

9

CONVERGENCE DOMINÉE INTÉGRALES À PARAMÈTRE

I. THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE

Théorème 9 (convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continue par morceaux sur un intervalle I de \mathbb{R} . Si

- **convergence** : la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f ,
- **régularité** : la fonction f est continue par morceaux sur I ,
- **domination** : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$,

alors

- les fonctions f_n , la fonction f sont intégrables sur I ,

- on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$.

II. THÉORÈMES POUR LES INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Théorème 10 (Continuité)

Soit $h : (x, t) \in A \times I \rightarrow h(x, t) \in \mathbb{K}$. Si

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I ,
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur A ,
- il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, |h(x, t)| \leq \varphi(t)$,

alors $F : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est continue sur A .

Théorème 11 (Dérivation)

Soit $h : (x, t) \in A \times I \rightarrow h(x, t) \in \mathbb{K}$. Si

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ,
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I
- il existe $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t)$,

alors $F : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et, pour tout $x \in A$, $F'(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt$.

Théorème 12 (Limite)

Soit $h : (x, t) \in A \times I \rightarrow h(x, t) \in \mathbb{K}$ et a adhérent à A (éventuellement $\pm\infty$). Si

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I ,
- pour tout $t \in I$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x, t) = g(t)$
- il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, |h(x, t)| \leq \varphi(t)$,

alors $\lim_{x \rightarrow a} \int_I h(x, t) dt = \int_I g(t) dt = \int_I \lim_{x \rightarrow a} h(x, t) dt$.

Remarque : les propriétés de continuité et dérivabilité étant locale (il suffit de pouvoir le faire au voisinage de chaque point - ou sur chaque segment de A), on sera fréquemment amené à appliquer ces théorèmes sur un domaine $K \subset A$.

Théorème 13 (Dérivation d'ordre n)

Soit $h : (x, t) \in A \times I \mapsto h(x, t) \in \mathbb{K}$. Si

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^n sur A ,
- pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I ,
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$ est continue par morceaux sur I
- il existe $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \psi(t)$,

alors $F : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^n sur A et, pour tout $x \in A$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) dt$.

Remarque : la domination porte uniquement sur la dernière dérivée. Sur les dérivées précédentes, on a simplement besoin d'une intégrabilité à x fixé. Assez fréquemment, lorsqu'on doit montrer que F est \mathcal{C}^∞ , on est toutefois amené à déterminer une telle fonction dominante pour chaque dérivée (afin d'obtenir le résultat par récurrence sur n)

III. EXERCICES**Exercice 1**

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\text{a) } \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx \qquad \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx \qquad \text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n} + x^n + 1}} dx \qquad \text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx$$

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0)$.

Exercice 3 (Mines MP 2010)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{n+1}}$.

1. Déterminer la nature de la suite (a_n) .
2. Déterminer un équivalent de a_n .

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 < (1+1/n)^n < e$.
2. En déduire que, si f est continue et intégrable sur $[1, e[$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{(1+1/n)^n} x^{1/n} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx.$$

Exercice 5 (Mines MP 2021)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \int_1^{1+x/n} nf(t^n) dt$. Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 6

Soit $I_n = \int_0^1 \ln(1-t^n) dt$. Déterminer la limite ℓ de I_n , puis un équivalent de $I_n - \ell$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx} dx$.

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$, puis $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.
2. On suppose f de classe \mathcal{C}^1 , de dérivée bornée et telle que $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de $nI_n - L$.

Exercice 8

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

3. on rappelle la formule de Wallis : $\int_0^{\pi/2} \sin^p(t) dt \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$. En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Exercice 9

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\dots+t^n}$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

2. Montrer que $I_{2n} - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^{-n} + \dots + t^{-1} + 1 + t + \dots + t^n} dt$.

3. En minorant $u + \frac{1}{u}$ pour $u > 0$, montrer que $0 \leq I_{2n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

4. Montrer que $\sum (I_n - \frac{1}{2})$ converge.

Exercice 10 (très classique)

Soient $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f et g sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et déterminer leur dérivée.

2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.

3. En déduire $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 11

On définit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , calculer f'' et en déduire f .

Exercice 12 (Mines MP)

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt} dt$. Donner son domaine de définition, calculer sa dérivée et donner une expression simple de f .

Exercice 13

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1+t^2} dt$ est définie.

2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

3. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et donner une expression simple pour $f'(x)$.

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \pi \ln x)$.

5. En déduire une expression simple pour f sur \mathbb{R} .

Exercice 14

On note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f , étudier sa continuité, sa parité et montrer que f est bornée sur son ensemble de définition.
- Montrer que pour tout $x > 0$, on a $xf(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt$.
- Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , puis \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et que $f'' = f$.
- En déduire une expression simple pour f .
- Simplifier $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2+t^2} dt$.

Exercice 15 (Centrale MP)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

- Étudier le domaine de définition de f . Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
- Donner un équivalent de f en 0.
- Montrer que $x = 1/2$ est axe de symétrie du graphe de f .

Exercice 16 (Mines MP)

Soit g continue de $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et vaut ℓ . Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt$ tend vers ℓ lorsque x tend vers 0^+ .

Exercice 17

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(t^2 + \frac{x^2}{t^2})} dt$.

- Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f (on utilisera un changement de variable).
- En déduire une expression simple de f sur \mathbb{R} .

Exercice 18 (Intégrale de Fresnel)

- Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$. En déduire la valeur de ces intégrales (*indic* : effectuer un changement de variable $u = x - \frac{1}{x}$ au bon endroit).
- On définit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt$. Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R}^+ . Déterminer la limite de F en $+\infty$.
- Justifier que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , déterminer et simplifier sa dérivée (on pourra utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$).
- Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge et donner sa valeur.

EXERCICES EN VRAC**Exercice 19 (Mines MP/MPI 2023)**

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{t} e^{-t} dt$.

- Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|e^{iu} - 1| \leq |u|$.
- En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} puis simplifier l'expression de f .

Exercice 20 (Mines MP 2021)

Déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} |\cos t| dt$.