8 SUITES DE FONCTIONS

Dans ce chapitre, toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. CONVERGENCES

Définition 22 *(Convergences)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et f une fonction de A vers $\mathbb{K}$. On dit que

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers f sur A lorsque, pour tout $x \in A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, ou encore

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La fonction f est appelée limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur A lorsque, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,A} = 0$, ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La fonction f est appelée limite uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur les segments (resp. compacts) de A lorsque pour tout segment (resp. compact) $K \subset A$, (f_n) converge uniformément vers f sur K.

Remarques :

→ la convergence uniforme sur A entraîne la convergence simple,
→ la seule fonction vers laquelle la convergence peut être uniforme est la fonction limite simple
→ on a les propriétés de linéarité habituelles (sur les limites simples et uniformes)
→ la convergence uniforme sur les segments/compacts de A nentraîne pas la convergence uniforme sur A.

Exercice 1 ***(CCP 9)***

1. Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a; +\infty[$?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2 ***(CCP 13)***

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque. On suppose que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g. Démontrer que la fonction g est bornée.
2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

II. PROPRIÉTÉS

Propriété 39 *(Continuité, limites)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers $\mathbb{K}$.

- → **continuité** : si (f_n) converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur A (resp. en $a\in A$) alors f est continue sur A (resp. en $a\in A$).
- → **permutation des limites** : si $a\in\overline{A}$, (f_n) converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n admet une limite finie $\ell_n\in\mathbb{K}$ en a alors la suite (ℓ_n) converge vers ℓ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

Propriété 40 *(Intégration/dérivation)*

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

- → **dérivation** : si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément vers g sur I alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'=g$. De plus $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur les segments de I.
- → **classe** $\mathscr{C}^k$: si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, pour tout $p<k$, $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g_p sur I et $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément vers g_k sur I alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et $f^{(p)}=g_p$ pour $p\in[\![0\,;k]\!]$. DE plus chaque convergence est uniforme sur les segments de I.
- → **intégration** : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $[a,b]\subset\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.
- → **primitives** : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur les segments de I et $a\in I$, alors (F_n), où $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$, converge uniformément sur les segments vers $F: x\mapsto\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 3

Soit $f_n(x)=\dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n$. La convergence est-elle uniforme ?
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout $[a,+\infty[$, lorsque $a>0$.

III. EXERCICES

Exercice 4

Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ (convergence simple, uniforme, uniforme sur les compacts) :

a) $f_n(x)=\sin(\frac{x}{n})$

b) $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(\frac{x}{n})$

c) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

d) $f_n(x)=\dfrac{nx^3}{1+nx^2}$

e) $f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x^n)}$

f) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^3x^2}$

g) $f_n(x)=\inf(n,x^2/n)$

h) $f_n(x)=nx^2e^{-nx}$

i) $f_n(x)=e^{-x^n}$

Exercice 5

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sin\left(\dfrac{n+1}{n}x\right)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur les segments $[-A,A]$.
3. Montrer qu'on n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 ***(Mines-Ponts MP)***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction g_n sur $[0,1]$ par $g_n(t) = e^t(1-t/n)^n$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$ puis que, pour tout $t \in [0,1]$, $\left|e^{-t} - (1-t/n)^n\right| \leqslant \frac{t}{n}$.
2. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où

$$I_n(x) = \int_0^1 t^x (1-\frac{t}{n})^n \, dt.$$

   Étudier ensuite la convergence uniforme.

Exercice 7

Soit (f_n) une suite de fonctions K-lipschitzienne sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles), qui converge simplement vers une fonction f.

1. Montrer que f est également K-lipschitzienne.
2. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue telle que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(x) = f(nx)f(x/n).$$

Montrer que cette suite converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit P_n une suite de polynômes tous de degré inférieur ou égal à N convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f. En utilisant l'interpolation de Lagrange en $N+1$ points distincts de $[a,b]$, montrer que f est un polynôme de degré au plus N et prouver que la convergence est uniforme.

Exercice 10 ***(Centrale MP 2021)***

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a<b$, $\left(f_n\right)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions convexes définies sur $[a,b]$. On suppose que $\left(f_n\right)$ converge simplement vers f sur $[a,b]$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$. Montrer qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in [\alpha, \beta]$, $\left|f_n(x) - f_n(y)\right| \leqslant K|x-y|$.
3. En déduire que $\left(f_n\right)$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$. Y a-t-il convergence uniforme sur $[a,b]$? $]a,b[$?

Exercice 11 ***(Mines MP 2011)***

Soit $\alpha > 0$ et, pour $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \dfrac{(nx)^\alpha}{1+nx^2}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n).
2. Pour quels α, les fonctions f_n sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}^+$? Dans ce cas, étudier la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt\right)$.

Exercice 12

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes réels telle que $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f et $\left(P_n'\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.