Calculer les développements limités (ou asymptotiques) suivants

1. $\ln(\frac{\sin x}{x})$ en 0 à l'ordre 4.
2. $\ln(1+\cos x)$ en 0 à l'ordre 5.
3. $(1+x)^{1/x}$ en 0 à l'ordre 2.
4. $(\cos x)^{\sin x}$ en 0 à l'ordre 3.
5. $\dfrac{x}{e^x-1}$ en 0 à l'ordre 2.
6. $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ en $+\infty$ à l'ordre 2.

Exercice 5

Donner un équivalent sous la forme la plus simple possible aux suites suivantes (puis donner leur limite éventuelle) :

a) $u_n = \dfrac{n^2+\ln n}{2n+3n(n+1)}$

b) $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n+\ln n}$

d) $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+2}$

e) $u_n = \dfrac{n!+2^n}{3^n+n^4}$

f) $u_n = \sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$

g) $u_n = \ln(\sin(\frac{1}{n}))$

h) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$

i) $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

j) $u_n = \dfrac{a^n+n^a}{n^{2a}+a^{2n}}$ (où $a>0$).

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes (en essayant de faire le moins de calculs possibles) :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x-x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x-x^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ (avec $a,b>0$).

f) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x+\cos x)^{1/x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{1/x}-e^{1/(x+1)})$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

Exercice 7

Ranger les expressions suivantes dans l'ordre croissant (pour la relation de comparaison « est négligeable devant en $+\infty$ »). Lorsque, pour deux expressions, aucune n'est négligeable devant l'autre, on précisera les autres relations de comparaison (équivalence, l'une est de l'ordre de l'autre, les deux sont du même ordre ou encore on ne peut rien dire) :

$$\frac{\ln x}{x^2}, \frac{1}{x^{3/2}}, \frac{\ln(2+\sin x)}{x^2+1}, \frac{x^2+\sin x}{x^4+1}, \frac{\sin x}{x^2}, \frac{\ln(\ln x)}{x^2}, \frac{2\sqrt{x}\ln x}{1+x^{5/2}}, \frac{\sqrt{x}+\ln x}{1+x^{5/2}}, 3e^{-2\ln x}.$$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $I=]-\pi,+\pi[$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ sinon. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 9

Justifier $\arccos(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

Exercice 10

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 11

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$ admet au voisinage de 0, une fonction réciproque et déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f^{-1} en 0.

Exercice 12

Montrer que l'équation $x\tan x = 1$ admet une unique solution sur $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On l'appelle x_n. Donner un équivalent de x_n puis un développement asymptotique à 3 termes.

Exercice 13

Soit $f_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ où $t \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f_t admet en 0 un développement limité à tout ordre n. Montrer que ce développement est de la forme
$$f_t(x) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t)x^k + o(x^n)$$
où P_k est un polynôme.
3. Montrer la relation $(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

5 Séries numériques

I. Généralités

L'essentiel - Séries numériques

→ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique :

- on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle (d'ordre n) de la série numérique de terme général u_n (on note $\sum u_n$ pour désigner « la série de terme général u_n »)
- on dit que $\sum u_n$ converge lorsque (S_n) admet une limite finie, sinon on dit qu'elle diverge,
- lorsque $\sum u_n$ converge, on note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite des sommes partielles. On note alors $R_n = S - S_n$ le reste d'ordre n. On a alors $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

→ on ne change pas *la nature* d'une série en changeant ses premiers termes (on peut utiliser des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$)

→ **si** $\sum u_n$ converge **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (et également $R_n = S - S_n \to 0$)

→ avec les notations précédentes, $u_n = S_n - S_{n-1}$ et, si la série converge, $u_n = R_{n-1} - R_n$.

→ étudier la suite (u_n) est équivalent à étudier la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ (ou $\sum(u_{n+1} - u_n)$).

II. Séries à termes positifs

Proposition 17 *(résultat fondamental)*

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. La suite des sommes partielles (S_n) est croissante. Elle est soit majorée et converge vers sa borne supérieure, soit non majorée et croissante vers $+\infty$.

L'essentiel - Séries à termes positifs

→ soient deux séries à **termes positifs** $\sum u_n$ et $\sum v_n$:

- si pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge,
- si $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ ou $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$ alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge,
- si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge

→ séries de référence :

- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$,
- $\sum q^n$ converge si $0 \leqslant q < 1$ et diverge si $q \geqslant 1$ (plus généralement $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$),
- $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$ (hors prog.)

→ règles de Riemann : soit $\sum u_n$ à termes positifs

- s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tend vers une limite finie ou est borné alors $\sum u_n$ converge,
- si $n u_n$ est minorée par $\ell \neq 0$, tend vers $\ell \neq 0$ ou vers $+\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

→ critère de d'Alembert : soit $\sum u_n$ une série à termes **strictement positifs**. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite finie ℓ alors :

- si $\ell \in [0,1[$, alors $\sum u_n$ converge,
- si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge,
- si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire.

MÉTHODE - ÉTUDIER LA NATURE D'UNE SÉRIE À TERMES POSITIFS

Lorsque $\sum u_n$ **est à termes positifs** :

→ comparaison à une série de référence (série de Riemann) par $\sim, o, \leqslant$

→ comparer en utilisant les règles de Riemann (si on ne voit pas comment faire la comparaison directement),

→ critère de d'Alembert (essentiellement lorsqu'il y a des produits, puissances, factorielles),

→ comparaison série-intégrale

→ majoration des sommes partielles (suite des sommes partielles croissante et majorée),

→ retour aux sommes partielles (calculs, simplifications par télescopage, transformations)

III. SÉRIES QUELCONQUES

L'ESSENTIEL - SÉRIES À TERMES QUELCONQUES

→ convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge

→ théorème des séries alternées : soit $\sum u_n$ où $u_n = (-1)^n a_n$ avec a_n de signe constant et $(|u_n|)$ **décroissante de limite nulle**, alors

- $\sum u_n$ converge,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$ et R_n et u_{n+1} sont de même signe (R_n du signe de son premier terme)
- notamment $|S_n|$ et $|S|$ sont majorées par $|u_0|$ (et du signe de u_0).

Remarque : dans le théorème des séries alternées, si $(|u_n|)$ est décroissante à partir du rang n_0 seulement, on a toujours la convergence, la majoration des restes (et leur signe) à partir du rang n_0 (mais plus la majoration des sommes partielles ou de la somme).

Attention

Majoration Si $\sum u_n$ est à termes quelconques, majorer $|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right|$ **ne sert à rien** pour étudier la convergence de la série. Seul le cas où les termes sont positifs donne un résultat lorsqu'on majore les sommes partielles. On peut cependant majorer $\sum_{k=0}^{n} |u_k|$ indépendamment de n pour étudier la convergence absolue de la série - ce n'est pas en général la méthode à tester en premier lieu.

IV. EXERCICES

NATURE, SOMME, ÉQUIVALENTS

Exercice 1

Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

b) $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n^3+1}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}}$

d) $\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

e) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

f) $(\ln n)^{-\ln n}$

g) $\dfrac{2.4.6\cdots(2n)}{n^n}$

h) $n^{1/n}-1$

i) $3^{-\sqrt{n}}$

j) $\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

Exercice 2

Calculer les somme suivantes si elles existent :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n}\operatorname{ch} n.$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$