9 Matrices

I. Généralités

L'essentiel - Notations et opérations

- → Ensembles $M_{pq}(\mathbb{K})$, $M_n(\mathbb{K})$, $GL_n(\mathbb{K})$.
- → Si $C = AB$ alors $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ ($A \in M_{pn}(\mathbb{K})$, $B \in M_{nq}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{pq}(\mathbb{K})$.
- → base canonique (E_{ij}) avec $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
- → transposition : linéarité, ${}^t AB = {}^t B\,{}^t A$ et ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$. Sous-espaces $A_n(\mathbb{K})$ et $S_n(\mathbb{K})$ de $M_n(\mathbb{K})$.
- → trace : linéarité, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et $\mathrm{tr}({}^t A) = \mathrm{tr}\, A$.
- → matrice d'un vecteur et d'une application linéaire. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F, définition de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ si $x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et relation $y = f(x)$ si et seulement si $Y = AX$. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $Mpq(\mathbb{K})$ si $\dim E = q$ et $\dim F = p$ une fois des bases de E et F choisies.
- → si $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on appelle application linéaire canoniquement associé à A l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$ est A.
- → rang d'une matrice et lien avec les autres rangs

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit A, B deux matrices non nulles de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) \neq 1$. Résoudre le système d'inconnues X et Y dans $M_n(\mathbb{K})$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X & = & I_n + \mathrm{tr}(Y)A \\ Y & = & I_n + \mathrm{tr}(X)B \end{array} \right.$$

Exercice 3 *(matrices de rang 1)*

1. Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe des vecteurs $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $A = U\,{}^t V$.
2. On suppose que $A = U\,{}^t V$ avec $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls.
   (a) Montrer que $\mathrm{tr}(A) = {}^t U.V$. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer $\ker A$.
3. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$. Combien vaut $(AB - BA)^2$?

Exercice 4

Soient $A = X^4 + 1$ et $B = X^4 + X$, soit f l'application qui à P dans $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est linéaire
2. Donner la matrice de f dans la base canonique.
3. Déterminer l'image et le noyau de f.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit H le plan d'équation $x + y + z = 0$, et D la droite $x = y/2 = z/3$.

1. Montrer que $H \oplus D = E$.
2. Trouver la matrice de la projection sur H parallèlement à D.

MÉTHODE - MONTRER L'INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE

Pour montrer que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible :

- → on trouve $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$,
- → on montre que $\text{rg } A = n$.
- → on montre que si $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$ est tel que $AX = 0$ alors $X = 0$ (injectivité de l'application linéaire canoniquement associée)
- → on montre que $\det A \neq 0$

Exercice 6 ***(matrice à diagonale strictement dominante)***

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est à diagonale strictement dominante si elle vérifie, pour $i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$. Montrer qu'une telle matrice est inversible. On pourra considérer $X \neq 0$ tel que $AX = 0$ et regarder la ligne i_0 telle que $|x_{i_0}|$ est la plus grande des valeurs absolues des coordonnées de X

II. CHANGEMENT DE BASES

L'ESSENTIEL - CHANGEMENT DE BASES

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E (et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F)

- → Matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$: on écrit en colonnes les vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ dans l'ancienne base $\mathscr{B}$. Elle est notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ ou $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ ou $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Elle correspond à $\text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\text{Id}_E)$ (elle « part » de $\mathscr{B}'$ pour « arriver » dans $\mathscr{B}$.
- → On a $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$
- → Si $X = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors $X = PX'$
- → Si $A = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$, $P = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}\mathscr{C}'}$, alors $B = Q^{-1}AP$

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{B}') \arrow[r, "B"] \arrow[d, "P"] & (F,\mathscr{C}') \arrow[d, "Q"] \\
(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "A"] & (F,\mathscr{C})
\end{tikzcd}$$

L'ESSENTIEL - MATRICES SEMBLABLES ET ÉQUIVALENTES

- → A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. A et B sont semblables i et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n dans deux bases de E.
- → Si A et B sont semblables alors elles ont même rang, même trace, même déterminant (pas de réciproque)
- → A et B dans $M_{pq}(\mathbb{K})$ sont équivalentes lorsqu'il existe $P \in GL_q(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $B = Q^{-1}AP$ (matrices d'une application linéaires dans deux jeux de bases différents).
- → Les matrices A et B dans $M_{pq}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang r. Elles sont alors équivalentes à la matrice J_r de $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = \ker u$.

1. Montrer que n est pair.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer la dimension du commutant de u (l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u).

Exercice 8

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang r. Montrer que A peut s'écrire comme somme de r matrices de rang 1.

III. MATRICES PAR BLOCS

L'ESSENTIEL - OPÉRATIONS PAR BLOCS

→ comprendre la représentation par blocs et opérations habituelles (sommes, produits par blocs).
→ stabilité : si $E = F \oplus G$, $f \in \mathscr{L}(E)$ alors F est stable par f si et seulement si la matrice de f dans une base adaptée à $E = F \oplus G$ est sous la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
→ Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ alors chaque E_i est stable par f si et seulement si la matrice de f dans une base adaptée est diagonale par blocs (avec des blocs carrés de taille $\dim E_i$).
→ Déterminant par blocs : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A . \det C$. Généralisation lorsque M est triangulaire supérieure par blocs

Exercice 9

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in GL_p(\mathbb{K})$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 10

1. Soit $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg} C$.
2. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $n + \operatorname{rg}(I_p - BA) = p + \operatorname{rg}(I_n - AB)$. On pourra s'intéresser aux produits de la matrice $M = \begin{pmatrix} I_p & B \\ A & I_n \end{pmatrix}$ avec une matrice par blocs bien choisies. En déduire que $\operatorname{rg}(I_n - AB) = n - p \Leftrightarrow BA = I_p$.

IV. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

L'ESSENTIEL - OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

→ les trois types de matrices :
- permutation $T_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$,
- dilatation $T_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ lorsque $\lambda \neq 0$, $T_i(\lambda)^{-1} = T_i(1/\lambda)$,
- transvection $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ si $i \neq j$, $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

→ opérations à droite : sur les colonnes. Si A est une matrice, la multiplication correspond à
- $AT_{ij} : C_i \leftrightarrow C_j$,
- $AT_i(\lambda) : C_i \leftarrow \lambda C_i$,
- $AT_{ij}(\lambda) : C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

→ opérations à gauche : sur les lignes. Si A est une matrice, la multiplication correspond à
- $T_{ij}A : L_i \leftrightarrow L_j$,
- $T_i(\lambda)A : L_i \leftarrow \lambda L_i$,
- $T_{ij}(\lambda)A : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

→ utilisations :
- **rang de la matrice** : conservé par toutes ces opérations, on peut faire indifféremment des opérations sur les lignes et les colonnes
- **image de la matrice** : manipulation uniquement des colonnes
- **inverse de la matrice** : soit lignes, soit colonnes MAIS ne pas alterner.

V. EXERCICES

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients non tous nuls.

1. Quel est le rang de A?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
3. On pose $B = 2A - \mathrm{tr}(A) I_n$. Calculer $\det B$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.
4. Calculer B^2. Calculer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

Exercice 12

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $C(J) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MJ = JM\}$.

1. Montrer que $C(J)$ est un sous-espace vectoriel et en donner une base. L'ensemble $C(J)$ est appelé *commutant* de J.
2. Existe-t-il une inclusion entre $C(J)$ et $D(J) = \{Y \in M_3(\mathbb{R}) \mid Y^2 = J\}$? Trouver $D(J)$.

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $3n$. Soit f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}\, f = 2n$ et $f^3 = 0$. Montrer que $\ker f = \mathrm{Im}\, f^2$ et trouver une base $\mathscr{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $(a, f(a))$ est libre pour tout a non nul de E.
2. Montrer que n est un entier pair. On pose $n = 2p$. On pose $\mathrm{Vect}(a, f(a)) = F(a)$ pour tout a non nul de E.
3. Montrer l'existence de $a_1, \dots, a_p$ dans E tels que $F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_p) = E$.
4. Déduire des questions précédentes une base de E dans laquelle la matrice de f est particulièrement simple.

Exercice 16 *(Mines MP)*

À quelle condition les matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables?

Exercice 17 *(Mines MP)*

Soit $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ non nulles telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 18

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace de E. On note

$$\mathscr{U} = \{u \in \mathscr{L}(E,F), G \subset \ker u\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Déterminer la dimension de $\mathscr{U}$:
   → en raisonnant matriciellement dans une base bien choisie.
   → en montrant que l'application φ suivante est un isomorphisme :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{U} & \to & \mathscr{L}(H,F) \\ u & \mapsto & u_{|H} \end{array} \right.$$

   où H est un supplémentaire de G.

Exercice 19 ***(Mines MP)***

Soient A dans $M_{3,2}(\mathbb{R})$ et B dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que AB est la matrice d'un projecteur. Quel est son rang?
2. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 20

Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$.

1. Déterminer le rang de M en fonction de A et B.
2. Calculer M^{-1} quand elle existe.

Exercice 21

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = BA = 0$ si, et seulement si, A n'est pas inversible.

Exercice 22 ***(Mines MP 2017)***

Trouver les matrices B de $M_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$.

Exercice 23 ***(Mines MP)***

RMS 2011 - 401

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X - (P_n(X))^2$ soit divisible par X^n (utiliser un dl de $x \mapsto \sqrt{1+x}$).
2. Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = I_n + N$.

Exercice 24

Soient A, B des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $n+1$ réels distincts $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $A + \lambda_k B$ est nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 25 ***(Mines MP 2021)***

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. Un hyperplan de E est défini comme supplémentaire d'une droite vectorielle.

1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe $\ell \in E^*$ non nulle telle que $H = \ker \ell$.
2. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.
3. Montrer que
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$
est inversible. Calculer $\operatorname{tr}(J_r C)$.
4. En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 26 ***(Mines MP)***

Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. Soit $\Phi \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{R}))$ défini par $\Phi(M) = aM + b^tM$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit injective. Calculer $\operatorname{tr}\Phi$ et $\det\Phi$.

Exercice 27 ***(ENS MP 2018)***

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est échangeur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $F \oplus G = E, u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. Soit u un automorphisme de E. Montrer que u est échangeur si et seulement s'il existe $v, w \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u = v + w, v^2 = 0$ et $w^2 = 0$.

Exercice 28 ***(ENS MP 2022 (L))***

Soient $n \geqslant 2, \mathscr{T}_n$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux sont dans $\mathbb{U}$, $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices de permutation. On pose $\mathscr{N}_n = \{AB; A \in \mathscr{T}_n, B \in \mathscr{S}_n\}$.

1. Montrer que $\mathscr{N}_n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   On note $\mathscr{N}_n'$ le commutant de $\mathscr{N}_n$ et $\mathscr{N}_n''$ le commutant de $\mathscr{N}_n'$.
2. Montrer que $\mathscr{N}_n'' = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.