3 Intégrales généralisées

I. Intégration sur un intervalle

Généralités sur un intervalle $[a,b[$

Définition 5 *(Convergence de l'intégrale)*

On dit que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b (à gauche si $b \in \mathbb{R}$). On note alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ cette limite. Sinon on dit que l'intégrale est divergente.

Propriété 20

On suppose que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent (avec $b > a$)

- → linéarité : $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\int_a^b (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t$ converge avec $\int_a^b (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$,
- → positivité : si $f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$,
- → caractère défini : si $f \geqslant 0$, f **continue** et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors f est nulle sur $[a,b[$.
- → indépendance du point base : si $c \in]a,b[$ alors $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque : attention, si $\int_a^b (f+g)$ converge, on n'a pas forcément la convergence des deux intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$.

Cas des fonctions positives

Propriété 21 *(propriété principale)*

Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et **positive** alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante sur $[a,b[$. On a alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \iff F \text{ admet une limite finie en } b \iff F \text{ est majorée sur } [a,b[.$$

Remarque : puisque F est **croissante**, on peut ramener l'étude de la convergence de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ à l'étude de la limite d'une suite $\int_a^{b_n} f(t)\mathrm{d}t$ où b_n tend vers b. Par exemple, pour étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ lorsque $f \geqslant 0$, on peut s'intéresser à la suite $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ ou $\int_0^{n\pi} f(t)\mathrm{d}t \ldots$

Propriété 22 *(Critères de comparaison)*

Si f et g sont continues par morceaux et **positives** sur $[a,b[$, alors

- → si $0 \leqslant f \leqslant g$: $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge,
- → si $f = \underset{b}{o}(g)$ ou $f = \underset{b}{O}(g)$: $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge,
- → si $f \underset{b}{\sim} g$: $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge $\iff \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

FONCTIONS QUELCONQUES

Définition 6 *(Intégrabilité)*

On dit que f, continue par morceaux sur $[a,b[$, est intégrable sur $[a,b[$ lorsque $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge (on dit aussi que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **absolument convergente**).

Théorème 7 *(Intégrabilité et convergence)*

Si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge. On n'a surtout PAS DE RÉCIPROQUE

INTÉGRALE DÉFINIE, INTÉGRALE CONVERGENTE

Propriété 23 *(Lien avec les intégrales définies)*

Si f est continue par morceaux sur le **segment** $[a,b]$ alors les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent lorsque qu'on se restreint à $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$ et ont toutes la même valeur $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ (en tant qu'intégrale définie).

Remarque : cela sert pour les intégrales *faussement impropres* : la fonction f est continue sur $[a,b[$ (avec b **fini**) et admet une limite finie en b. On peut la prolonger par continuité sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

II. FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Propriété 24 *(Au programme)*

- → $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$,
- → $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$,
- → $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$,
- → $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si $\alpha < 1$,
- → $t \mapsto \frac{1}{(a-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[c,a[$ si et seulement si $\alpha < 1$

Remarque : en combinant avec les critères de comparaison (règles de Riemann)

- → soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$:
  - s'il existe $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ est bornée ou de limite finie en $+\infty$ alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$,
  - si $xf(x)$ est minorée par $m > 0$ ou de limite infinie en $+\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$,
- → soit f continue par morceaux sur $]0,a]$:
  - s'il existe $\alpha < 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ est bornée ou de limite finie en 0 alors f est intégrable sur $]0,a]$,
  - si $xf(x)$ est minorée par $m > 0$ ou de limite infinie en 0 alors f n'est pas intégrable sur $]0,a]$,

Propriété 25 *(Hors programme - Intégrales de Bertrand)*

- → la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- → la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est intégrable sur $]0,1/2]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

III. CALCULS

Propriété 26 *(Changement de variable)*

si
- → f est continue par morceaux sur I et intégrable sur I,
- → φ est $\mathscr{C}^1$ et bijective de J sur I,

alors
- → $f\circ\varphi\times\varphi'$ est intégrable sur J,
- → $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)).\varphi'(u)\mathrm{d}u$ où $\alpha = \lim\limits_{x\to a}\varphi^{-1}(x)$, $\beta = \lim\limits_{x\to b}\varphi^{-1}(x)$.

Remarque : si φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de J sur I, alors f est intégrable sur I si et seulement si $f\circ\varphi\times\varphi'$ est intégrable sur J. Cela permet de faire les calculs sans justifier les premières intégrabilités (si l'une des intégrales cv absolument).

Propriété 27 *(Intégration par parties)*

Soit f, g continues par morceaux sur $]a, b[$. Si fg admet une limite finie en a et b, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature et, en cas de convergence,

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque : trop d'hypothèses... autant se ramener à un segment et passer les bornes aux limites.

IV. BILAN - ÉTUDIER UNE INTÉGRABILITÉ

L'ESSENTIEL - ÉTUDIER UNE INTÉGRABILITÉ

- → sur quel intervalle travaille-t-on ? de quel(s) coté(s) est-il ouvert ?
- → la fonction est-elle positive ? la passer en module sinon.
- → cas simples : limite non nulle en $+\infty$ (intégrale grossièrement divergente), fonction qui se prolonge par continuité sur un segment (intégrale faussement impropre)
- → chercher un équivalent plus simple et utiliser les règles comparaisons, majorer
- → si on ne voit pas de comparaison simplement, essayer les règles de Riemann
- → utiliser un changement de variable pour étudier une autre intégrabilité
- → revenir à l'absolue convergence en étudiant l'éventuelle limite de $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t$ (si on est sur $[a, b[$) - ce qui permet également un IPP.

V. INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

Propriété 28 *(En $+\infty$)*

Soient f, g continues par morceaux sur $I = [a, +\infty[$ avec g **positive**.
- → si g est intégrable sur I (comparaison des restes) :
  - si $f = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(g)$ (resp. $f = \underset{+\infty}{\mathrm{O}}(g)$), alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t\right)$ (resp. O..)
  - si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\int_x^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t\right)$.
- → si g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ (comparaison des intégrales partielles) :
  - si $f = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(g)$ (resp. $f = \underset{+\infty}{\mathrm{O}}(g)$), alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$ (resp. O..)
  - si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.

Remarque : même type de résultat en 0 - on compare les restes $\displaystyle\int_0^x$ lorsque g est intégrable et les intégrales partielles $\displaystyle\int_x^1$ lorsqu'elle ne l'est pas.

VI. INTÉGRALES SEMI-CONVERGENTES

Proposition 29 *(Exemple de référence)*

→ $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge,
→ la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

Remarque : plus généralement (mais hors programme)

→ si $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin kt}{t^\alpha} \mathrm{d}t, \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos kt}{t^\alpha} \mathrm{d}t, \int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ convergent
→ si $\alpha > 1$, les fonctions $t \mapsto \frac{\sin kt}{t^\alpha}, t \mapsto \frac{\cos kt}{t^\alpha}, t \mapsto \frac{e^{ikt}}{t^\alpha}$ sont intégrales sur $[\pi, +\infty[$,
→ la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

VII. BILAN - ÉTUDIER UNE CONVERGENCE

L'ESSENTIEL - ÉTUDIER UNE CONVERGENCE

→ sur quel intervalle travaille-t-on ? de quel(s) coté(s) est-il ouvert ?
→ cas simples : limite non nulle en $+\infty$, fonction qui se prolonge par continuité sur un segment (intégrale faussement impropre)
→ la fonction est positive :
- chercher un équivalent plus simple et utiliser les règles comparaisons, majorer
- si on ne voit pas de comparaison simplement, essayer les règles de Riemann

→ la fonction est quelconque :
- passer module/valeur absolue et étudier la convergence absolue (ou l'intégrabilité)
- revenir à $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (si on est sur $[a, b[$) - ce qui permet de transformer l'intégrale par IPP, changement de variable.
- effectuer un développement asymptotique du terme général.

VIII. LIEN INTÉGRALE - LIMITE

Propriété 30

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

→ $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge $\iff F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$
→ f intégrable sur $[a, +\infty[\not\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,
→ f intégrable sur $[a, +\infty[$ et admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle
→ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \not\Rightarrow f$ intégrable sur $[a, +\infty[$.
→ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow f$ n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.
→ f admet une limite finie en $+\infty \iff \displaystyle\int_a^{+\infty} f'(t)\mathrm{d}t$ converge (ce qui est vrai lorsque f' est intégrable).

Remarque : il existe des fonctions sans limite en $+\infty$ qui sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

IX. EXERCICES

Exercice 1

Étudier la convergence des intégrales suivantes (ces intégrales existent-elles au sens des fonctions intégrables ?) :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x} \mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{(1+x)^2} \mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^4} \mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(2+\sin x)\ln^3 x}{1+x^2} \mathrm{d}x.$

Exercice 2

Étudier la convergence des intégrales suivantes (ces intégrales existent-elles au sens des fonctions intégrables ?) :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2-x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\ln^2(x)}\mathrm{d}x$.

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln(1-x)}}$.

Exercice 3

Prouver l'existence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+3}$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$.

Exercice 4

Prouver l'existence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_0^1 |\ln x|^n \mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$.

Exercice 5

Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\sin^2 x}$ à l'aide du changement de variable « $t = \tan x$ ».

Exercice 6

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 7 *(Mines MP)*

Déterminer les $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\mathrm{d}x$ soit convergente.

Exercice 8

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Exercice 9

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$.

Exercice 10 *(Mines MP)*

1. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x$.

Exercice 11

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$, la calculer à l'aide d'un changement de variable simple (a est un réel strictement positif).

Exercice 12

Soit $F(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $F(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}+O(\frac{1}{x^3})$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $F(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\ln x$.
4. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}F(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 13

Soit f,g,h trois fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles. On suppose $f\leqslant g\leqslant h$, f et h intégrables sur I. Montrer que g est intégrable sur I.

Exercice 14 ***(très classique)***

Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{x/2}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.
3. En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$ on a $f(x)=o(\frac{1}{x})$.

Exercice 15

Soit f une fonction de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. On veut montrer que si f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ alors f'^2 est intégrable également :

1. Montrer que ff'' est intégrable.
2. On suppose que f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que ff' tend vers $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer alors que f^2 tend vers l'infini.
   (c) Conclure.
3. On suppose de plus que $f(0)=0$. Montrer

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+}f'^2\right)^2\leqslant\int_{\mathbb{R}^+}f^2\int_{\mathbb{R}^+}f''^2.$$

Exercice 16

Soit f une fonction continue, décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$. Soit $0<a<b$ des réels.

1. Montrer que $g:x\mapsto\dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer la valeur de l'intégrale en fonction de $f(0)$ et $\ell=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
2. Application : calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(3x)-\arctan(x)}{x}\mathrm{d}x$.
3. Généraliser lorsque f est continue sur $\mathbb{R}_+$ avec une limite finie $\ell=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
4. *(Mines MP)* soit f continue, intégrable et positive sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x>0$, on note $g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x}f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 17 ***(Mines MP)***

Nature, suivant $\alpha>0$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 18

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $g:x\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 ***(Mines MP)***

1. Soit $t \in \mathscr{C}^0(]0,1],\mathbb{R})$ monotone et intégrable. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$
2. En déduire la limite de la suite de terme général $(n!/n^n)^{1/n}$.
3. Exprimer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^{1/n}$. Déterminer cette limite d'une autre manière (✰).

Exercice 20 ***(Mines-Ponts MP)*** ✰

1. Étudier l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de $f : t \mapsto \sqrt{t-\cos t} - \sqrt{t}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
2. Donner un équivalent de $x \mapsto \int_1^x \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$.

Exercice 21 ***(ENS)*** ✰

Soit f intégrable sur $\mathbb{R}$,

1. Justifier l'existence de $A > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} |f| < \varepsilon$.
2. déterminer $\lim_{x\to 0}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|\mathrm{d}t$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|\mathrm{d}t$.

EXERCICES EN VRAC

Exercice 22 ***(Polytechnique MP/MPI)*** ✰

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f(x) < \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) > \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$ pour tout $x > 0$ (*Indication :* en notant h la différence, vérifier que $h'(x) > xh(x)$ si $x > 0$).
3. Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 23 ***(ENS MP (L))*** ✰

Soit $f \in \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$ strictement décroissante telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x = +\infty$.

Exercice 24 ***(ENS MP (SR))***

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$. On pose $g(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$).
   On suppose à présent que f est décroissante.
2. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}^+$ tel que $\int_0^m f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x \geqslant m$.

Exercice 25

1. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t$?
2. Nature de $\displaystyle\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$?
3. Nature de $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

Exercice 26 *(Polytechnique MP/MPI)* ✫

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x} + e^{2x}|\sin x|}\,\mathrm{d}x$?