

2

DL, ÉQUIVALENTS ET SUITES

I. ÉQUIVALENTS

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de \mathbb{R} et toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

Définition 1 (comparaison locale des fonctions)

Soit f, g deux fonctions définies sur I , a dans ou au bord de I .

- $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$: il existe un voisinage \mathcal{V} de a et une fonction ε définie sur \mathcal{V} avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$, tels que, pour $x \in I \cap \mathcal{V}$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.
- $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$: il existe un voisinage \mathcal{V} de a et une fonction M définie et bornée sur \mathcal{V} , tels que, pour $x \in I \cap \mathcal{V}$, $f(x) = g(x)M(x)$.
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$: il existe un voisinage \mathcal{V} de a et une fonction ε définie sur \mathcal{V} avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$, tels que, pour $x \in I \cap \mathcal{V}$, $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$.

Propriété 1 (en pratique)

Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a , alors

$$\begin{aligned} f(x) = o_a(g(x)) &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ f(x) = O_a(g(x)) &\iff \text{il existe } M \geq 0, \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \text{ sur un voisinage de } a \\ f(x) \underset{a}{\sim} g(x) &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \end{aligned}$$

⚠ Attention

Équivalence à un réel

- Écrire $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$ équivaut à $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si $\ell \neq 0$.
- Écrire $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ signifie que f est nulle sur un voisinage de a et pas seulement que la limite de f est nulle.

Remarque : la notation $f(x) \ll g(x)$ (non officielle) signifie que $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ (pour simplifier l'écriture dans les propriétés qui suivent)

Propriété 2 (croissances comparées : échelles de grandeur en 0)

- si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $x^\alpha \underset{0}{\ll} \frac{1}{|\ln x|^\beta} \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} |\ln x|^\beta \underset{0}{\ll} \frac{1}{x^\alpha}$.
- si $\alpha < \beta$, $|\ln x|^\alpha \underset{0}{\ll} |\ln x|^\beta$ et $x^\beta \underset{0}{\ll} x^\alpha$.

En résumé, si le terme tend vers l'infini, plus l'exposant est grand, plus il va « vite » vers l'infini. S'il tend vers 0, alors c'est le contraire.

Propriété 3 (croissances comparées : échelles de grandeur en $+\infty$)

- si $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$, alors $\ln^\beta x \underset{+\infty}{\ll} x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} a^x$.
- Si $\alpha < \beta$, alors $\ln^\alpha x \underset{+\infty}{\ll} \ln^\beta x$ et $x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} x^\beta$.
- Si $1 < a < b$, alors $1 \underset{+\infty}{\ll} a^x \underset{+\infty}{\ll} b^x$.

Remarque : en posant $\alpha = \ln a$, on a $a^x = e^{\alpha x}$ - on peut alors utiliser l'échelle des fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ au lieu de $x \mapsto a^x$ avec $a > 1$.

Propriété 4 (Produits et quotients sur les équivalents)

Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors

- $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
- f_1 et g_1 sont de même signe au voisinage de a - si l'une ne s'annule pas sauf éventuellement en a , l'autre non plus sur un voisinage de a ,
- si f_2 ou g_2 ne s'annule pas sauf éventuellement en a , $f_1 / f_2 \underset{a}{\sim} g_1 / g_2$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1^n \underset{a}{\sim} g_1^n$. Se généralise à une puissance réelle fixe si les fonctions sont strictement positives.

⚠ Attention

Opérations interdites

- ajouter des équivalents entre-eux ou même d'ajouter un même terme à des termes équivalents,
- composer des équivalents par la gauche : si $f(x) \sim_a g(x)$, alors $h(f(x))$ et $h(g(x))$ ne sont pas forcément équivalents.

Propriété 5 (Composition)

- Si $f \sim_a g$ et $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$, alors $f \circ h \sim_b g \circ h$ (substitution)
- $e^f \sim_a e^g$ si et seulement si $f - g \xrightarrow{a} 0$ (et pas lorsque $f \sim_a g$),
- si $f \sim_a g$ et que f (ou g) tend vers **une limite finie ℓ positive ou nulle mais différente de 1, ou vers $+\infty$** alors $\ln(f) \sim_a \ln(g)$ (avec des fonctions strictement positives).

Propriété 6 (cas dérivable)

Si f dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors $f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} f'(a).h$ (ou $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a).(x-a)$).

$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$	$\tan(x) \underset{0}{\sim} x$	$\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$	$\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x$	$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$	$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$	$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	$\operatorname{th}(x) \underset{0}{\sim} x$	

⚠ Attention

un seul terme significatif On a $e^x \sim_0 1$ et $e^x - 1 \sim_0 x$ mais lorsqu'on écrit $e^x \sim_0 1 + x$, le terme x n'est pas du tout significatif (on a aussi $e^x \sim_0 1 - x$ ou $1 + 2x$ ou $1 + x^2 \dots$). Même si l'écriture est mathématiquement correcte, on supprime tout terme non significatif dans un équivalent afin notamment de ne pas enchaîner sur un erreur impardonnable!!!

II. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

⚠ Attention

remarque Écrire un développement limité revient à écrire une égalité entre deux termes : la fonction et son développement limité (terme $x^n \varepsilon(x)$ **compris**). On peut donc remplacer $f(x)$ par son DL. Il faut en revanche bien comprendre qu'on ne sait rien sur le terme d'erreur $x^n \varepsilon(x)$ (à part la limite de ε en 0). Ainsi, on ne pourra en déduire qu'un comportement local (autour de 0) de la fonction ou encore une limite. Cela ne permettra par exemple **JAMAIS** de montrer une relation ou une inégalité sur un intervalle.

Proposition 7 (existence théorique d'un DL)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a et pour h dans un voisinage 0 (tel que $a+h \in I$)

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + h^n \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Proposition 8 (opérations sur les DL)

en dehors des opérations usuelles simples (combinaison linéaire et produit), on a

- **Intégration** : si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et si f' admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en intégrant terme à terme le DL de f' et en rajoutant $f(0)$:

$$\begin{aligned} \text{si } f'(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n), \text{ alors} \\ f(x) &= f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}). \end{aligned}$$

- **Dérivation** : si f et f' admettent des $DL(0)$ respectivement à l'ordre $n+1$ et n , alors la partie régulière du DL de f' s'obtient en dérivant la partie régulière du DL de f .
- **Composition** : si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q et $\boxed{f(0)=0}$, alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en tronquant au degré n le polynôme $Q \circ P$.
- **Division** : il suffit de savoir inverser un développement limité. Une fois mis en facteur la partie principale de g , on se retrouve à inverser $g(x) = a_k x^k (1 + u(x))$ où u est une fonction qui tend vers 0. On applique alors les règles de composition avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

! Attention

Dérivation, intégration

- « primitiver » un DL ne pose pas de difficulté
- on **ne peut pas** dériver un DL directement

! Attention

Composition Lorsqu'on doit composer des développements limités, la première chose à faire et **à ne jamais oublier**, est de vérifier qu'on compose bien au bon point. Si on doit calculer le $DL_3(0)$ de $\exp(\cos(x))$, il ne suffit pas de remplacer u par $1 - x^2/2 + o(x^3)$ dans le $DL_3(0)$ de $\exp(u)$ puisque la limite de \cos en 0 est 1.

! Attention

DL et équivalents

- il faut bien comprendre la grande différence entre ces deux notions. L'équivalent est un nouvel opérateur avec des règles bien précises. Un développement limité revient à écrire une égalité. On peut donc toujours remplacer une fonction par l'un de ses DL, du moment qu'on n'oublie pas le terme $o(x^n)$ ou $x^n \varepsilon(x)$. **On ne remplacera JAMAIS une fonction par un équivalent lorsqu'on travaille avec des égalités.**
- Écrire un développement limité revient à écrire une fonction comme somme de termes de plus en plus négligeables. Le premier de ces termes est donc un équivalent de la fonction. Le DL est en quelque sorte une généralisation des équivalents qui permet d'utiliser beaucoup plus d'opérations (la somme par exemple). Il faut également remarquer qu'on aura souvent recours à un DL pour calculer un équivalent qui n'est pas immédiat.

L'ESSENTIEL - JUSTIFIER L'EXISTENCE D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN 0

- en montrant qu'on peut écrire $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ au voisinage de 0 à l'aide des DL usuels et des opérations : combinaisons linéaires, produit, composition (et inverse/quotient) et intégration d'un DL (mais pas en dérivant!!!)
- lorsque la fonction est de classe \mathcal{C}^n sur un voisinage de 0

III. COMPARAISON DE SUITES

On a des définitions similaires à celles pour les fonctions - la plupart du temps on utilise les versions particulières suivantes (elles ne fonctionnent plus lorsque les suites s'annulent une infinité de fois).

Proposition 9 (comparaisons - version pratique)

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites et les termes de (v_n) sont non nuls à partir d'un certain rang n_0 , alors

- on a $u_n = O(v_n)$ si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée.
- on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Propriété 10 (règles sur les comparaisons)

- Transitivité :
 - Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
 - Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ (idem avec O).
- Sommes :
 - Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
 - on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n + v_n \sim v_n$.
 - **pas de résultat sur somme et différence d'équivalents.**
- Produits :
 - Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$ alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$ (résultat semblable avec le quotient).
 - Si $u_n = o(u'_n)$ et $v_n = o(v'_n)$ alors $u_n v_n = o(u'_n v'_n)$ (résultat semblable avec O mais pas avec le quotient).
- Substitution :
 - Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(u_n)$.

! Attention

Formules fausses On n'a **SURTOUT PAS** les résultats suivants :

- si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n)$
- si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n v_n \sim v_n$.
- si $u_n \sim v_n$ alors $f(u_n) \sim f(v_n)$.

Propriété 11 (Ordres de grandeur)

→ Pour les suites tendant vers $+\infty$: soient $\alpha' > \alpha > 0$, $\beta' > \beta > 0$ et $b > a > 1$, on a

$$(\ln n)^\alpha \ll (\ln n)^{\alpha'} \ll n^\beta \ll n^{\beta'} \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n.$$

→ Pour les suites de limite nulle : soient $\alpha' > \alpha > 0$, $\beta' > \beta > 0$ et $0 < a < b < 1$, on a

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll a^n \ll b^n \ll \frac{1}{n^{\beta'}} \ll \frac{1}{n^\beta} \ll \frac{1}{(\ln n)^{\alpha'}} \ll \frac{1}{(\ln n)^\alpha}.$$

IV. DL À CONNAITRE

$\sin x$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
e^x	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\operatorname{sh} x$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{ch} x$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\arctan(x)$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\tan x$	$= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$

V. QUELQUES RAPPELS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

On s'intéresse uniquement aux suites à valeurs réelles ou complexes.

On rappelle que l'étude d'une suite complexe peut éventuellement se ramener à l'étude des suites des parties réelles et imaginaires (mais ce n'est pas forcément conseillé - voire même souvent peu utile)

Propriété 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell = \alpha + i\beta$ un complexe (avec α et β réels). On note $x_n = \operatorname{Re}(u_n)$ et $y_n = \operatorname{Im}(u_n)$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \beta.$$

SUITES RÉELLES - UTILISATION DE LA RELATION D'ORDRE

Théorème 2 (Théorème d'encadrement)

Soient trois suites à valeurs réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) . Si

- il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$,
- les suites u et w convergent vers une même limite ℓ ,

alors la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ .



Une erreur à ne pas faire

Si on fait les mêmes hypothèses mais en supposant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(w_n)_n$ vers $\ell' > \ell$ alors il ne faut **surtout pas** conclure que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite comprise entre ℓ et ℓ' . Si on prouve que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, *et seulement dans ce cas*, on peut en déduire l'encadrement sur les limites.

Théorème 3 (Théorème fondamental)

- Première version :
 - Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.
 - Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.
- Seconde version :
 - soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante, alors
 - soit elle est majorée et dans ce cas elle converge. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$.
 - soit elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration : On le fait pour la première partie. Soit $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$: A est une partie non vide majorée de \mathbb{R} , donc A admet une borne supérieure M . On va montrer que la suite converge vers M . En effet, soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la borne supérieure, il existe un élément de A supérieur à $M - \varepsilon$ (et inférieur à M). Soit u_{n_0} cet élément. Alors, puisque la suite est croissante, pour tout $n \geq n_0$, on a $M - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$. Donc on a prouvé

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, M - \varepsilon \leq u_n \leq M,$$

ce qui prouve le théorème.

Définition 2 (Suites adjacentes)

On dit que deux suites u et v sont adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

Propriété 13 (Suites adjacentes)

Si deux suites u et v sont adjacentes, alors elles sont toutes les deux convergentes et de même limite. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ et v_n encadrent la limite commune.

Une conséquence :

Théorème 4 (Segments emboîtés)

Soient deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient

- pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$
- pour tout $n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$.

Il existe un unique réel ℓ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.

SUITES EXTRAITES, VALEURS D'ADHÉRENCES

Définition 3 (Suite extraite)

On appelle suite extraite de la suite u toute suite v telle qu'il existe σ est une application strictement croissante de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\sigma(n)}$. La fonction σ s'appelle (fonction) extractrice.

Remarque : pour construire une extractrice, on rappelle le résultat suivant venant du cours sur la dénombrabilité : toute partie infinie A de \mathbb{N} est en bijection avec \mathbb{N} . Cela signifie qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$, ce qui revient numéroter ses éléments. Cela ne suffit pas pour construire des extractrices car on a besoin d'une bijection croissante. On peut le faire avec la propriété du minimum pour un ensemble non vide. On définit $\varphi(0) =$

min A , puis $\varphi(1) = \min(A \setminus \{\varphi(0)\})$ et plus généralement $\varphi(n) = \min(A \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\})$. Cela permet d'ordonner de façon croissante les éléments de A .

On dispose de deux résultats simples :

Propriété 14

1. Si u est une suite numérique de limite ℓ , alors toute suite extraite converge également vers ℓ .
2. Soit une suite u . Si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ , alors la suite u converge également vers ℓ .

Théorème 5 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle ou complexe bornée admet une valeur d'adhérence.

On a enfin le résultat important suivant :

Propriété 15

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe **bornée**. Si elle admet une unique valeur d'adhérence ℓ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Démonstration : on suppose que u ne converge pas vers $\ell \in \mathbb{C}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m, |u_n - \ell| \geq \varepsilon$$

Cela signifie que $A = \{n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \geq \varepsilon\}$ est infini. Il existe donc une extractrice φ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$ vérifie $|v_n| \leq M$ et $|v_n - \ell| \geq \varepsilon$. On peut extraire une suite convergente de la suite bornée v . Cela devient une suite extraite de u qui converge vers ℓ' et avec $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$ par passage à la limite. La suite admet une seconde valeur d'adhérence ce qui est une contradiction.

Complément hors programme : suites de Cauchy

Définition 4 (Suite de Cauchy)

On dit qu'une suite réelle ou complexe (u_n) est une suite de Cauchy lorsque,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geq n_0, q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Propriété 16 (Suite de Cauchy)

Si (u_n) est une suite de Cauchy réelle ou complexe, alors la suite converge.

Démonstration :

- la suite est bornée : on écrit la proposition avec $\varepsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - u_{n_0}| \leq 1$. La suite est bornée à partir du rang n_0 donc bornée.
- supposons que ℓ et ℓ' sont deux valeurs d'adhérences de u . Il existe des extractrices φ et ψ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\psi(n)} = \ell'$. En écrivant la définition d'une suite de Cauchy (et avec le fait que $\varphi(n) \geq n$, de même avec ψ), si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)}| < \varepsilon$. En limite, on obtient $|\ell - \ell'| \leq \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell = \ell'$.

D'après un résultat précédent, la suite converge vers son unique valeur d'adhérence.

SUITES USUELLES

On passe les propriétés sur les suites arithmétiques et géométriques qui sont évidemment connues sans aucune hésitation (expressions, sommes des termes, limites)

Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Aussi appelées suites arithmético-géométriques. Ce sont les suites vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des complexes fixés avec $a \neq 0$. On se ramène facilement à l'un des cas précédents :

1. si $a = 1$, c'est une suite arithmétique.
2. si $a \neq 1$, on cherche un réel ℓ qui est un point fixe pour la relation : $\ell = a\ell + b$ soit $\ell = \frac{b}{1-a}$. On peut alors écrire

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & au_n + b \\ \ell & = & a\ell + b \\ \hline u_{n+1} - \ell & = & a(u_n - \ell) \end{array}$$

Ainsi la suite $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique, on trouve facilement sa forme générale, puis celle de u_n .

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère une suite u telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$, où $ac \neq 0$ (sinon on est ramené à une suite plus simple). L'ensemble des suites vérifiant cette relation est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2.

On cherche des solutions sous la forme r^n , cela nous amène (après simplification par r^n) à l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. On appelle r_1 et r_2 les deux racines de cette équation. Il existe alors deux constantes A et B telles que

- si $r_1 \neq r_2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$,
- si $r_1 = r_2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (An + B)r_1^n$.

⚠ Attention

lorsque a, b et c sont réels (ainsi que les premiers termes de la suite) et que les deux racines $r_1 \neq r_2$ sont des complexes conjugués (discriminant négatif du trinôme), les constantes A et B sont aussi des complexes. On peut, si l'on préfère, noter $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et dans ce cas, u_n s'écrira sous la forme

$$u_n = \rho^n (C \cos n\theta + D \sin n\theta).$$

Suites homographiques (hors programme)

On étudie ici les suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$.

On suppose que c n'est pas nul (sinon on est ramené à une relation linéaire) et que a et b non plus (sinon, aucun intérêt). On donne simplement la méthode générale (cela ne garantit pas l'existence de la suite) :

1. On cherche les points fixes de la relation, c'est à dire les nombres l tels que $l = \frac{al + b}{cl + d}$. Cela donne une équation du second degré (car $c \neq 0$) qui admet deux racines.
2. On applique alors les méthodes suivantes :
 - *Premier cas - deux racines distinctes α et β* : on utilise la suite auxiliaire

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}.$$

On montre qu'elle est géométrique, en calculant et simplifiant v_{n+1}/v_n . Cela permet d'exprimer v_n , puis u_n et même d'obtenir éventuellement la limite de u .

→ *Deuxième cas - une racine double α* : on utilise la suite auxiliaire

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

On montre qu'elle est arithmétique, en calculant et simplifiant $v_{n+1} - v_n$. Cela permet d'exprimer v_n , puis u_n et même d'obtenir éventuellement la limite de u .

SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE

Il est nécessaire de connaître certains résultats généraux ainsi que quelques méthodes. Nous étudions des suites définies par un premier terme u_0 (ou u_1, u_2, \dots) et vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

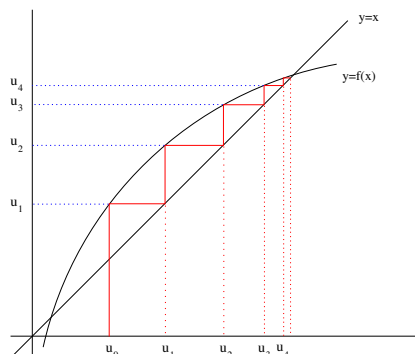
Définition de la suite

Théorème 6 (cas usuel d'existence)

Si f est une fonction définie sur un ensemble A , si A est stable par f et si $a \in A$ alors il existe une unique suite u vérifiant $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ (et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$).

Étude graphique

Il est plus que nécessaire de savoir ce qu'on cherche à montrer avant de la faire... Pour cela la méthode la simple consiste à tracer les premiers termes de la suite : on trace sur une même graphique la courbe représentatrice de f , la droite d'équation $y = x$, on part du point u_0 , on calcule son image $f(u_0) = u_1$ que l'on fait ensuite « rebondir » sur la droite, puis sur la courbe pour avoir u_2 ... Graphiquement, cela donne cela :



Une fois ce dessin réalisé, on peut émettre plusieurs conjectures (dans ce cas de figure) : la suite semble être croissante, majorée et convergente vers ℓ , point d'intersection de la courbe et de la droite. C'est à peu près le plan d'étude que l'on va suivre pour la démonstration de la convergence dans ce genre de situation.

Limites possibles

Proposition 17 (Limite)

Soit u une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue sur I . Si u converge vers une limite $\ell \in I$ alors ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$ (on dit que ℓ est un point fixe de f).

⚠ Attention

Ce théorème ne permet pas de montrer que la suite est convergente. Elle permet simplement de montrer que **SI** elle converge, **ALORS** sa limite vérifie une certaine propriété. En général, on prouve que la suite converge puis à l'aide de ce théorème, on en déduit (plus ou moins directement) la valeur de la limite.

VARIATIONS DE LA SUITE

Lorsque cela est possible, il est extrêmement intéressant de trouver les intervalles stables pour f , c'est à dire les intervalles I qui vérifient $f(I) \subset I$. L'avantage : une fois que la suite rentre dans I , elle y reste...

Proposition 18 (cas croissant)

Si f est croissante, alors u est monotone. Le sens est alors déterminé par la position de u_1 par rapport à u_0 .

Démonstration : Il suffit d'appliquer f à la relation $u_1 \leq u_0$ pour obtenir $u_2 \leq u_1$ et ainsi de suite... (on change les sens si $u_1 \geq u_0$).

Il est souvent intéressant d'étudier le signe de $f(x) - x$. En effet, si on sait limiter les valeurs de u à un intervalle I et que le signe de $f(x) - x$ est constant sur cet intervalle, on aura alors les variations de u . Si de plus l'intervalle est majoré ou minoré dans le bon sens (c'est à dire si la suite est croissante et que I est majoré) alors on aura prouvé la convergence de la suite vers une valeur dans I ou à son bord.

Proposition 19 (cas décroissant)

Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens opposé.

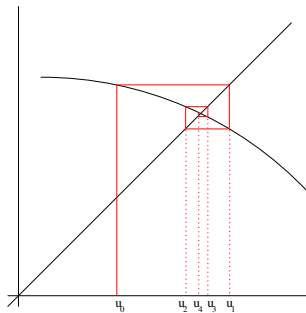


FIGURE 2.1 – f décroissante - cas 1

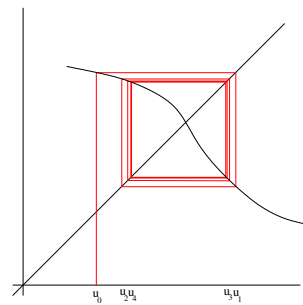


FIGURE 2.2 – f décroissante - cas 2

Une méthode consiste à essayer de majorer la suite $|u_n - l|$ par quelque chose qui tend vers 0. Cela peut se faire à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, si on peut majorer $|f'|$ par une constante positive M strictement inférieure à 1 (point fixe attractif). En effet on aura alors $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq M|u_n - l|$, ce qui permettra d'obtenir une majoration du type $|u_n - l| \leq AM^n$, et de conclure (si $M < 1$).

VI. EXERCICES

Exercice 1

Comparer en $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$ (les paramètres sont des réels).

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes (en essayant de faire le moins de calculs possibles) :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arcsin x}{x \tan^2 x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

Exercice 3

Soient a et b deux réels, donner un équivalent simple en 0 de $\frac{a}{\sin(x)} - \frac{b}{\ln(1-x)}$.

Exercice 4

Calculer les développements limités (ou asymptotiques) suivants

1. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ en 0 à l'ordre 4.
2. $\ln(1 + \cos x)$ en 0 à l'ordre 5.
3. $(1+x)^{1/x}$ en 0 à l'ordre 2.
4. $(\cos x)^{\sin x}$ en 0 à l'ordre 3.
5. $\frac{x}{e^x - 1}$ en 0 à l'ordre 2.
6. $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ en $+\infty$ à l'ordre 2.

Exercice 5

Donner un équivalent sous la forme la plus simple possible aux suites suivantes (puis donner leur limite éventuelle) :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } u_n = \frac{n^2 + \ln n}{2n + 3n(n+1)} & \text{d) } u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n+2} & \text{g) } u_n = \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) & \text{j) } u_n = \frac{a^n + n^a}{n^{2a} + a^{2n}} \text{ (où } a > 0\text{).} \\ \text{b) } u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} & \text{e) } u_n = \frac{n! + 2^n}{3^n + n^4} & \text{h) } u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} & \\ \text{c) } u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{n + \ln n} & \text{f) } u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)} & \text{i) } u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}). & \end{array}$$

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes (en essayant de faire le moins de calculs possibles) :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1) - (x+1) \ln x & \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} & \text{(avec } a, b > 0\text{).} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x+1)}) & \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2) \frac{1}{x-x^2} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{1/x} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x \ln x} & \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x+x^2) \frac{1}{x-x^2} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1-x + \ln x} & & \\ & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} & & \end{array}$$

Exercice 7

Ranger les expressions suivantes dans l'ordre croissant (pour la relation de comparaison « est négligeable devant en $+\infty$ »). Lorsque, pour deux expressions, aucune n'est négligeable devant l'autre, on précisera les autres relations de comparaison (équivalence, l'une est de l'ordre de l'autre, les deux sont du même ordre ou encore on ne peut rien dire) :

$$\frac{\ln x}{x^2}, \frac{1}{x^{3/2}}, \frac{\ln(2 + \sin x)}{x^2 + 1}, \frac{x^2 + \sin x}{x^4 + 1}, \frac{\sin x}{x^2}, \frac{\ln(\ln x)}{x^2}, \frac{2\sqrt{x} \ln x}{1 + x^{5/2}}, \frac{\sqrt{x} + \ln x}{1 + x^{5/2}}, 3e^{-2 \ln x}.$$

Exercice 8 (revient souvent)

Soit f la fonction définie sur $I =]-\pi, +\pi[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ sinon. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Exercice 9

Justifier $\arccos(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

Exercice 10

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 11

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$ admet au voisinage de 0, une fonction réciproque et déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f^{-1} en 0.

Exercice 12

Soit $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ où $t \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f_t admet en 0 un développement limité à tout ordre n . Montrer que ce développement est de la forme

$$f_t(x) = \sum_{k=0}^n P_k(t)x^k + o(x^n)$$

où P_k est un polynôme.

3. Montrer la relation $(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

SUITES NUMÉRIQUES**Exercice 13**

Soit z une suite définie par un premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Montrer que (z_n) converge et déterminer sa limite en fonction du module et d'un argument de z_0 .

Exercice 14

On considère l'équation $P_n(x) = x^n + x - 1 = 0$.

1. Montrer qu'elle possède une unique solution positive. On l'appelle x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 15 (Suite de Fibonacci)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer les relations suivantes, pour $n \geq 1$,
 - (a) $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$.
 - (b) $u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$
 - (c) $u_n^2 - u_{n-1} u_{n+1} = (-1)^n$
2. Déterminer la valeur de u_n en fonction de n .
3. Donner la limite de u_{n+1}/u_n .
4. Soit $\alpha > 0$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = v_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1}^\alpha + v_n^\alpha.$$

- (a) Montrer que v_n est croissante.
- (b) Donner une relation vérifiée par une (la) limite éventuelle ℓ de v_n
- (c) Montrer que si $\alpha \in]0, 1[$, alors v_n est majorée par ℓ et conclure.
- (d) Montrer que si $\alpha > 1$, alors v_n est minorée par ℓ et conclure.

Exercice 16

Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{x_n} + x_n = n$. Donner un développement asymptotique à trois termes de cette suite.

Exercice 17 (Suites définies par récurrence)

Étudier les suites définies par

1. $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sin u_n$
2. $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$
3. $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$

Exercice 18 (Quelques résultats de densité)

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à 0.
 - (a) Justifier l'existence de $a = \inf\{g \in G, g > 0\}$.
 - (b) *Premier cas* : on suppose $a > 0$. Montrer que $a \in G$, puis que $G = a\mathbb{Z}$.
 - (c) *Second cas* : on suppose que $a = 0$. Montrer que G est dense dans \mathbb{R} .
2. Application : soit θ un réel tel que $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$. Montrer que l'ensemble $\{\sin(n\theta), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$ (*indication* : considérer l'ensemble $\{n\theta + 2k\pi, (n, k) \in \mathbb{Z}^2\}$).
3. (a) Soit u et v deux suites réelles qui divergent vers $+\infty$ et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que $H = \{u_n - v_p, (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} .
 (b) Montrer que la suite $(\sin(\pi\sqrt{n}))$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 19 (encore de la densité)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ et $f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $\{e^{if(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité.

EXERCICES EN VRAC**Exercice 20 (Centrale MP 2021)**

Soit $n \geq 3$. On pose $F_n = X^n - nX + 1$.

1. Montrer que F_n admet exactement deux racines $x_n < y_n$ dans \mathbb{R}^{+*} .
2. Montrer que (x_n) est décroissante, tend vers 0 et vérifie $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Donner un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$.

Exercice 21

Montrer que l'équation $x \tan x = 1$ admet une unique solution sur $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On l'appelle x_n . Donner un équivalent de x_n puis un développement asymptotique à 3 termes.

Exercice 22 (Mines MP 2022)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n dans \mathbb{R}_+ .
2. Calculer $f_n\left(1 + \frac{2}{n}\right)$. Montrer que la suite (x_n) est convergente et trouver sa limite.
3. On pose $u_n = n(x_n - 1)$ et $h : x \mapsto e^x(x-1)$. Montrer que $h(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
4. Montrer que $x_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, où α désigne la solution de l'équation $h(x) = 1$.

Exercice 23 (Mines MP 2021)

1. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) \rightarrow \ell$.
Soient $a > 0, \alpha > 1, \lambda > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, a], [0, a])$. On suppose que $f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit le seul point fixe de f sur $[0, \varepsilon]$.
3. On suppose que $u_0 \in [0, \varepsilon]$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.
4. Donner un équivalent en 0 de $f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$.
5. Donner un équivalent de u_n .
6. Appliquer 5. à $f = \sin$ et à $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 24 (limsup, liminf et applications)

Soit (u_n) une suite de réels. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \sup_{k \geq n} u_k$ et $V_n = \inf_{k \geq n} u_k$ (ces valeurs sont éventuellement $\pm\infty$)

1. Lorsque u n'est pas majorée, que peut-on dire sur la suite (U_n) ?
2. On suppose que la suite u est bornée.
 - (a) Justifier que les deux suites admettent des limites finies qu'on notera $\limsup u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ (une autre notation fréquente est $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$) et $\liminf u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ (ou également $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$)
 - (b) Soient u et v deux suites bornées de réels. On suppose qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0, u_n \leq v_n$. Quel peut-on dire entre $\limsup u_n$ et $\limsup v_n$?
 - (c) Soit φ une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Justifier que $\liminf u_n \leq \varphi \leq \limsup u_n$.
 - (d) Justifier que la suite u converge vers ℓ si et seulement si $\limsup u_n = \liminf u_n = \ell$.
 - (e) Justifier que $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite u (de même $\liminf u_n$ est la plus petite).
3. On dit qu'une suite u est *sous-additive* lorsque, pour tout $m, n \in \mathbb{N}, u_{m+n} \leq u_n + u_m$ (elle n'est plus forcément bornée).
 - (a) Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n . Justifier que $u_m \leq qu_n + u_r$.
 - (b) En déduire que $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \limsup \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}$.
 - (c) En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge.
 - (d) Dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs (pour simplifier), redémontrer - sans utiliser les limites sup/inf - que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers $\ell = \inf \left\{ \frac{u_k}{k}, m \in \mathbb{N}^* \right\}$.
4. d'après X 2021 : Un n -chemin dans \mathbb{Z}^2 est une $(n+1)$ -liste (x_0, \dots, x_n) d'éléments de \mathbb{Z}^2 telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \|x_{k+1} - x_k\|_1 = 1$. Un tel chemin est dit simple lorsque ses éléments sont distincts. On note A_n le nombre de n -chemins simples partant de $(0, 0)$. Montrer qu'il existe un réel $\gamma \in [2, 4]$ tel que, pour tout $t > \gamma, A_n = o(t^n)$ et, pour tout $t \in [0, \gamma[, t^n = o(A_n)$.

Exercice 25 (Polytechnique 2020)

1. Soit (p_n) la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que $\left(\frac{p_{n+1}}{p_1 \times \dots \times p_n}\right)$ tend vers 0.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit q_n le plus petit nombre premier ne divisant pas n . Montrer que $\frac{q_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.