

5

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

I. INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE

GÉNÉRALITÉS SUR UN INTERVALLE $[a, b[$

Définition 16 (Convergence de l'intégrale)

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie en b (à gauche si $b \in \mathbb{R}$). On note alors $\int_a^b f(t)dt$ cette limite. Sinon on dit que l'intégrale est divergente.

Propriété 18

On suppose que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent (avec $b > a$)

→ linéarité : $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\int_a^b (f + \lambda g)(t)dt$ converge avec $\int_a^b (f + \lambda g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$,

→ positivité : si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$,

→ caractère défini : si $f \geq 0$, f **continue** et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur $[a, b[$.

→ indépendance du point base : si $c \in]a, b[$ alors $\int_c^b f(t)dt$ converge et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Remarque : attention, si $\int_a^b (f + g)$ converge, on n'a pas forcément la convergence des deux intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$.

CAS DES FONCTIONS POSITIVES

Propriété 19 (propriété principale)

Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ et **positive** alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a, b[$. On a alors

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge} \iff F \text{ admet une limite finie en } b \iff F \text{ est majorée sur } [a, b[.$$

Remarque : puisque F est **croissante**, on peut ramener l'étude de la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ à l'étude de la limite d'une suite $\int_a^{b_n} f(t)dt$ où b_n tend vers b . Par exemple, pour étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ lorsque $f \geq 0$, on peut s'intéresser à la suite $\int_0^n f(t)dt$ ou $\int_0^{n\pi} f(t)dt \dots$

Propriété 20 (Critères de comparaison)

Si f et g sont continues par morceaux et **positives** sur $[a, b[$, alors

→ si $0 \leq f \leq g$: $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge,

→ si $f = o_b(g)$ ou $f = O_b(g)$: $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge,

→ si $f \sim_b g$: $\int_a^b g(t)dt$ converge $\iff \int_a^b f(t)dt$ converge.



FONCTIONS QUELCONQUES

Définition 17 (Intégrabilité)

On dit que f , continue par morceaux sur $[a, b[$, est intégrable sur $[a, b[$ lorsque $\int_a^b |f(t)| dt$ converge (on dit aussi que $\int_a^b f(t) dt$ est **absolument convergente**).

Théorème 3 (Intégrabilité et convergence)

Si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge. On n'a surtout PAS DE RÉCIPROQUE

INTÉGRALE DÉFINIE, INTÉGRALE CONVERGENTE

Propriété 21 (Lien avec les intégrales définies)

Si f est continue par morceaux sur le **segment** $[a, b]$ alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ convergent lorsque qu'on se restreint à $]a, b[$, $[a, b[$ ou $]a, b[$ et ont toutes la même valeur $\int_a^b f(t) dt$ (en tant qu'intégrale définie).

Remarque : cela sert pour les intégrales *faussement impropres* : la fonction f est continue sur $[a, b[$ (avec b fini) et admet une limite finie en b . On peut la prolonger par continuité sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(t) dt$ converge.

II. FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Propriété 22 (Au programme)

- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$,
- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$,
- $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$,
- $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si $\alpha < 1$,
- $t \mapsto \frac{1}{(a-t)^\alpha}$ est intégrable sur $]c, a[$ si et seulement si $\alpha < 1$

Remarque : en combinant avec les critères de comparaison (règles de Riemann)

- soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$:
 - s'il existe $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ est bornée ou de limite finie en $+\infty$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$,
 - si $xf(x)$ est minorée par $m > 0$ ou de limite infinie en $+\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$,
- soit f continue par morceaux sur $]0, a]$:
 - s'il existe $\alpha < 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ est bornée ou de limite finie en 0 alors f est intégrable sur $]0, a]$,
 - si $xf(x)$ est minorée par $m > 0$ ou de limite infinie en 0 alors f n'est pas intégrable sur $]0, a]$,

Propriété 23 (Hors programme - Intégrales de Bertrand)

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.



III. CALCULS

Propriété 24 (Changement de variable)

si
 → f est continue par morceaux sur I et intégrable sur I ,
 → φ est \mathcal{C}^1 et bijective de J sur I ,
 alors
 → $f \circ \varphi \times \varphi'$ est intégrable sur J ,
 → $\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du$ où $\alpha = \lim_{x \rightarrow a} \varphi^{-1}(x)$, $\beta = \lim_{x \rightarrow b} \varphi^{-1}(x)$.

Remarque : si φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de J sur I , alors f est intégrable sur I si et seulement si $f \circ \varphi \times \varphi'$ est intégrable sur J . Cela permet de faire les calculs sans justifier les premières intégrabilités (si l'une des intégrales cv absolument).

Propriété 25 (Intégration par parties)

Soit f, g continues par morceaux sur $]a, b[$. Si fg admet une limite finie en a et b , alors les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature et, en cas de convergence,

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Remarque : trop d'hypothèses... autant se ramener à un segment et passer les bornes aux limites.

IV. BILAN - ÉTUDIER UNE INTÉGRABILITÉ

L'ESSENTIEL - ÉTUDIER UNE INTÉGRABILITÉ

- sur quel intervalle travaille-t-on? de quel(s) coté(s) est-il ouvert?
- la fonction est-elle positive? la passer en module sinon.
- cas simples : limite non nulle en $+\infty$ (intégrale grossièrement divergente), fonction qui se prolonge par continuité sur un segment (intégrale faussement impropre)
- chercher un équivalent plus simple et utiliser les règles comparaisons, majorer
- si on ne voit pas de comparaison simplement, essayer les règles de Riemann
- utiliser un changement de variable pour étudier une autre intégrabilité
- revenir à l'absolue convergence en étudiant l'éventuelle limite de $\int_a^x |f(t)| dt$ (si on est sur $[a, b]$) - ce qui permet également un IPP.

V. INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

Propriété 26 (En $+\infty$)

Soient f, g continues par morceaux sur $I = [a, +\infty[$ avec g **positive**.

- si g est intégrable sur I (comparaison des restes) :
 - si $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = O_{+\infty}(g)$), alors $\int_x^{+\infty} f(t) dt = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} g(t) dt \right)$ (resp. O..)
 - si $f \sim_{+\infty} g$, alors $\int_x^{+\infty} f(t) dt \sim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} g(t) dt \right)$.
- si g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ (comparaison des intégrales partielles) :
 - si $f = o_{+\infty}(g)$ (resp. $f = O_{+\infty}(g)$), alors $\int_a^x f(t) dt = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$ (resp. O..)
 - si $f \sim_{+\infty} g$, alors $\int_a^x f(t) dt \sim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$.

Remarque : même type de résultat en 0 - on compare les restes \int_0^x lorsque g est intégrable et les intégrales partielles \int_x^1 lorsqu'elle ne l'est pas.



VI. INTÉGRALES SEMI-CONVERGENTES

Proposition 27 (Exemple de référence)

- $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge,
- la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

Remarque : plus généralement (mais hors programme)

- si $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin kt}{t^{\alpha}} dt$, $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos kt}{t^{\alpha}} dt$, $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t^{\alpha}} dt$ convergent
- si $\alpha > 1$, les fonctions $t \mapsto \frac{\sin kt}{t^{\alpha}}$, $t \mapsto \frac{\cos kt}{t^{\alpha}}$, $t \mapsto \frac{e^{ikt}}{t^{\alpha}}$ sont intégrales sur $[\pi, +\infty[$,
- la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^{\alpha}}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

VII. BILAN - ÉTUDIER UNE CONVERGENCE

L'ESSENTIEL - ÉTUDIER UNE CONVERGENCE

- sur quel intervalle travaille-t-on? de quel(s) coté(s) est-il ouvert?
- cas simples : limite non nulle en $+\infty$, fonction qui se prolonge par continuité sur un segment (intégrale faussement impropre)
- la fonction est positive :
 - chercher un équivalent plus simple et utiliser les règles comparaisons, majorer
 - si on ne voit pas de comparaison simplement, essayer les règles de Riemann
- la fonction est quelconque :
 - passer module/valeur absolue et étudier la convergence absolue (ou l'intégrabilité)
 - revenir à $\int_a^x f(t) dt$ (si on est sur $[a, b]$) - ce qui permet de transformer l'intégrale par IPP, changement de variable.
 - effectuer un développement asymptotique du terme général.

VIII. LIEN INTÉGRALE - LIMITE

Propriété 28

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

- $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge $\iff F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$
- f intégrable sur $[a, +\infty[\iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,
- f intégrable sur $[a, +\infty[$ et admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \not\Rightarrow f$ intégrable sur $[a, +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow f$ n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.
- f admet une limite finie en $+\infty \iff \int_a^{+\infty} f'(t) dt$ converge (ce qui est vrai lorsque f' est intégrable).

Remarque : il existe des fonctions sans limite en $+\infty$ qui sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

IX. EXERCICES

Exercice 1

Étudier la convergence des intégrales suivantes (ces intégrales existent-elles au sens des fonctions intégrables?) :

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$ | c) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} dx.$ | e) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^4} dx.$ |
| b) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx.$ | d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{(1+x)^2} dx.$ | f) $\int_1^{+\infty} \frac{(2+\sin x)\ln^3 x}{1+x^2} dx.$ |

**Exercice 2**

Étudier la convergence des intégrales suivantes (ces intégrales existent-elles au sens des fonctions intégrables?) :

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

c) $\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$.

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^4} dx$.

g) $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx$.

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1} dx$.

d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2-x)}{(1+x)^2} dx$.

f) $\int_0^{+\infty} e^{-\ln^2(x)} dx$.

h) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln(1-x)}}$.

Exercice 3

Prouver l'existence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

a) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+3}$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)(1+t^2)} dt$.

c) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$.

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$.

Exercice 4

Prouver l'existence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

a) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$.

b) $\int_0^1 |\ln x|^n dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $\int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos t}$.

Exercice 5

Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^\pi \frac{dx}{1+a \sin^2 x}$ à l'aide du changement de variable « $t = \tan x$ ».

Exercice 6

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 7 (Mines MP 2015)

Déterminer les $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx$ soit convergente.

Exercice 8

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles la fonction $f : x \mapsto \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Exercice 9

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$.

Exercice 10 (Mines MP)

1. Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

2. En déduire $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

**Exercice 11**

Soit $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
2. Montrer que $F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$.
4. Montrer que F est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et que $\int_0^{+\infty} F(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 12

Soit f, g, h trois fonctions continues par morceaux sur un intervalle I , à valeurs réelles. On suppose $f \leq g \leq h$, f et h intégrables sur I . Montrer que g est intégrable sur I .

Exercice 13 (très classique)

Soit f une fonction décroissante sur \mathbb{R}^+ et intégrable sur \mathbb{R}^+ .

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t) dt$.
3. En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$ on a $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 14

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On veut montrer que si f^2 et f''^2 sont intégrables sur \mathbb{R}^+ alors f'^2 est intégrable également :

1. Montrer que $f f''$ est intégrable.
2. On suppose que f'^2 n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^+ .
 - (a) Montrer que $f f'$ tend vers $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$.
 - (b) Montrer alors que f^2 tend vers l'infini.
 - (c) Conclure.
3. On suppose de plus que $f(0) = 0$. Montrer

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+} f'^2 \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^+} f^2 \int_{\mathbb{R}^+} f''^2.$$

Exercice 15

Soit f une fonction continue, décroissante et positive sur \mathbb{R}^+ . Soit $0 < a < b$ des réels.

1. Montrer que $g : x \mapsto \frac{f(ax) - f(bx)}{x}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* , et déterminer la valeur de l'intégrale en fonction de $f(0)$ et $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Application : calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(3x) - \arctan(x)}{x} dx$.
3. Généraliser lorsque f est continue sur \mathbb{R}_+ avec une limite finie $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. (Mines MP 2009) soit f continue, intégrable et positive sur \mathbb{R}^+ . Pour $x > 0$, on note $g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t) dt$. Montrer que g est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et calculer $\int_0^{+\infty} g(x) dx$.

Exercice 16 (Mines MP 2016)

Nature, suivant $\alpha > 0$, de $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{t^\alpha}\right) dt$.

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que l'application $g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

**Exercice 18 (Mines MP)**

1. Soit $t \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ monotone et intégrable. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général $(n!/n^n)^{1/n}$.

3. Exprimer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \right)^{1/n}$. Déterminer cette limite d'une autre manière (☆).

Exercice 19 (Mines-Ponts MP)

☆

1. Étudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de $f : t \mapsto \sqrt{t - \cos t} - \sqrt{t}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est-elle convergente?

2. Donner un équivalent de $x \mapsto \int_1^x |f(t)| dt$.

Exercice 20

☆

Soit f intégrable sur \mathbb{R} ,

1. Justifier l'existence de $A > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R} \setminus [-A, A]} |f| < \varepsilon$.

2. déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)| dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)| dt$.

EXERCICES EN VRAC**Exercice 21 (Polytechnique MP/MPI 2023)**

☆

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

1. Montrer que $f(x) < \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

2. Montrer que $f(x) > \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$ pour tout $x > 0$ (Indication : en notant h la différence, vérifier que $h'(x) > xh(x)$ si $x > 0$).

3. Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 22 (ENS MP 2022)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ décroissante. On pose $r_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $I(x) = \int_x^1 f(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Trouver une condition suffisante pour que (r_n) converge.

3. Soit $f : x \mapsto -\ln x$. Calculer r_n et en déduire la limite de $\frac{n!^{1/n}}{n}$ sans utiliser la formule de Stirling.

Exercice 23 (ENS MP 2022 (L))

☆

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ strictement décroissante telle que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx = +\infty$.

**Exercice 24 (ENS MP 2022 (SR))**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable sur \mathbb{R}^+ telle que $\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$. On pose $g(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

On suppose à présent que f est décroissante.

2. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}^+$ tel que $\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$.

3. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx \geq m$.