

2

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

I. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

L'ESSENTIEL

- construction de l'intégrale sur un segment pour une fonction en escalier, extension aux fonctions continues par morceaux
- notation $\int_a^b f(t) dt$ et relation de Chasles
- propriétés : linéarité, positivité et croissance
- si f est **continu, positif** sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt = 0$ si et seulement si $f = 0$
- inégalité triangulaire pour une fonction continue par morceaux
- cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour une fonction **continu** : de signe constant pour une fonction à valeurs réelles, d'argument constant pour une fonction à valeurs complexes
- inégalité de Cauchy-Schwarz (continue par morceaux), cas d'égalité

L'ESSENTIEL - SOMMES DE RIEMANN

- Si f est continue par morceaux sur le **segment** $[a, b]$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$
- on peut toujours se ramener à $[0, 1]$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$.
- on peut supprimer/ajouter un nombre fini fixe d'indices dans la somme (commencer à 1, finir à $n \dots$)

L'ESSENTIEL - THÉORÈMES D'APPROXIMATION

- si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ en escalier telle que $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$.
- si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale P telle que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.

II. PRIMITIVES

Théorème 2 (théorème fondamental sur les primitives)

Soit f une fonction continue (par morceaux) sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a

L'ESSENTIEL - PRIMITIVES

- On appelle primitive d'une fonction continue f sur I toute fonction F de classe \mathcal{C}^1 sur I telle que $F' = f$.
- existence : $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a ,
- si f est continue sur I et F une primitive de f sur I , alors pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$,
- si f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $a \in I$, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.



III. CALCULS

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

L'ESSENTIEL

→ Intégration par parties : si f, g sont de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

→ Intégration par parties généralisée : si f, g sont de classe \mathcal{C}^n sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t) dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(n-1-k)}(t) \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(t)g(t) dt.$$

→ Changement de variable : soit f **continue** sur un intervalle I , et φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans I , on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

→ Changement de variable bijectif : soit f **continue par morceaux** sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , et φ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 d'un intervalle I sur un intervalle J contenant $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

L'ESSENTIEL - FORMULES DE TAYLOR

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Si $a \in I$, alors pour tout $x \in I$,

→ $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$, avec $R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$ (appelé reste-intégrale),

→ si $|f^{(n+1)}|$ est bornée par M_{n+1} sur I , alors on obtient la majoration $|R_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

→ **Inégalité de Taylor-Lagrange** : si $|f^{(n+1)}|$ est bornée par M_{n+1} sur $[a, b]$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

→ soit f de classe \mathcal{C}^n sur I et $a \in I$. Il existe une fonction ε , définie sur I , telle que

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

L'ESSENTIEL - SYMÉTRIES, PÉRIODICITÉ

Si f est une fonction continue par morceaux, alors

→ si f est *paire* sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$,

→ si f est *impaire* sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$,

→ si f est de période T , alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$ (périodicité),

- $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt$ (l'intégrale sur une période ne dépend pas du point de départ).



IV. EXERCICES

Exercice 1

Déterminer les fonctions continues de $[0, 1]$ dans lui-même qui vérifient $\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 2

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^{+*} . Montrer que

$$\left(\int_a^b f(t) dt\right) \cdot \left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right) \geq (b-a)^2.$$

Pour quelles fonctions y a-t-il égalité?

Exercice 3

Déterminer les limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

a) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

b) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$

c) $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$

e) $\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

Exercice 4

1. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . Montrer que $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Exercice 5

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \tan x dx$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n \tan x dx$

Exercice 6

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$

2. Montrer que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 7

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On définit F pour $x \in [0, 1]$ par $F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ et déterminer F'' . En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t) dt \right) du.$$

**Exercice 8**

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

1. Étudier la fonction f .
2. Donner un équivalent simple de f en 0.
3. Comparer $f(x)$ et $f(\frac{1}{2x})$ et en déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 9

Étudier la fonction g définie par $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 0. Déterminer un équivalent de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 10 (Mines-Ponts)

Soit $F : x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$. Déterminer l'ensemble de définition de F , et montrer que F est constante. En déduire la valeur de $\int_0^1 \arcsin \sqrt{t} dt$.

Exercice 11

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a < b$ deux réels. Montrer $x \mapsto \int_a^b f(x+t) \cos t dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 12

Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2}$.

Exercice 13

1. Montrer que pour $x > -\frac{1}{2}$, on a $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. Soit f continue sur $[0, 1]$ et x réel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k+n}\right)$.

Exercice 14 (important)

Soit f continue sur \mathbb{R} et T -périodique. Relier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ à $\int_0^T f(t) dt$

Exercice 15

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue non nulle telle que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$. Montrer que f change au moins n fois de signe sur $]a, b[$.

Exercice 16

Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$.

**Exercice 17**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle (avec $a < b$). On note M le maximum de f sur $[a, b]$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0, M[$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b f(t)^n dt \geq \alpha(M - \varepsilon)^n.$$

2. Déterminer la limite, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f(t)^n dt \right)^{1/n}$.

Exercice 18 (Centrale MP)

☆

Soit $a \in]0, 1[$. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{ax} f$.

Exercice 19 (Théorème de relèvement)

☆

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}^*$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Justifier l'existence d'une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f = \exp \circ g$ (faire apparaître une équation différentielle vérifiée par g).
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ de période 2π . Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt \in \mathbb{Z}$.

Exercice 20 (Mines MP 2016)

☆

1. Soit $u \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^u |\sin(\lambda t)| dt$. Puis, pour $\alpha, \beta > 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)| dt$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt$.

Exercice 21

☆☆

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$. On note, pour $q \in]0, 1[$, $J(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n)$.

1. Justifier l'existence de $J(q)$.
2. Montrer que $\lim_{q \rightarrow 1^+} (1 - q)J(q) = \int_0^1 f(t) dt$.

EXERCICES EN VRAC**Exercice 22 (Mines MP 2021)**

☆

Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que, pour toute $f \in E$, $\int_0^1 |f' - f| \geq e^{-1}$. La constante e^{-1} est-elle optimale?

Exercice 23 (ENS (première question))

☆

1. Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que, pour tout réel $\lambda > 0$, pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^2 de $[a, b]$ dans \mathbb{R} telle que φ' soit monotone et vérifie $|\varphi'| \geq \lambda$, on ait $\left| \int_a^b e^{i\varphi} \right| \leq \frac{C_1}{\lambda}$.
2. ☆☆☆ pour les courageux 5/2 : généraliser le résultat lorsque φ est seulement de classe \mathcal{C}^1 (et avec les mêmes autres hypothèses).

Exercice 24 (Mines MP 2021)

Soient $n \geq 2$ et $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n$ des réels.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i = 1, \dots, n$, $\int_{x_i}^{y_i} P = 0$. Montrer que P est nul.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$, non nul, tel que $\int_{x_i}^{y_i} P = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.