

# 7

# MATRICES

## I. GÉNÉRALITÉS

### L'ESSENTIEL - NOTATIONS ET OPÉRATIONS

- Ensembles  $M_{pq}(\mathbb{K})$ ,  $M_n(\mathbb{K})$ ,  $GL_n(\mathbb{K})$ .
- Si  $C = AB$  alors  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$  ( $A \in M_{pn}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{nq}(\mathbb{K})$  et  $C \in M_{pq}(\mathbb{K})$ ).
- base canonique  $(E_{ij})$  avec  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ .
- transposition : linéarité,  $AB^T = B^T A^T$  et  $({}^T A^{-1}) = (A^T)^{-1}$ . Sous-espaces  $A_n(\mathbb{K})$  et  $S_n(\mathbb{K})$  de  $M_n(\mathbb{K})$ .
- trace : linéarité,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  et  $\text{tr}(A^T) = \text{tr} A$ .
- matrice d'un vecteur et d'une application linéaire. Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ , définition de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  si  $x \in E$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  et relation  $y = f(x)$  si et seulement si  $Y = AX$ . Isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $M_{pq}(\mathbb{K})$  si  $\dim E = q$  et  $\dim F = p$  une fois des bases de  $E$  et  $F$  choisies.
- si  $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ , on appelle application linéaire canoniquement associée à  $A$  l'application linéaire  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$  dont la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^q$  et  $\mathbb{R}^p$  est  $A$ .
- rang d'une matrice et lien avec les autres rangs

#### Exercice 1

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  puis pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

#### Exercice 2

Soit  $A, B$  deux matrices non nulles de  $M_n(\mathbb{K})$  telles que  $\text{tr}(A)\text{tr}(B) \neq 1$ . Résoudre le système d'inconnues  $X$  et  $Y$  dans  $M_n(\mathbb{K})$

$$\begin{cases} X &= I_n + \text{tr}(Y)A \\ Y &= I_n + \text{tr}(X)B \end{cases}$$

#### Exercice 3 (matrices de rang 1)

1. Montrer qu'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est de rang 1 si et seulement si il existe des vecteurs  $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  non nuls tels que  $A = UV^T$ .
2. On suppose que  $A = UV^T$  avec  $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  non nuls.
  - (a) Montrer que  $\text{tr}(A) = U^T \cdot V$ . En déduire  $A^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
  - (b) Déterminer  $\ker A$ .
3. Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $\text{rg}(AB - BA) = 1$ . Combien vaut  $(AB - BA)^2$ ?

#### Exercice 4

Soient  $A = X^4 + 1$  et  $B = X^4 + X$ , soit  $f$  l'application qui à  $P$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$  associe le reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire
2. Donner la matrice de  $f$  dans la base canonique.
3. Déterminer l'image et le noyau de  $f$ .

#### Exercice 5

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 3 et soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Soit  $H$  le plan d'équation  $x + y + z = 0$ , et  $D$  la droite  $x = y/2 = z/3$ .

1. Montrer que  $H \oplus D = E$ .
2. Trouver la matrice de la projection sur  $H$  parallèlement à  $D$ .



## MÉTHODE - MONTRER L'INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE

Pour montrer que  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est inversible :

- on trouve  $B \in M_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = I_n$ ,
- on montre que  $\text{rg } A = n$ .
- on montre que si  $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$  est tel que  $AX = 0$  alors  $X = 0$  (injectivité de l'application linéaire canoniquement associée)
- on montre que  $\det A \neq 0$

## Exercice 6 (matrice à diagonale strictement dominante)

Soit  $A$  une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est à diagonale strictement dominante si elle vérifie, pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ . Montrer qu'une telle matrice est inversible. On pourra considérer  $X \neq 0$  tel que  $AX = 0$  et regarder la ligne  $i_0$  telle que  $|x_{i_0}|$  est la plus grande des valeurs absolues des coordonnées de  $X$

## II. CHANGEMENT DE BASES

## L'ESSENTIEL - CHANGEMENT DE BASES

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  (et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ )

- Matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  : on écrit en colonnes les vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  dans l'ancienne base  $\mathcal{B}$ . Elle est notée  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  ou  $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  ou  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ . Elle correspond à  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$  (elle « part » de  $\mathcal{B}'$  pour « arriver » dans  $\mathcal{B}$ ).
- On a  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$
- Si  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ , alors  $X = PX'$
- Si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ ,  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$ ,  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  et  $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$ , alors  $B = Q^{-1}AP$

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{B}') & \xrightarrow{B} & (F, \mathcal{C}') \\ \downarrow P & & \downarrow Q \\ (E, \mathcal{B}) & \xrightarrow{A} & (F, \mathcal{C}) \end{array}$$

## L'ESSENTIEL - MATRICES SEMBLABLES ET ÉQUIVALENTES

- $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{K})$  sont semblables lorsqu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  dans deux bases de  $E$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont semblables alors elles ont même rang, même trace, même déterminant (pas de réciproque)
- $A$  et  $B$  dans  $M_{pq}(\mathbb{K})$  sont équivalentes lorsqu'il existe  $P \in GL_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in GL_q(\mathbb{K})$  telle que  $B = Q^{-1}AP$  (matrices d'une application linéaire dans deux jeux de bases différents).
- Les matrices  $A$  et  $B$  dans  $M_{pq}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang  $r$ . Elles sont alors équivalentes à la matrice  $J_r$  de  $M_{pq}(\mathbb{K})$ .

## Exercice 7

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Im } u = \ker u$ .

1. Montrer que  $n$  est pair.
2. Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
3. Déterminer la dimension du commutant de  $u$  (l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec  $u$ ).

## Exercice 8

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  de rang  $r$ . Montrer que  $A$  peut s'écrire comme somme de  $r$  matrices de rang 1.

### III. MATRICES PAR BLOCS

#### L'ESSENTIEL - OPÉRATIONS PAR BLOCS

- comprendre la représentation par blocs et opérations habituelles (sommes, produits par blocs).
- stabilité : si  $E = F \oplus G$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  alors  $F$  est stable par  $f$  si et seulement si la matrice de  $f$  dans une base adaptée à  $E = F \oplus G$  est sous la forme  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ .
- Si  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$  alors chaque  $E_i$  est stable par  $f$  si et seulement si la matrice de  $f$  dans une base adaptée est diagonale par blocs (avec des blocs carrés de taille  $\dim E_i$ ).
- Déterminant par blocs :  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$ . Généralisation lorsque  $M$  est triangulaire supérieure par blocs

#### Exercice 9

Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $C \in GL_p(\mathbb{K})$ . Montrer que  $M$  est inversible et déterminer son inverse.

#### Exercice 10

1. Soit  $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $C \in M_p(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg} C$ .
2. Soit  $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ . Montrer que  $n + \operatorname{rg}(I_p - BA) = p + \operatorname{rg}(I_n - AB)$ . On pourra s'intéresser aux produits de la matrice  $M = \begin{pmatrix} I_p & B \\ A & I_n \end{pmatrix}$  avec une matrice par blocs bien choisies. En déduire que  $\operatorname{rg}(I_n - AB) = n - p \Leftrightarrow BA = I_p$ .

### IV. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

#### L'ESSENTIEL - OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

- les trois types de matrices :
  - permutation  $T_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ ,  $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$ ,
  - dilatation  $T_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$  lorsque  $\lambda \neq 0$ ,  $T_i(\lambda)^{-1} = T_i(1/\lambda)$ ,
  - transvection  $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$  si  $i \neq j$ ,  $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$
- opérations à droite : sur les colonnes. Si  $A$  est une matrice, la multiplication correspond à
  - $AT_{ij} : C_i \leftrightarrow C_j$ ,
  - $AT_i(\lambda) : C_i \leftarrow \lambda C_i$ ,
  - $AT_{ij}(\lambda) : C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$
- opérations à gauche : sur les lignes. Si  $A$  est une matrice, la multiplication correspond à
  - $T_{ij}A : L_i \leftrightarrow L_j$ ,
  - $T_i(\lambda)A : L_i \leftarrow \lambda L_i$ ,
  - $T_{ij}(\lambda)A : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
- utilisations :
  - **rang de la matrice** : conservé par toutes ces opérations, on peut faire indifféremment des opérations sur les lignes et les colonnes
  - **image de la matrice** : manipulation uniquement des colonnes
  - **inverse de la matrice** : soit lignes, soit colonnes MAIS ne pas alterner.

## V. EXERCICES

### Exercice 11

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$  à coefficients non tous nuls.

1. Quel est le rang de  $A$ ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit la matrice d'un projecteur.
3. On pose  $B = 2A - \text{tr}(A)I_n$ . Calculer  $\det B$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $B$  soit inversible.
4. Calculer  $B^2$ . Calculer  $B^{-1}$  dans le cas où  $B$  est inversible.

### Exercice 12

Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et soit  $C(J) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MJ = JM\}$ .

1. Montrer que  $C(J)$  est un sous-espace vectoriel et en donner une base. L'ensemble  $C(J)$  est appelé *commutant* de  $J$ .
2. Existe-t-il une inclusion entre  $C(J)$  et  $D(J) = \{Y \in M_3(\mathbb{R}) \mid Y^2 = J\}$ ? Trouver  $D(J)$ .

### Exercice 13

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables.

### Exercice 14

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $3n$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\text{rg } f = 2n$  et  $f^3 = 0$ . Montrer que  $\ker f = \text{Im } f^2$  et trouver une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  soit  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 15

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = -\text{Id}_E$ .

1. Montrer que  $(a, f(a))$  est libre pour tout  $a$  non nul de  $E$ .
2. Montrer que  $n$  est un entier pair. On pose  $n = 2p$ . On pose  $\text{Vect}(a, f(a)) = F(a)$  pour tout  $a$  non nul de  $E$ .
3. Montrer l'existence de  $a_1, \dots, a_p$  dans  $E$  tels que  $F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_p) = E$ .
4. Dédurre des questions précédentes une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est particulièrement simple.

### Exercice 16 (Mines MP)

À quelle condition les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont-elles semblables?

### Exercice 17 (Mines MP)

Soit  $A, B \in M_3(\mathbb{C})$  non nulles telles que  $A^2 = B^2 = 0$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables.

**Exercice 18**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $G$  un sous-espace de  $E$ . On note

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{L}(E, F), G \subset \ker u\}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{U}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$ .
2. Déterminer la dimension de  $\mathcal{U}$  :
  - en raisonnant matriciellement dans une base bien choisie.
  - en montrant que l'application  $\varphi$  suivante est un isomorphisme :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{U} & \rightarrow \mathcal{L}(H, F) \\ u & \mapsto u|_H \end{cases}$$

où  $H$  est un supplémentaire de  $G$ .

**Exercice 19 (Mines MP)**

Soient  $A$  dans  $M_{3,2}(\mathbb{R})$  et  $B$  dans  $M_{2,3}(\mathbb{R})$  telles que  $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $AB$  est la matrice d'un projecteur. Quel est son rang?
2. Montrer que  $BA = I_2$ .

**Exercice 20**

Soient  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{C})$  et  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right)$ .

1. Déterminer le rang de  $M$  en fonction de  $A$  et  $B$ .
2. Calculer  $M^{-1}$  quand elle existe.

**Exercice 21**

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe  $B \in M_n(\mathbb{K})$  non nulle telle que  $AB = BA = 0$  si, et seulement si,  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 22 (Mines MP 2017)**

Trouver les matrices  $B$  de  $M_n(\mathbb{C})$  telles que, pour tout  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$ .

**Exercice 23 (Mines MP)**

RMS 2011 - 401

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $1 + X - (P_n(X))^2$  soit divisible par  $X^n$  (utiliser un dl de  $x \mapsto \sqrt{1+x}$ ).
2. Soit  $N \in M_n(\mathbb{R})$  nilpotente. Montrer qu'il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = I_n + N$ .

**Exercice 24**

Soient  $A, B$  des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  telles qu'il existe  $n+1$  réels distincts  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  tels que  $A + \lambda_k B$  est nilpotente. Montrer que  $A$  et  $B$  sont nilpotentes.

**Exercice 25 (Mines MP)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Un hyperplan de  $E$  est défini comme supplémentaire d'une droite vectorielle.

1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  est un hyperplan si et seulement s'il existe  $\ell \in E^*$  non nulle telle que  $H = \ker \ell$ .
2. Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  on note  $\Phi_A$  la forme linéaire  $M \mapsto \text{tr}(AM)$ . Montrer que l'application  $\Phi : A \mapsto \Phi_A$  est un isomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sur son dual.
3. Montrer que

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est inversible. Calculer  $\text{tr}(J_r C)$  pour  $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

4. En déduire que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  contient une matrice inversible.

**Exercice 26 (Mines MP)**

Soit  $a, b \in \mathbb{R}^*$ . Soit  $\Phi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$  défini par  $\Phi(M) = aM + bM^T$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Phi$  soit injective. Calculer  $\text{tr} \Phi$  et  $\det \Phi$ .

**Exercice 27 (ENS MP 2018)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On dit que  $u \in \mathcal{L}(E)$  est échangeur s'il existe deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que  $F \oplus G = E$ ,  $u(F) \subset G$  et  $u(G) \subset F$ . Soit  $u$  un automorphisme de  $E$ . Montrer que  $u$  est échangeur si et seulement s'il existe  $v, w \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u = v + w$ ,  $v^2 = 0$  et  $w^2 = 0$ .

**Exercice 28 (Mines MP)**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}$  avec  $1 < p < n$ . Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , avec  $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\Phi : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow Y$  est un isomorphisme de  $\ker M$  sur  $\ker(D - CA^{-1}B)$ .
2. En déduire que  $\text{rg}(M) = p$  si et seulement si  $D = CA^{-1}B$   
Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $p = \max\{\text{rg}(M), M \in V\}$ . Le but des questions suivantes est de montrer que  $V$  est de dimension inférieure ou égale à  $np$ .
3. Pourquoi peut-on supposer, sans perdre de généralité, que  $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  appartient à  $V$ ? On fait cette hypothèse dans la suite.
4. Soit  $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}; A \in M_{n-p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{R}) \right\}$  Montrer que  $V \cap W = \{0\}$
5. Conclure.