# 10 SUITES DE FONCTIONS

Dans ce chapitre, toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I. CONVERGENCES

**Définition 28** *(Convergences)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f$ une fonction de $A$ vers $\mathbb{K}$. On dit que

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers $f$ sur $A$ lorsque, pour tout $x \in A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, ou encore

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La fonction $f$ est appelée limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers $f$ sur $A$ lorsque, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,A} = 0$, ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La fonction $f$ est appelée limite uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur les segments (resp. compacts) de $A$ lorsque pour tout segment (resp. compact) $K \subset A$, $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $K$.

**Remarques :**

→ la convergence uniforme sur $A$ entraîne la convergence simple,

→ la seule fonction vers laquelle la convergence peut être uniforme est la fonction limite simple

→ on a les propriétés de linéarité habituelles (sur les limites simples et uniformes)

→ la convergence uniforme sur les segments/compacts de $A$ nentraîne pas la convergence uniforme sur $A$.

**Exercice 1** ***(CCP 9)***

1. Soit $X$ un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $X$ dans $\mathbb{C}$ et $g$ une fonction de $X$ dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur $X$ de la suite de fonctions $(g_n)$ vers la fonction $g$.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$ ?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;+\infty[$ ?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$ ?

**Exercice 2** ***(CCP 13)***

1. Soit $(g_n)$ une suite de fonctions de $X$ dans $\mathbb{C}$, $X$ désignant un ensemble non vide quelconque. On suppose que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n$ est bornée et que la suite $(g_n)$ converge uniformément sur $X$ vers $g$. Démontrer que la fonction $g$ est bornée.
2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ ?

# II. PROPRIÉTÉS

**Propriété 38** *(Continuité, limites)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A$ vers $\mathbb{K}$.

- → **continuité** : si $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $A$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $A$ (resp. en $a\in A$) alors $f$ est continue sur $A$ (resp. en $a\in A$).
- → **permutation des limites** : si $a\in\overline{A}$, $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $A$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ admet une limite finie $\ell_n\in\mathbb{K}$ en $a$ alors la suite $(\ell_n)$ converge vers $\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

**Propriété 39** *(Intégration/dérivation)*

Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $I$ vers $\mathbb{K}$.

- → **dérivation** : si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f$ sur $I$ et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément vers $g$ sur $I$ alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et $f'=g$. De plus $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur les segments de $I$.
- → **classe** $\mathscr{C}^k$ : si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$, pour tout $p<k$, $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $g_p$ sur $I$ et $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément vers $g_k$ sur $I$ alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ et $f^{(p)}=g_p$ pour $p\in[\![0;k]\!]$. DE plus chaque convergence est uniforme sur les segments de $I$.
- → **intégration** : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]\subset\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$.
- → **primitives** : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers $f$ sur les segments de $I$ et $a\in I$, alors $(F_n)$, où $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$, converge uniformément sur les segments vers $F:x\mapsto\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

**Exercice 3**

Soit $f_n(x)=\dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $(f_n)$.
2. Calculer $\int_0^1 f_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n$. La convergence est-elle uniforme ?
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout $[a,+\infty[$, lorsque $a>0$.

# III. EXERCICES

**Exercice 4**

Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ (convergence simple, uniforme, uniforme sur les compacts) :

a) $f_n(x)=\sin(\frac{x}{n})$

b) $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(\frac{x}{n})$

c) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

d) $f_n(x)=\dfrac{nx^3}{1+nx^2}$

e) $f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x^n)}$

f) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^3x^2}$

g) $f_n(x)=\inf(n,x^2/n)$

h) $f_n(x)=nx^2e^{-nx}$

i) $f_n(x)=e^{-x^n}$

**Exercice 5**

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur les segments $[-A,A]$.
3. Montrer qu'on n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 6** ***(Mines-Ponts MP)***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction $g_n$ sur $[0,1]$ par $g_n(t) = e^t(1-t/n)^n$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$ puis que, pour tout $t \in [0,1]$, $\left|e^{-t} - (1-t/n)^n\right| \leqslant \frac{t}{n}$.
2. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où

$$I_n(x) = \int_0^1 t^x (1-\frac{t}{n})^n \, dt.$$

   Étudier ensuite la convergence uniforme.

**Exercice 7**

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions $K$-lipschitzienne sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles), qui converge simplement vers une fonction $f$.

1. Montrer que $f$ est également $K$-lipschitzienne.
2. Montrer que la convergence est uniforme.

**Exercice 8**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue telle que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(x) = f(nx)f(x/n).$$

Montrer que cette suite converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 9**

Soit $P_n$ une suite de polynômes tous de degré inférieur ou égal à $N$ convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction $f$. En utilisant l'interpolation de Lagrange en $N+1$ points distincts de $[a,b]$, montrer que $f$ est un polynôme de degré au plus $N$ et prouver que la convergence est uniforme.

**Exercice 10** ***(Centrale MP 2021)***

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, $\left(f_n\right)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions convexes définies sur $[a,b]$. On suppose que $\left(f_n\right)$ converge simplement vers $f$ sur $[a,b]$.

1. Montrer que $f$ est convexe.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$. Montrer qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in [\alpha, \beta]$, $\left|f_n(x) - f_n(y)\right| \leqslant K|x-y|$.
3. En déduire que $\left(f_n\right)$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$. Y a-t-il convergence uniforme sur $[a,b]$ ? $]a,b[$ ?

**Exercice 11**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\ldots+t^n}$.

1. Montrer que la suite $(I_n)$ converge vers $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que $I_{2n} - \frac{1}{2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^{-n}+\ldots+t^{-1}+1+t+\ldots+t^n}\, dt$.
3. En minorant $u + \frac{1}{u}$ pour $u > 0$, montrer que $0 \leqslant I_{2n} - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
4. Montrer que $\sum (I_n - \frac{1}{2})$ converge.

**Exercice 12**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes réels telle que $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f$ et $\left(P_n'\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f'$ sur $[0,1]$.